INTRODUCTION TO QUIVER VARIETIES–箙多様体入門

中島 啓 (HIRAKU NAKAJIMA)
京都大学・大学院理学研究科

箙多様体は, 筆者が導入した hyper-Kähler 多様体である. そのホモロジー群や K 群に合成積を用いて, 複素単純 Lie 環やそのループ Lie 環の量子展開環の表現を構成できることが分っている. しかし表現論的な側面についてはすでに [7] に解説があるので, ここでは幾何学的な側面, 箙多様体が持つさまざまな構造について解説したい. 原論文は, [8] である.

1. HYPER-KÄHLER 商

まず, hyper-Kähler 多様体と, その代数幾何での対応概念である (正則) シンプレクティック多様体について述べる.

定義 1.1. C^∞ 級多様体 M 上の **hyper-Kähler 構造**とは, Riemann 計量 g と概複素構造 I, J, K の組で次の条件を満たすものことをいう.

(1) I, J, K は四元数の関係式 $I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -1$ を満たす.
(2) 計量 g は I, J, K のすべてについて hermitian である. すなわち, $g(Iv, Iw) = g(Jv, Jw) = g(Kv, Kw) = g(v, w)$ がすべての接ベクトル v, w について成り立つ.
(3) g の Levi-Civita 接続 ∇ に関して I, J, K は平行, すなわち $\nabla I = \nabla J = \nabla K = 0$ である.

多様体 M と hyper-Kähler 構造の組を, 単に **hyper-Kähler 多様体**という.

条件から I, J, K は積分可能であり, g はそのいずれに関しても Kähler 計量になっている.
三つの複素構造のうち一つを選ぼう. より一般に, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ を満たす実数 a, b, c を取って $aI + bJ + cK$ でもよい. 例えば I としよう. 残りの複素構造 J, K に対応する Kähler 形式を用いて $\omega_{\mathbb{C}} = \omega_J + i\omega_K$ と定義すると, これは最初に選んだ複素構造 I について正則シンプレクティック形式である. すなわち $(2, 0)$ 形式であって d-閉であり, 非退化である. よって複素多様体 (M, I) は正則シンプレクティック多様体である. 始めに取った I の代わりに J, K を取っても, あるいは $aI + bJ + cK$ を取っても同じように正則シンプレクティック形式を定められる. (正確には, 残りの複素構造の定め方から S^1 でパラメトライズされる正則シンプレクティック形式の族が定められる.) このように hyper-Kähler 多様体があれば, 複素多様体の変形族, より詳しく正則シンプレクティック多様体の族が得られる. この考えを押し進めたものが, hyper-Kähler 多様体の twistor 空間であるが, ここでは述べない. 詳しくは, [3] 参照.

Supported by the Grant-in-aid for Scientific Research (No.11740011), the Ministry of Education, Japan.

逆に, 正則シンプレクティック多様体があったとしても, 一般にはそれは hyper-Kähler 構造から来るとは限らない. Yau による Calabi 予想の解決により, M がコンパクトで Kähler 計量を持つとすれば, その Calabi-Yau 計量が hyper-Kähler 構造から来ることが証明できる. しかし, 以下で取り扱うのは非コンパクトな多様体なので, Yau の結果を適用することはできない. 従って, hyper-Kähler 多様体を単なる正則シンプレクティック多様体として扱うと情報を失っている可能性がある. よって, 代数幾何学的な立場から hyper-Kähler 多様体を取り扱うとすれば, 正則シンプレクティック多様体の**族**として扱うことが必要と思われる. この視点は十分には研究されていないと思われる. 以下で, 族として扱うことの応用を幾つか述べるが, まだまだ十分でないと感じられる.

次に, hyper-Kähler 多様体を作る '処方箋' として, **hyper-Kähler 商構成法**を説明する. これは, シンプレクティック幾何学におけるシンプレクティック商が原型にある.

hyper-Kähler 多様体 (M, g, I, J, K) にコンパクトな Lie 群 G が作用しているとする. G の Lie 環を $\mathfrak{g}$, その双対空間を $\mathfrak{g}^*$ として, 写像 $\mu\colon M \to \mathbb{R}^3 \otimes \mathfrak{g}^*$ が **hyper-Kähler 運動量写像**[1]であるとは, 次の条件が満たされているときをいう.

(1) μ は G の作用に関して同変である. ただし $\mathbb{R}^3$ には自明に, $\mathfrak{g}^*$ には, adjoint 作用の双対として作用する.

