幾何学と表現論

中島 啓 (HIRAKU NAKAJIMA) 京都大学・大学院理学研究科

はじめに

私が研究しているのは幾何学**と**表現論の二つではない. あたりまえのことだが, 日曜日から火曜日までは幾何学を研究して, 水曜日から土曜日までは表現論を研究しているわけではない. 私の研究はあくまで一つであり, それを分野として分類すると, 幾何学と表現論の両方に属するというに過ぎない. そもそも数学自体が分野に分かれているわけではない. 単に数学**者**が分野に分かれているだけである. 私がしゃべるのはいつも同じことなのだ. それを, あるときには代数幾何学の人たちに, 別のときには表現論の人たちに[1]講演するというだけだ[2].

「幾何学の研究に表現論を使ってはいけない」とか, 「表現論の研究に幾何学を使ってはいけない」とか, そういうこといっていたら私の研究はできなかったのだ. そもそもそういった言い方とは, まったく相容れないものなのだ.

私の主な研究の対象は箙多様体[3]と呼ばれる空間, 特にその K-群 (コホモロジー群) である. それは, ここ 10 年以上ずっと一貫して変わっていない. この空間は, 1989 年に Kronheimer との共同研究である多様体の上のベクトル束のモジュライ空間として発見したもので, それ以来箙多様体のことを深く知りたいと思って研究をしつづけている. それは, 空間を研究するという点では幾何学の研究といえるが, これまでの研究でわかってきたことは, 箙多様体の K 群を理解するためには量子アファイン展開環といった表現論の対象と結び付けることが不可避であるということだ. そして, 研究が進んでくると逆も成り立っていることがわかってきた. 量子アファイン展開環 (正確にはその有限次元表現) を理解するには, 箙多様体の K 群は不可避なのだ. すなわち, 箙多様体と量子アファイン展開環は一体のものと考えられるべきである.

このように私にとって一つのものが, 他のほとんどの人たちにはどちらかの片側しか見えないらしいというのは, とても不思議なことだ. ときに私の研究は「表現論に幾何を応用したもの」とか, 「幾何に表現論を応用したもの」といういわれかたをする. しかしそのどちらでもない. 一つの数学的な対象を研究しただけなのだ.

今回は, 箙多様体の K 群が, さらに他の数学的な対象につながっていることを紹介したい. 具体的には Gromov-Witten 不変量や Jones-Witten 型の knot 不変量, などと関係していることを, 一番簡単な場合についてであるが説明したい. 時間があれば, 講演では他の計算例についても紹介したい.

この関係は, Nekrasov の $\mathcal{N}=2$ ゲージ理論の分配関数に関する論文 [10, 11] と彼との直接の議論から学んだ. また箙多様体の K 群 (実際にはインスタントンのモジュライ空間の K 群) の部分の理解は, 神戸大の吉岡氏との共同研究 [9] によるものである.

1. 対称積の関数環の同変指標 = RESOLVED CONIFOLD の GW 不変量 = S^3 の JONES-WITTEN の不変量

章の名前にあるものが一致している. それぞれについて簡単に説明する. まずは, 一致した不変量の値を書いておこう.

$$\sum_{d=1}^{\infty}\frac{q^d}{d^3}\hbar^{-2}+\frac{1}{12}\log(1-q)\,\hbar^0-\sum_{g\geq 2}\frac{B_{2g}}{2g(2g-2)!}\sum_{d=1}^{\infty}d^{2g-3}q^d\hbar^{2g-2}. \tag{1.1}$$

Supported by the Grant-in-aid for Scientific Research (No.15540023), JSPS.