(2) $\mu = (\mu_I, \mu_J, \mu_K)$ と ($\mathbb{R}^3$ を純虚数の空間と同一視して) 座標表示したとき,

$$d\langle \mu_A, \xi \rangle(v) = g(Av, \xi^*)$$

が成り立つ. ただし, ξ は Lie 環 $\mathfrak{g}$ の元で, ξ^* は対応する M 上のベクトル場, $\langle\ ,\ \rangle$ は, $\mathfrak{g}^*$ と $\mathfrak{g}$ の pairing, v は M の接ベクトル, また A は I, J, K を動く.

μ を hyper-Kähler 運動量写像とし, $\zeta \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathfrak{g}^*$ を G の作用で固定される元 (例えば 0) とする.

定理 1.2 ([3]). (1) $\mu^{-1}(\zeta)$ への G の作用(仮定から $\mu^{-1}(\zeta)$ は G の作用で保たれていることに注意) は自由であるとする. このとき, 商空間 $\mu^{-1}(\zeta)/G$ は次元が $\dim M - 4\dim G$ である C^∞ 級多様体であり, 次のような hyper-Kähler 構造を持つ: 自然な射影を $\pi\colon \mu^{-1}(\zeta) \to \mu^{-1}(\zeta)/G$, 包含写像を $\iota\colon \mu^{-1}(\zeta) \to M$ としたとき, M の三つの Kähler 形式 ω_I, ω_J, ω_K と, $\mu^{-1}(\zeta)/G$ の三つの Kähler 形式 ω'_I, ω'_J, ω'_K は, $\iota^*\omega_A = \pi^*\omega'_A$ という関係で結ばれている.

(2) さらに M の Riemann 計量 g が完備であるとすると, $\mu^{-1}(\zeta)/G$ に定まる Riemann 計量も完備である.

$\mu^{-1}(\zeta)$ への G の作用が自由である, という仮定が成り立たないときも含めて, 商空間 $\mu^{-1}(\zeta)/G$ を **hyper-Kähler 商**と呼ぶことにする. 今のところ, これは単なる位相空間であると考える.

[1] $\mu\colon M \to \mathfrak{g}^*$ で, 下の式の右辺を $\omega(v, \xi^*)$ で置き換えたものがシンプレクティック幾何における運動量写像であった

問題 1.3. 特異点を持つ hyper-Kähler 多様体の一般論を展開し, hyper-Kähler 商を議論せよ.

先のように, 球面でパラメトライズされた複素構造のうちの一つ, 例えば I を取る. G の複素化 $G^{\mathbb{C}}$ を考える. その Lie 環を $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ とする. 残りの複素構造に対応する運動量写像の成分を集めて $\mu_{\mathbb{C}} = \mu_J + i\mu_K \colon M \to (\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})^*$ を考える. 容易にチェックできるように, この写像は, 複素構造 I に関して正則である. また, ζ から同様に $\zeta_{\mathbb{C}}$ を定める. すると, $\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(\zeta_{\mathbb{C}})$ は, (M, I) の (一般には特異点を持つ) 複素部分多様体である. さらに, G の作用が, 複素構造 I に関して正則な $G^{\mathbb{C}}$ の作用に拡張されると仮定する. このとき, $\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(\zeta_{\mathbb{C}})$ は $G^{\mathbb{C}}$ への作用で保たれる.

定理 1.4. (1) hyper-Kähler 商 $\mu^{-1}(\zeta)/G$ は, 幾何学的不変式論における商 $\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(\zeta_{\mathbb{C}})/\!\!/_{\zeta_I} G^{\mathbb{C}}$ と同相である. ただし, 商を取るときの (半) 安定性は, 運動量写像の値の残りの部分 ζ_I によって定められるので, 商を $/\!\!/_{\zeta_I}$ であらわした.

(2) $\mu^{-1}(\zeta)/G$ の元のうち stabilizer が有限群になる G-軌道の全体のなす開集合を考える. それは, 安定な $G^{\mathbb{C}}$-軌道の全体のなす $\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(\zeta_{\mathbb{C}})/\!\!/_{\zeta_I} G^{\mathbb{C}}$ の開集合に等しい.

(3) もしも $\mu^{-1}(\zeta)$ への G の作用が自由であるとするならば, hyper-Kähler 商 $\mu^{-1}(\zeta)/G$ と $\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(\zeta_{\mathbb{C}})/\!\!/_{\zeta_I} G^{\mathbb{C}}$ は双正則同値である. ただし, 前者は I から誘導される複素構造で考える.

この定理は Kempf-Ness, Kirwan のシンプレクティック商と幾何学的不変式論に関する理論を適用することで得られる. 一般的な状況でやるためには M が準射影的とは限らないので複素解析空間 (Kähler 空間) に対する幾何学的不変式論を使う必要がある. ただし以下で使うのは準射影的な場合に限られる.

幾何学的不変式論については, ここでは述べないので適当な教科書を参照して欲しい. 位相空間としての $\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(\zeta_{\mathbb{C}})/\!\!/_{\zeta_I} G^{\mathbb{C}}$ は, $\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(\zeta_{\mathbb{C}})$ のうちの半安定な軌道の全体に次の同値関係を入れたものに等しい.

$$G^{\mathbb{C}}x \sim G^{C}y \Longleftrightarrow G^{\mathbb{C}}x \text{ と } G^{C}y \text{ の半安定な軌道の全体の中での閉包が交わる}$$

さらに安定な軌道に制限すれば, この同値関係は $G^{\mathbb{C}}x = G^{\mathbb{C}}y$ と同じになる.

上に述べたように hyper-Kähler 多様体を正則シンプレクティック多様体の族として見る立場では, hyper-Kähler 商は幾何学的不変式論における商の族と見るべきであろう. ただし, 一般には, $G^{\mathbb{C}}$ の M への作用は, 複素構造の選び方に応じて変えないといけないことだけ注意しよう.

次の例は, 次節で述べる箙多様体の一番簡単な例になっている.

例 1.5. M を二次元の四元数ベクトル空間 $\mathbb{H}^2$ とする. 内積を入れて (線形な)Riemann 多様体と思い, さらに右からの四元数 i, j, k の積によって hyper-Kähler 構造を入れる. $G = \mathrm{U}(1)$ の M への作用を

$$(w_1, w_2) \mapsto (\lambda q, \lambda q') \qquad \lambda \in \mathrm{U}(1)$$

で定める．ただし U(1) の元は i に関して複素数と思っている．左からの掛け算と右からの掛け算が可換であることから, この作用は hyper-Kähler 構造を保っている．

$q = z_1 + jz_2$, $q' = z_1' + jz_2'$ と複素数で表示すると, 上の作用は

$$(z_1, z_1', z_2, z_2') \mapsto (\lambda z_1, \lambda z_1', \lambda^{-1} z_2, \lambda^{-1} z_2')$$

となる．j と λ の積の順を入れかえるときに λ が $\overline{\lambda} = \lambda^{-1}$ に代わることを注意しよう．hyper-Kähler 運動量写像は

$$\mu_I(z_1, z_1', z_2, z_2') = \frac{i}{2}(|z_1|^2 + |z_1'|^2 - |z_2|^2 - |z_2'|^2),$$
$$\mu_{\mathbb{C}}(z_1, z_1', z_2, z_2') = z_1 z_2 + z_1' z_2'$$

で与えられる．(符号が間違っているかもしれない.) ただし, Lie 環 $\mathfrak{u}(1)$ の双対は $\mathbb{R}$ と同一視した．

次節の記号と合わせるために

$$i_1 = (z_1 z_1'), \quad j_1 = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_2' \end{pmatrix}$$

と行列表示する．$V_1 = \mathbb{C}$, $W_1 = \mathbb{C}^2$ として, $i_1 \colon W_1 \to V_1$, $j_1 \colon V_1 \to W_1$ という線形写像と思う．すると $\mathrm{U}(1) = \mathrm{U}(V_1)$ であり, hyper-Kähler 運動量写像は

$$\begin{aligned} \mu_I(i_1, j_1) &= \frac{i}{2}(|i_1|^2 - |j_1|^2) \\ \mu_{\mathbb{C}}(i_1, j_1) &= i_1 j_1 \end{aligned} \tag{1.6}$$

である．このとき ζ_I に対応する半安定性の条件は

$$\begin{cases} i_1 \neq 0 & i\zeta_I < 0 \text{ のとき} \\ j_1 \neq 0 & i\zeta_I > 0 \text{ のとき} \\ \text{常に半安定} & \zeta_I = 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{1.7}$$

となることが分る．特に, 幾何学的不変式論における商は, ζ_I を正の定数倍してもかわらない．(Riemann 計量が正の定数倍されるだけである.)