[1]そしてごくたまには微分幾何学の人たちの前で

[2]もちろん強調するところは少しずつ違うが

[3]箙単調体と呼ぶほうがよいが, ここでは通常の語法に従った

これは, $\hbar$ に関する形式的ローラン級数で, 最初の項は -2 から始まり, 偶数巾のみがあらわれている. これを $\hbar^{2g-2}$ と表わした. g はあとでは, リーマン面の genus と考えられる. さらに, $\hbar^{2g-2}$ の係数は, q に関する形式的巾級数である. q^d で表わされ, d はあとでは, 写像の degree とみなされる. また, B_{2g} はベルヌーイ数である.

$$\frac{t}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}t^n.$$

私がいいたいことをひとことでまとめると,

$$\boxed{\text{式(1.1)がたくさんの幾何学的な解釈をもつ}}$$

ということだ.

1.1. **アファイン平面の対称積.** 最初の幾何学的解釈では, 箙多様体の中でも一番簡単なもの, アファイン平面の n 次対称積 $S^n(\mathbb{C}^2)$ を考える. その上の関数環の同変指標を考える. あとででてくる Gromov-Witten 不変量, Jones-Witten 不変量の場合と違って, その定義には何も難しいことはいらない.

$\mathbb{C}^2$ には二次元トーラスが

$$(x,y)\longmapsto(t_1x,t_2y),\qquad (t_1,t_2)\in T^2$$

によって作用するが, この作用は $S^n(\mathbb{C}^2)$ への作用を誘導する. $S^n(\mathbb{C}^2)$ 上の多項式関数の全体 (すなわち構造環) を $H^0(S^n(\mathbb{C}^2),\mathcal{O})$ で表わす. これは無限次元のベクトル空間であるが, 上のトーラスの表現空間と思うと, その同時固有空間 (すなわちウェイト空間) はそれぞれ有限次元になる. そこで指標を

$$\operatorname{ch}H^0(S^n(\mathbb{C}^2),\mathcal{O})=\sum_{m,n\geq 0}t_1^mt_2^n\dim H^0(S^n(\mathbb{C}^2),\mathcal{O})_{m,n},$$
$$H^0(S^n(\mathbb{C}^2),\mathcal{O})_{m,n}=\left\{f\in H^0(S^n(\mathbb{C}^2),\mathcal{O})\,\middle|\,(t_1,t_2)\cdot f=t_1^mt_2^nf\right\}.$$

によって定義する. たとえば $n=1$ のときは, $H^0(\mathbb{C}^2,\mathcal{O})_{m,n}=\mathbb{C}x^my^n$ であり,

$$\operatorname{ch}H^0(\mathbb{C}^2,\mathcal{O})=\sum_{m,n\geq 0}t_1^mt_2^n=\frac{1}{(1-t_1)(1-t_2)}$$

となる. 一般の n の指標については, その母関数を容易に計算することができる[4].

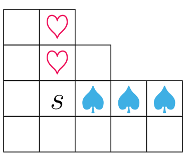
$$\sum_{n=0}^{\infty}q^n\operatorname{ch}H^0(S^n(\mathbb{C}^2),\mathcal{O})=\exp\left(\sum_{d=1}^{\infty}\frac{q^d}{(1-t_1^d)(1-t_2^d)d}\right). \tag{1.2}$$

このとき, 次が計算できる:

$t_1=e^{\hbar}$, $t_2=e^{-\hbar}$ とおき $-\log\left(\sum_{n=0}^{\infty}q^n\operatorname{ch}H^0(\mathbb{C}^2,\mathcal{O})\right)$ を考えて, $\hbar$ について展開すると, (1.1) に等しい.

1.2. **ヤング図式による表示.** 章の名前の中にはなかったが, (1.2) はヒルベルト概型, さらに Haiman の理論を用いて (有名な対称多項式である)Macdonald 多項式と関係している. ここでは, その一端を示すヤング図式による表示式を与える.