そこで hyper-Kähler 商

$$\mu^{-1}(\zeta)/G = \mu_{\mathbb{C}}^{-1}(\zeta_{\mathbb{C}}) /\!\!/_{\zeta_I} G^{\mathbb{C}}$$

を考えたい．まず $\zeta_I = 0$ のときを考えよう．このときは, $/\!\!/$ は, affine 多様体の幾何学的商に他ならない．すなわち, 構造環が不変式の全体になる．今の場合, 不変式は 2×2 行列

$$j_1 i_1 \in \mathrm{End}(W_1)$$

の各成分である．特に, hyper-Kähler 商は 2×2 行列の全体のなすアファイン空間の中に埋め込める．像が何かを考えよう．この行列を A とおくと

$$A^2 = j_1 i_1 j_1 i_1 = \zeta_{\mathbb{C}} j_1 i_1 = \zeta_{\mathbb{C}} A$$

を満たす．A はたかだか階数 1 だから固有値 0 を持つが, もう一つの固有値は $\zeta_{\mathbb{C}}$ でなければいけないことが分った．もう少し考えると hyper-Kähler 商は

固有値が 0 と $\zeta_{\mathbb{C}}$ である 2×2 行列の全体

であることが分る．$\zeta_{\mathbb{C}} \neq 0$ であれば一つの共役類であり, $\zeta_{\mathbb{C}} = 0$ であれば, 冪零行列の全体である．前者の場合には, 幾何学的不変式論の商は集合論的な商に一致することも容易にチェックできる．

次に $i\zeta_I > 0$ のときを考える．$\zeta_{\mathbb{C}} \neq 0$ であれば, 半安定性の条件は自動的に成り立つ．このときは hyper-Kähler 商は $\zeta_I = 0$ のものと同じ, つまり固有値が 0 と $\zeta_{\mathbb{C}}$ である 2×2 行列の全体になる．$\zeta_{\mathbb{C}} = 0$ としよう．この場合は, 幾何学的不変式論の商は集合論的な商に一致することがチェックできる．上と同じように行列 A を定める．また $j_1 \neq 0$ であるから $\operatorname{Im} j_1$ は W_1 の中の一次元部分空間を定める．さらに $A(\operatorname{Im} j_1) = 0$, $\operatorname{Im} A \subset \operatorname{Im} j_1$ である．よって A は線形写像 $W_1/\operatorname{Im} j_1 \to \operatorname{Im} j_1$ と思える．ここで

$$\{(S, A) \mid S \text{ は } W_1 \text{ の中の一次元部分空間}, A \in \operatorname{Hom}(W_1/S, S)\}$$

は, 一次元射影空間 $\mathbb{P}^1$ の余接束 $T^*\mathbb{P}^1$ に等しいことに注意すると

$$\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0) /\!\!/_{\zeta_I} G^{\mathbb{C}} \to T^*\mathbb{P}^1$$

が得られることになる．今の場合これが双正則写像であることを見るのも容易である．

$i\zeta_I > 0$ のときも同様で, やはり $T^*\mathbb{P}^1$ がでてくることが分る．

2. 箙多様体 (quiver variety) の定義

有限グラフ (I, E) を考える．I は頂点の集合であり, E は辺の集合, すなわち $E \to I \times I/\mathfrak{S}_2$ という写像が与えられた有限集合である．ただし, $\mathfrak{S}_2$ は二次の対称群で $I \times I$ に成分の入れ変えで作用する．**quiver** Q は, 有限グラフの辺に向きを入れたものである．すなわち (向きのついた) 辺の集合 Ω であって, 辺の始点と終点を対応させる写像 $\mathrm{out}\colon \Omega \to I$, $\mathrm{in}\colon \Omega \to I$ が与えられているもののことである．すなわち, 有限グラフの辺に向きを入れたものに他ならない．(図 1 参照)

さらに Ω の逆の向きの全体を $\overline{\Omega}$ とする．すなわち, 集合としては $\Omega = \overline{\Omega}$ であって, 写像 out と in がいれかえられたもののことである．$\Omega \sqcup \overline{\Omega} = H$ とおく．辺, すなわち各 E の元に対し, 向きが二通りあるので, H の元は, ちょうど二つ対応する．

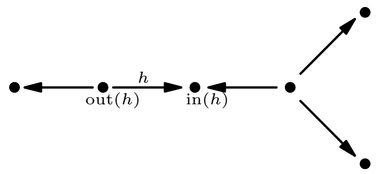

図 1. quiver の例

各頂点 $k \in I$ に対して二つの内積つき $\mathbb{C}$-ベクトル空間 V_k, W_k が与えられたとする．このとき

$$\mathbf{M} \overset{\text{def.}}{=} \left(\bigoplus_{h\in H} \operatorname{Hom}(V_{\operatorname{out}(h)}, V_{\operatorname{in}(h)})\right) \oplus \left(\bigoplus_{k\in I} \operatorname{Hom}(W_k, V_k) \oplus \operatorname{Hom}(V_k, W_k)\right) \tag{2.1}$$

とおく．

$$\mathbf{E} = \left(\bigoplus_{h\in \Omega} \operatorname{Hom}(V_{\operatorname{out}(h)}, V_{\operatorname{in}(h)})\right) \oplus \left(\bigoplus_{k\in I} \operatorname{Hom}(W_k, V_k)\right)$$

とおくと, $\mathbf{M} = \mathbf{E} \oplus \mathbf{E}^*$ となっている．V_k, W_k の内積から自然に誘導される内積を $\mathbf{M}$, $\mathbf{E}$ に入れ, これを (線形な)Riemann 多様体とみなす．$\mathbf{M}$ は複素線形空間であるから, 自然に (線形な) 複素多様体と思える．さらに, $J\colon \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ を

$$J(a,b) = (-b^\dagger, a^\dagger), \qquad a \in \mathbf{E}, b \in \mathbf{E}^*$$

で定義する．$a^\dagger$, $b^\dagger$ は, a, b の Hermitian adjoint であり, したがって $b^\dagger \in \mathbf{E}$, $a^\dagger \in \mathbf{E}^*$ である．$J^2 = -1$ であり, 複素線形空間として i を掛ける写像を I とすると, $IJ = -JI$ が成り立つ．よって $K = IJ$ と定義して, $\mathbf{M}$ は四元数体上の線形空間であり, 特に hyper-Kähler 多様体の構造を持つ．

$$G = \prod_{k\in I} \mathrm{U}(V_k)$$

とおく．これは $\mathbf{M}$ に自然に作用し, その作用は内積を保ち, 四元数体上線形である．よって hyper-Kähler 多様体の構造を保つ作用である．

$\mathbf{M}$ の成分を B_h, i_k, j_k であらわす．ただし, B_h は $h \in H$ に対し, $\operatorname{Hom}(V_{\operatorname{out}(h)}, V_{\operatorname{in}(h)})$ 成分であり, $i_k \in \operatorname{Hom}(W_k, V_k)$, $j_k \in \operatorname{Hom}(V_k, W_k)$ である．$\mathbf{M}$ の元をまとめて (B, i, j) で表わす．また, $h \in H$ に対して, h の向きを逆にしたものを $\overline{h}$ であらわす．

hyper-Kähler 運動量写像は次で与えられる．

$$\begin{aligned} \mu_I(B,i,j) &= \frac{i}{2}\left(\sum_{h\in H} B_h B_h^\dagger - B_{\overline{h}}^\dagger B_{\overline{h}} + i_k i_k^\dagger - j_k^\dagger j_k\right)_{k\in I}, \\ \mu_{\mathbb{C}}(B,i,j) &= \left(\sum_{h\in H:\operatorname{in}(h)=k} \varepsilon(h) B_h B_{\overline{h}} + i_k j_k\right)_{k\in I}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

ただし $\varepsilon(h)$ は $h \in \Omega$ のとき 1, $h \in \overline{\Omega}$ のとき -1 で定義される関数である. さらに $\mathfrak{g} = \bigoplus_{k \in I} \mathfrak{u}(V_k)$ とその双対を内積によって同一視した.

$\zeta \in (i\mathbb{R}^3)^I$ とし, $\zeta^{(k)} \in i\mathbb{R}^3$ をその $k \in I$ 成分とする. ζ に対して

$$\zeta^{(k)} \operatorname{id}_{V_k}$$

という $\mathfrak{g}$ の (中心の) 元を対応させる. 簡単のため, この元も ζ で表わす. そこで hyper-Kähler 商 $\mu^{-1}(\zeta)/G$ を考え,

$$\mathfrak{M}_\zeta \equiv \mathfrak{M}_\zeta(V, W)$$

であらわす. これを**箙多様体**とよぶ. ただし, 次元を強調したいときに V, W を書く. さらに,

$$\mathfrak{M}_\zeta^{\mathrm{reg}} \equiv \mathfrak{M}_\zeta^{\mathrm{reg}}(V, W)$$