ヤング図式 Y と, その中の箱 $s\in Y$ に対して,



$l_Y(s)$ = number of ♠
$a_Y(s)$ = number of ♡

[4]そうはいっても証明は共同研究者の吉岡氏に教わった

によって leg length $l_Y(s)$ と arm length $a_Y(s)$ を定義する．このとき

$$\mathrm{ch}\, H^0(S^n(\mathbb{C}^2), \mathcal{O}) = \sum_{|Y|=n} \frac{1}{\prod_{s\in Y}(1-t_1^{-l_Y(s)}t_2^{1+a_Y(s)})(1-t_1^{1+l_Y(s)}t_2^{-a_Y(s)})} \tag{1.3}$$

が成り立つ．これの母関数は(1.2) の右辺に等しく, これは組み合わせ論的な等式である．Macdonald の本 [7] の Macdonald 多項式の章の中にある式を組み合わせるとこれを証明することができるが[5], 幾何学的には次のように証明することができる．

(1) ヒルベルト概型 $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$ は対称積 $S^n(\mathbb{C}^2)$ の特異点解消を与える．
(2) $H^k(\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2), \mathcal{O})$ は $k>0$ のときに消え, $k=0$ のときに $H^0(S^n(\mathbb{C}^2), \mathcal{O})$ に等しい．
(3) Atiyah-Bott の公式を使って自明ベクトル束に関する同変指標 $\sum_k(-1)^k\,\mathrm{ch}\, H^k(\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2), \mathcal{O})$ を不動点の情報で表わすことができる．
(4) ヒルベルト概型 $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$ へのトーラス作用の固定点は単項式で生成されるイデアルで, 箱の数が n のヤング図形でパラメトライズされる．(図 1 参照)

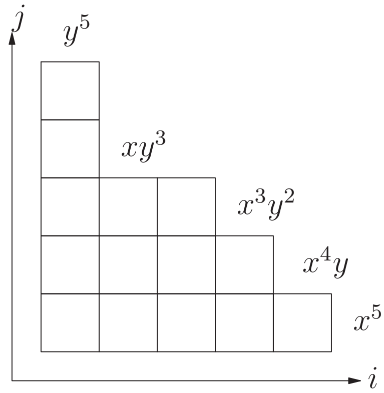


図 1. ヤング図式と多項式イデアル

(5) 固定点において接空間のトーラスの作用に関する同変指標を計算し, (1.3) の右辺の分母に現れている式であることをみる．

Macdonald 多項式は, 可積分系と関係している．Macdonald 多項式は, ある可換な差分作用素の family の同時固有関数である．ヒルベルト概型の同変 K 群の立場からは, これは自然である．Macdonald 多項式は固定点に対応し, 可換な差分作用素は tautological vector bundle の対称積たちをテンソル積する作用素である．とくに, (1.3) は, ある作用素の trace として表わすことができる．すなわち, ヒルベルト概型のトーラス同変な連接層のなす Grothendieck 群 $K^{T^2}(\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2))$ の局所化を $K^{T^2}(\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)) \otimes_{\mathbb{Z}[t_1,t_2]} \mathbb{Q}(t_1,t_2)$ として, $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$ の接束 T のオイラー類 $e(T)$, すなわち余接束の交代和 $\sum(-1)^i\bigwedge^i T^*$ の逆を, そこに働く線型作用素と思ったときの trace である:

$$(1.3) = \mathrm{tr}\left[\left(\sum(-1)^i\bigwedge^i T^*\right)^{-1} : K^{T^2}(\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)) \otimes_{\mathbb{Z}[t_1,t_2]} \mathbb{Q}(t_1,t_2) \circlearrowleft\right].$$

1.3. **局所 Gromov-Witten 不変量.** $\mathbb{P}^1$ の上の rank 2 のベクトル束 $E = \mathcal{O}(-1)\oplus\mathcal{O}(-1)$ を非コンパクトな Calabi-Yau 多様体 (物理でいうところの resolved conifold) として, すべての genus について Gromov-Witten 不変量を考える．

定理 1.4 (Faber-Pandharipande [2])**.** resolved conifold の局所 Gromov-Witten 不変量 (に $(-1)^g$ を掛けたもの) の母関数は, 式(1.1) で与えられる．

resolved conifold は, 次の意味で一般の Gromov-Witten 不変量の中で大切な役割を果たす．3 次元 Calabi-Yau 多様体の中に rigid な有理曲線, すなわち法束が $\mathcal{O}(-1)\oplus\mathcal{O}(-1)$ の埋め込まれた $\mathbb{P}^1$ があったとし, Gromov-Witten 不変量を正則曲線の数え上げと考えたときに, 埋め込み写