で $\mathfrak{M}_\zeta$ の中で stabilizer が自明な軌道の全体を表わす. これは, $\mathfrak{M}_\zeta$ の中で (一般には空かもしれない) 開集合である. 前節では stabilizer が有限群になる集合を考えたが, 今の状況では stabilizer は常に連結になるので, 有限群であることと自明であることは同値になる. (命題 2.3 の証明を参照.) 自明な軌道の全体であるから, これは hyper-Kähler 多様体になる. 一般論により

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{M}_\zeta^{\mathrm{reg}} = 4 \sum_k \dim_{\mathbb{C}} V_k \left(\dim_{\mathbb{C}} W_k - \dim_{\mathbb{C}} V_k\right) + 2 \sum_{h \in H} \dim_{\mathbb{C}} V_{\mathrm{out}(h)} \dim_{\mathbb{C}} V_{\mathrm{in}(h)}$$

となる. ただし, 一般には右辺が非負であったとしても $\mathfrak{M}_\zeta^{\mathrm{reg}} = \emptyset$ となることはありえる. [2]

次が成立する.

命題 2.3. $\mathbb{R}^I$ の中のある高々有限個の余次元 1 の部分空間 $D_1, \dots, D_n$ が存在して, $\mathfrak{M}_\zeta \setminus \mathfrak{M}_\zeta^{\mathrm{reg}} \neq \emptyset$ であれば,

$$\zeta \in \bigcup \mathbb{R}^3 \otimes D_i$$

が成立する. 特に, パラメータ ζ をこの超平面の和の外に取れば $\mathfrak{M}_\zeta = \mathfrak{M}_\zeta^{\mathrm{reg}}$ が成立し, 特に $\mathfrak{M}_\zeta$ は (空集合でないと仮定すれば) 完備な Riemann 計量を持つ hyper-Kähler 多様体になる.

証明. $[B, i, j] \in \mathfrak{M}_\zeta \setminus \mathfrak{M}_\zeta^{\mathrm{reg}}$ とせよ. stabilizer が非自明であるから

$$g_{\mathrm{in}(h)} B_h g_{\mathrm{out}(h)}^{-1} = B_h, \quad g_k i_k = i_k, \quad j_k g_k^{-1} = j_k$$

[2]始点と終点が一致するような辺が無いときには, $\mathfrak{M}_\zeta^{\mathrm{reg}} \neq \emptyset$ となるのは, 対応する Kac-Moody Lie 環のある既約可積分表現のあるウェイト空間が 0 でないという条件で表わされる.

となる $g = (g_k)_{k\in I} \in G$ で単位元でないものが存在する．g_k の 1 でない固有空間の和を S_k とし, その直交補空間を $S_k^\perp$ とおく．仮定からベクトル $(\dim S_k)_{k\in I} \in \mathbb{R}^I$ は 0 でない．上の式から

$$B_h(S_{\mathrm{out}(h)}) \subset S_{\mathrm{in}(h)}, \quad i_k(W_k) \subset S_k^\perp, \quad j_k(S_k) = 0$$

が成り立つ．すると

$$\mathbb{R}^3 \ni \sum_k \zeta^{(k)} \dim S_k = \mathrm{tr}_{S_k}\left(\mu(B,i,j)|_{S_k}\right) = 0$$

となる．ただし, 最後の等号は hyper-Kähler 運動量写像の形と trace の性質 $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ から従う．したがって ζ は $(\dim S_k)_{k\in I}$ を法ベクトルとする超平面の中に含まれている．また次元のとり方は高々有限個しかない．[3] □

次が成り立つことが知られている．証明は易しくない[4].

定理 2.4 (Crawley-Boevey[1])**.** $\mathfrak{M}_\zeta$ は連結である.

3. 幾何学的不変式論における商としての記述

一般論を今の場合に適用すると (半) 安定性は具体的に次のように書けることが分かる．([4] 参照)

定義 3.1. $(B,i,j) \in \mathbf{M}$ が ζ_I**-半安定**であるとは, 次の条件が成り立つときを言う: V_k の線型部分空間の集まり $(S_k)_{k\in I}$ であって,

- $S_k \subset \operatorname{Ker} j_k$ がすべての k について成り立つ
- $B_h(S_{\mathrm{out}(h)}) \subset S_{\mathrm{in}(h)}$ がすべての h について成り立つ

という条件をみたすものに対して, 不等式

$$\sum_k i\zeta_I^{(k)} \dim S_k \le 0$$

が成り立つ．また, V_k の線型部分空間の集まり $(T_k)_{k\in I}$ であって,

- $T_k \supset \operatorname{Im} i_k$ がすべての k について成り立つ
- $B_h(T_{\mathrm{out}(h)}) \subset T_{\mathrm{in}(h)}$ がすべての h について成り立つ

という条件をみたすものに対して, 不等式

$$\sum_k i\zeta_I^{(k)} \dim T_k \le \sum_k i\zeta_I^{(k)} \dim V_k$$

が成り立つ.