[5]興味ある方は自ら確かめられたい．$t_2 = t_1^{-1}$ のときはより簡単に確かめられる

像が rigid な有理曲線を factor しているものを数えていると考えられる．$g=0$ のときの $1/d^3$ が有名な multiple cover 公式である．数学的に正確な定義は次の通り．$\mathbb{P}^1$ を像とする n 点つき genus g の stable map のモジュライ空間 $M_{g,n}(\mathbb{P}^1,d)$ を考える．d は degree である．$n=0,1$ について

$$M_{g,0}(\mathbb{P}^1,d) \xleftarrow{\text{forget}} M_{g,1}(\mathbb{P}^1,d) \xrightarrow{\text{eval}} \mathbb{P}^1$$

という図式を考える．forget は点を忘れる写像, eval は値を取る写像である．$\mathbb{P}^1$ の上の rank 2 のベクトル束 $E=\mathcal{O}(-1)\oplus\mathcal{O}(-1)$ を考えて, $\mathbb{E}=\text{forget}_*\text{eval}^*E$ を考える．ただし, forget_* は K 理論の意味で取る．(すなわち高次順像層の交代和.) virtual な rank を top とし, その次数の Chern 類 $c_{\text{top}}(\mathbb{E})$ を考える．このとき

$$\int_{M_{g,0}(\mathbb{P}^1,d)^{\text{vir}}} c_{\text{top}}(\mathbb{E})$$

が, genus g, degree d の局所 Gromov-Witten 不変量である．ここで, $M_{g,0}(\mathbb{P}^1,d)^{\text{vir}}$ は virtual fundamental class である．

上の Faber-Pandharipande の定理は, 局所 Gromov-Witten 不変量を計算して証明される．$\mathbb{P}^1$ へのトーラス作用を用いて Bott の公式によって, 固定点集合上の積分, 今の場合はリーマン面のモジュライ空間の上のいわゆる Hodge bundle の積分に帰着させて行われる．

前節の結果と合わせて,

$$\boxed{\text{アファイン平面の対称積の関数環の同変指標} = \text{resolved conifold の Gromov-Witten 不変量}}$$

という等式が成り立っていることになる．この等式の不思議なところは, アファイン平面の対称積と resolved conifold(あるいはそこへの stable map のモジュライ空間) の間には, 今のところ何の関係もないのに成り立っていることである．しかし, 等式が成り立つことはいくつかのことを示唆していると思われる．これを列挙してみると,

(1) Gromov-Witten 不変量側で exp をとることは, 連結とは限らない曲線を数えることに対応する．アファイン平面の対称積の (母空間) の log を取ることは何らかの幾何学的な意味があるのではないだろうか？

(2) 同変指標も Gromov-Witten 不変量もともに母関数であるが, もう少し詳しく見ると, 同変指標側では Gromov-Witten 不変量側での genus については足しあげがすでに行われている．逆にいうと, 同変指標側では genus g の項は, $\hbar$ について**展開**して, 展開係数としてとらえられている．つまり, 同変指標側では, すべての genus の stable map のモジュライ空間が**同時**に扱われている．

(3) アファイン平面の対称積側で, なぜ $\hbar$ のべきが -2 から始まるのか, 私は「計算してみるとそうなる」という以外の理由をもっていない．一方, Gromov-Witten 側では, リーマン面の Euler 数が 2 以下であるという明確な理由をもつ．

幾何学的な不変量の母関数を考えるときに, 不変量を取る前の空間の全体に何らかの幾何学的構造を与えることができるだろうか, というのが以前に私が提唱した母空間の概念である．これが正しいとすれば,

$$\boxed{\text{母空間} \textstyle\sum_g M^{\circ}_{g,0}(\mathbb{P}^1,n)\hbar^{2g-2} = \text{アファイン平面の } n \text{ 次対称積}}$$

が成り立っているということである．ここで右肩の $\circ$ は連結とは限らない曲線を考えていることを意味し, 上に説明したことによる．

右辺は通常の空間であるが, 何らかの意味で空間を**展開**することによって, 係数として stable map のモジュライ空間があらわれていることになる．Gromov-Witten 側では, $\hbar$ は genus に関して足しあげるときの formal な変数であり, あまり意味はない．一方, 右側では, 同変コホモロジーを考えるときの, 一点の同変コホモロジー環の生成元であることに注意しよう．$t_1=e^{\hbar}$, $t_2=e^{-\hbar}$ は, Chern 指標を取って K 理論からコホモロジーに移行していることを意味する．

§1.2 において, exp (1.1) が分割に関する足しあげで書けること, 作用素の trace で与えられることを注意した．これを, Gromov-Witten の立場からも解釈せよ, というのは自然な問いである．現在の状況は, Bryan-Pandharipande [1] の定式化が正しそうだが, 上のものと一致して

いるかどうか分からない, というものだ. 彼らの結果を大まかに紹介しよう. §A で説明される (1+1) 次元位相的場の理論で, リーマン面の局所 Gromov-Witten 不変量を捉えるというものだ.

まず自然数 n を固定する. $R = \mathbb{Q}[[\hbar]]$ とし, $Z_n(S^1)$ を n の分割の全体を基底とする自由 R 加群とする. コンパクトな 1 次元多様体は S^1 だけだから, 境界の Hilbert 空間はこれだけでよい. さらに $\Sigma_{g,r,s}$ を r 個の S^1 から s 個の S^1 への genus g の向きづけられたコボルディズムとするとき,

$$Z_n(\Sigma_{g,r,s}) \in \mathrm{Hom}(Z_n(S^1)^{\otimes r}, Z_n(S^1)^{\otimes s})$$

を $\Sigma_{g,r,s}$ を値域とする '相対局所'Gromov-Witten 不変量を用いて定義する. おおざっぱにいうと, '局所' は前のように Calabi-Yau に入っていると思って, normal bundle のオイラー類で切ることであり, '相対' というのは境界での branch の仕方を分割によって指定することを意味する. また genus に関する足し上げのときに変数 $\hbar$ を今までと同様に用いる. 特に $Z_n(\Sigma_{1,1,1}) \in \mathrm{Hom}(Z_n(S^1), Z_n(S^1))$ が重要であり,

$$Z_n(\Sigma_g) = \mathrm{tr}\left(Z_n(\Sigma_{1,1,1})^{g-1}\right)$$

となる. 特に, $g = 0$ のときが, resolved conifold の (非連結な定義域も考える) 局所 Gromov-Witten 不変量に他ならない:

$$\exp(1.1) = \mathrm{tr}\left(Z_n(\Sigma_{1,1,1})^{-1}\right)$$

残念ながら, $Z_n(\Sigma_{1,1,1})$ は n が小さいときにしか計算されていないので, ヒルベルト概型が与える表示と同じかどうかは証明されていない. ただし, $K^{S^1}(\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2))$ は $R(S^1) = \mathbb{Z}[\exp(\pm\hbar)]$ 上の階数が n の分割に等しいので, そこまではあっている.

1.4. S^3 の Jones-Witten 不変量.

実は, resolved conifold の局所 Gromov-Witten 不変量は, もう一つ別の現れ方をすることが, Gopakumar-Vafa [4] により 'large N 双対性' として, すでに指摘されていた. これに関する [8, 5] の解説は読みやすいと思うが, ここでも簡単にまとめておく.

M を 3 次元多様体とし, コンパクトなリー群 G に関する Jones-Witten 不変量は, Chern-Simons 汎関数を G 接続の全体のゲージ軌道全体の空間で経路積分することで定義される. $G = \mathrm{U}(N)$ のときには

$$Z_k(M) = \int_{\mathcal{A}/\mathcal{G}} DA\ \exp(\sqrt{-1}kS(A))$$
$$S(A) = \frac{1}{4\pi}\int_M \mathrm{tr}\left(A \wedge dA + \frac{2}{3}A \wedge A \wedge A\right)$$

となる. このままでは数学的に厳密な定義にはなっていないが, 対応する (2+1) 次元位相的場の理論は, 境界のヒルベルト空間が共形ブロックの空間になるように構成して, 厳密な定義を与えることができる. (Reshetikhin-Turaev, 河野, et al.)