[3] 有限グラフが ADE 型のときは, この超平面がルートの定めるものであることが容易にチェックできる.

[4] [9] にあった証明にはギャップがある

さらに上の不等式において, 等号成立は $S_k = 0$, $T_k = V_k$ がすべての k について成り立つときに限るとき, ζ_I **-安定**であるという.

先に述べた定理により

$$\mathfrak{M}_\zeta \cong \mu_{\mathbb{C}}^{-1}(\zeta_{\mathbb{C}})/\!\!/_{\zeta_I} G^{\mathbb{C}}$$

$$\mathfrak{M}_\zeta^{\mathrm{reg}} \cong \{(B,i,j) \in \mu_{\mathbb{C}}^{-1}(\zeta) \mid \zeta_I\text{-安定}\,\}/G^{\mathbb{C}}$$

が成り立つ. 上の式の右辺は, ζ_I-半安定な点の全体を同値関係 $\sim$ で割った商空間である.

特に $\zeta_I = 0$ のときを考えよう. このとき半安定性はすべての点について成立する. 実際, この場合には $/\!\!/_{\zeta_I}$ はアファイン多様体の幾何学的商に他ならない. すなわち, $\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(\zeta_{\mathbb{C}})/\!\!/_{\zeta_I} G^{\mathbb{C}}$ の構造環は, $\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(\zeta_{\mathbb{C}})$ の構造環の $G^{\mathbb{C}}$ 不変な部分環である. また集合としては, $\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(\zeta_{\mathbb{C}})/\!\!/_{\zeta_I} G^{\mathbb{C}}$ は, $\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(\zeta_{\mathbb{C}})$ の中の**閉な** $G^{\mathbb{C}}$ 軌道の全体である.

例 3.2. ただ一つの頂点と辺が一切無いグラフを考える. (Dynkin の A_1 型のグラフ) 頂点を 1 とする. ベクトル空間を二つ V_1, W_1 と取る. $\mathbf{M} = \mathrm{Hom}(W_1, V_1) \oplus \mathrm{Hom}(V_1, W_1)$ であり, 前の成分を i_1, 後ろの成分を j_1 で表わす. (2.2) の hyper-Kähler 運動量写像は, (1.6) のものと一致する. 上の ζ_I-安定性は, (1.7) のものと一致する. さらに, 命題 2.3 にある超平面は $\zeta = 0$ で与えられる.

例 1.5 と同様の考察をすると,

$$\mathfrak{M}_\zeta = \begin{cases} T^*\,\mathrm{Gr}(V \subset W) & \zeta_{\mathbb{C}} = 0,\ \zeta_I \neq 0 \text{ のとき} \\ \{gDg^{-1} \mid g \in \mathrm{GL}(W)\} & \zeta_{\mathbb{C}} \neq 0 \text{ のとき} \\ \{A \in \mathrm{End}(W) \mid A^2 = 0, \mathrm{rank}\, A \le \dim V\} & \zeta = 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{3.3}$$

となることが容易にチェックできる. ただし, $\mathrm{Gr}(V \subset W)$ は W の中の次元が V と同じ部分空間全体のなすグラスマン多様体であり, D は $\zeta_{\mathbb{C}}$ が $\dim V$ 個, 0 が $(\dim W - \dim V)$ 個並んだ対角行列である. また, $\dim W < \dim V$ のときには $\zeta \neq 0$ のときは $\mathfrak{M}_\zeta = \emptyset$ となる.

また,

$$\mathfrak{M}_\zeta^{\mathrm{reg}} = \begin{cases} \mathfrak{M}_\zeta & \zeta \neq 0 \text{ のとき} \\ \{A \in \mathrm{End}(W) \mid A^2 = 0, \mathrm{rank}\, A = \dim V\} & \zeta = 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{3.4}$$

となることも容易に確かめられる. 特に, $\dim V > [\dim W/2]$ のときには $\mathfrak{M}_0^{\mathrm{reg}} = \emptyset$ となる.