$G = \mathrm{U}(N)$, $M = S^3$ の Jones-Witten 不変量は

$$\log Z_k(S^3) = -\frac{N}{2}\log(k+N) + \sum_{j=1}^{N-1}(N-j)\log\left(2\sin\frac{\pi j}{k+N}\right)$$

となる. これは本質的に(1.1) と

$$\hbar = \frac{2\pi}{k+N}, \quad q = \exp\left(-\frac{2\pi i N}{k+N}\right)$$

という読み替えで等しい.

計算の仕方を簡単に説明する. 上に述べたように (2+1) 次元位相的場の理論として Jones-Witten 不変量をとらえると, $Z_k(S^3)$ は $Z_k(T^2)$ に働く S 行列の $(0,0)$ 成分 S_{00} に等しい. $Z_k(T^2)$ は level k のアファイン $\mathfrak{sl}(n)$ 既約可積分表現の全体を基底とする複素ベクトル空間である. ベクトル 0 は, 最高ウェイトが $k\Lambda_0$ の表現のことである. S 行列は, トーラスの微分同相でホモロ

ジーの標準的な基底 $\{a,b\}$ に対して $a \mapsto -b$, $b \mapsto a$ で働くものである. ($\tau \mapsto -1/\tau$) 具体的には, 表現の指標を計算することで求めることができる. ただし, $\mathrm{SU}(N)$ から $\mathrm{U}(N)$ にうつるために若干の modify が行われる.

$Z_k(S^3)$ はあくまで k と N によって決まる複素数であって, これを上の変数の読み替えのもとで $\hbar$ について展開しなければならない. 今の場合は, 具体的に式が与えられているので, これは簡単であるが, より一般の 3 次元多様体についてもできるかどうかは, きちんと考える必要がある. 物理的にはそれは経路積分を摂動論を使って計算する, Chern-Simons 摂動論とよばれるたいへん自然な計算になっている. (各係数は数学的に厳密に定義できるものになるが (Axelrod-Singer, Kontsevich, Bar-Natan, ...), 足しあげたものがもとのものを与えるかどうかは今のところ不明である.) 一方, 数学的に厳密に展開として与えられるいわゆる LMO 不変量 [6] が, $\hbar$ に関する展開を与えているのかどうか, それが Riemann 面の genus による展開と考えられるのか, 私の勉強不足のために分からない. (講演のときまでには分かるかも知れない...)

§1.2 のように $Z_k(S^3)$ を分割に関する足し上げで書くことができるか？というのは自然な問いであろう. n の分割が q^n の係数を定めるので, 私には上の式ではあまり自明でないことのような気がする. しかし, 講演で紹介する予定の状況では分割が Wilson line の上に乗って自然に現れてくるので, あるいは関係があるかもしれない.

最後に large N 双対性が成り立つことの '説明' (ただし数学的な証明ではない) は, 次のように与えられる.

(1) Witten の proposal により, S^3 の Jones-Witten 不変量は T^*S^3 に関する境界付きリーマン面 version の Gromov-Witten 不変量と等しい. もう少しいうと, 境界が lagrangian 部分多様体である零切断の S^3 に入っているような概正則曲線の '数え上げ' である. この proposal については, 深谷 [3] による数学的なアプローチがあり, 証明への第一歩が踏み出されている.

(2) $\mathbb{C}^4$ の中の $\{xy = uv\}$ で定義される超平面特異点を conifold という. これを $xy = uv - \mu$ とパラメータ μ によって変形すると, T^*S^3 が生じ, また $([z_0 : z_1], \xi, \zeta)$ を $\mathbb{P}^1$ の上のベクトル束 $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1)$ の元として, $x = \xi z_0$, $y = \zeta z_1$, $u = \zeta z_0$, $v = \xi z_1$ と定めると, $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1)$ は conifold の特異点解消を与える.

(3) 上の T^*S^3 の境界付きリーマン面 version の Gromov-Witten 不変量と, $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1)$ の閉リーマン面の局所 Gromov-Witten 不変量が同じことを見る. これは概正則曲線がどのように関係しているかを, 想像してみると何となく成り立ちそうなことが見えてくる.

Appendix A. $(n+1)$ 次元の位相的場の理論

可換環 R を固定する. $(n+1)$ 次元の位相的場の理論とは次の公理を満たすものである.

(1) 向きづけられた n 次元コンパクト多様体 X に対して, $Z(X)$ という有限階数の R 加群が与えられる. (境界の Hilbert 空間)

(2) X の向きを変えた $-X$ について, $Z(-X) = Z(X)^*$ である.

(3) 微分同相 $f\colon X \to X$ は, $Z(f)\colon Z(X) \to Z(X)$ を誘導し, 関手になっている. (i.e., $Z(f \circ g) = Z(f) \circ Z(g)$.) (実際には他の公理から, 単位元とアイソトピックな元は恒等写像を誘導することが分かる.)

(4) 二つの n 次元多様体 X_1, X_2 の disjoint union $X_1 \sqcup X_2$ について, $Z(X_1 \sqcup X_2) = Z(X_1) \otimes_R Z(X_2)$ である. また $\emptyset$ に対しては $Z(\emptyset) = R$ と約束する.

(5) 向きづけられた $(n+1)$ 次元のコンパクト多様体 M で, 境界 ∂M をもつものに対し, $Z(M) \in Z(\partial M)$ が与えられる. とくに M の境界が空集合のときには, $Z(M) \in R$ となる. また, (3) と同様の関手性をみたす.

(6) M が, X_1 と X_2 のコボルディズム ($\partial M = (-X_1) \sqcup X_2$) のとき, $Z(M) \in Z((-X_1) \sqcup X_2) = \mathrm{Hom}_R(Z(X_1), Z(X_2))$ を定めるが, コボルディズムの合成は準同型写像の合成を与える.

References

[1] J. Bryan and R. Pandharipande, *Curves in Calabi-Yau 3-folds and topological quantum field theory*, preprint, math.AG/0306316.

[2] C. Faber and R. Pandharipande, *Hodge integrals and Gromov-Witten theory*, Invent. Math. **139** (2000), 173–199; math.AG/9810173.
[3] K. Fukaya, *Morse homotopy and Chern-Simons perturbation theory*, Comm. Math. Phys. **181** (1996), 37–90.
[4] R. Gopakumar and C. Vafa, *On the gauge theory/geometry correspondence*, Adv. Theor. Math. Phys. **3** (1999), 1415–1443; hep-th/9811131.
[5] A. Grassi and M. Rossi, *Large N dualities and transitions in geometry*, in *Geometry and physics of branes (Como, 2001)*, 210–278, IOP, Bristol, Ser. High Energy Phys. Cosmol. Gravit., 2003; math.AG/0209044.
[6] T.T.Q. Le, J. Murakami and T. Ohtsuki, *On a universal perturbative invariant of* 3*-manifolds*, Topology **37** (1998), 539–574.
[7] I.G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials (2nd ed.)*, Oxford Math. Monographs, Oxford Univ. Press, 1995.
[8] M. Mariño, *Enumerative geometry and knot invariants*, preprint, hep-th/0210145.
[9] H. Nakajima and K. Yoshioka, *Instanton counting on blowup, I*, preprint, math.AG/0306198.
[10] N. Nekrasov, *Seiberg-Witten prepotential from instanton counting*, preprint, hep-th/0206161.
[11] N. Nekrasov and A. Okounkov, *Seiberg-Witten theory and randaom partitions*, preprint, hep-th/0306238.

E-mail address: `nakajima@math.kyoto-u.ac.jp`