命題 2.3 を思い出そう. $\mathfrak{M}_\zeta \setminus \mathfrak{M}_\zeta^{\mathrm{reg}}$ は安定でない半安定な点に対応する. 幾何学的不変式論の一般的な状況でも, polarization を ample cone の中で動かしたときに, 商がどのように変わるかを調べることはよく研究されている. 上と同様に安定でない半安定な点が現れるような polarization が有限個の超平面を定めて, その補集合の各連結成分 (すなわち chamber=部屋) 内

で polarization を動かすぶんには安定性の条件がすべて同値になる．そして超平面を越すときにモジュライ空間が変わってくる．

上の結果では, 一般的な状況との間には次のような顕著な違いがあることに注意しよう．

- polarization のパラメータと複素構造の変形のパラメータが同時に (対称性を保たれながら) 取り扱われている[5].
- $\mathfrak{M}_\zeta \setminus \mathfrak{M}_\zeta^{\mathrm{reg}} \neq \emptyset$ となる特別なパラメータの集合が実余次元 3 の集合である．(特に補集合は単連結になる.)

定義 3.5. ベクトル空間 V, W を固定する．$\mathfrak{M}_\zeta = \mathfrak{M}_\zeta^{\mathrm{reg}}$ が成り立つとき, パラメータ ζ は generic であるという．(一般には, ベクトル空間を変えれば, genericity は変わる可能性がある.)

補題 3.6. $(0, \zeta_{\mathbb{C}}) \in (i\mathbb{R} \oplus \mathbb{C})^I = (i\mathbb{R}^3)^I$ が generic であると仮定する．このとき $\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(\zeta_{\mathbb{C}})$ のすべての点の $G^{\mathbb{C}}$ 軌道は閉である．さらに任意の ζ_I にたいして, すべての点が ζ_I-安定になる．

証明. 直接証明も可能であるが, 上で述べた ζ_I-安定性の具体的な記述を認めることにして証明する．

具体的な記述により, $\zeta_I = 0$ のとき ζ_I-半安定性はすべての点について成立する．一般論によれば ζ_I-安定であることは, ζ_I-半安定な集合の中で閉軌道を持ち, stabilizer が有限であると定義される．よって $\zeta_I = 0$ のときに $\mathfrak{M}_\zeta = \mathfrak{M}_\zeta^{\mathrm{reg}}$ となるということは, $\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(\zeta_{\mathbb{C}})$ のすべての点の $G^{\mathbb{C}}$ 軌道は閉である, ということを意味する．

また, 安定性の具体的な記述に戻ると, $\zeta_I = 0$ のときに (B, i, j) が ζ_I-安定であるということは, V_k の線型部分空間の集まり $(S_k)_{k \in I}$ であって,

- $S_k \subset \operatorname{Ker} j_k$ がすべての k について成り立つ
- $B_h(S_{\mathrm{out}(h)}) \subset S_{\mathrm{in}(h)}$ がすべての h について成り立つ

という条件をみたすものは, $S_k = 0$ に限り, V_k の線型部分空間の集まり $(T_k)_{k \in I}$ であって,

- $T_k \supset \operatorname{Im} i_k$ がすべての k について成り立つ
- $B_h(T_{\mathrm{out}(h)}) \subset T_{\mathrm{in}(h)}$ がすべての h について成り立つ

という条件をみたすものは, $T_k = V_k$ に限るということを意味する．特に, (B, i, j) は他の任意の ζ_I についても ζ_I-安定になる． □

定理 3.7. ζ, ζ' が二つの generic なパラメータであるとする．このとき対応する hyper-Kähler 商 $\mathfrak{M}_\zeta$ と $\mathfrak{M}_{\zeta'}$ は, ともに空集合であるか C^∞ 級微分同相である．

系 3.8. $\mathfrak{M}_\zeta$ のホモロジー群は (空集合でなければ) 中間次元よりも上では消える:

$$H_k(\mathfrak{M}_\zeta, \mathbb{Z}) = 0 \quad (k > \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{M}_\zeta)$$

---

[5] hyper-Kähler 多様体では, ミラー対称性が ‘自明’ に成立している．

実際, $(0,\zeta_{\mathbb{C}})$ が generic になるように $\zeta_{\mathbb{C}}$ を取ると $\zeta_I=0$ のときは $\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(\zeta_{\mathbb{C}})/\!\!/_{\zeta_I}G^{\mathbb{C}}$ がアファイン多様体であったことから, 中間次元よりも上の次数のホモロジー群は消える. よって定理 3.7 から系が従う.

定理 3.7 の証明. 証明のキーは, 箙多様体の定義の中に隠された対称性, すなわち純虚数の空間 $\mathbb{R}I\oplus\mathbb{R}J\oplus\mathbb{R}K=\mathbb{R}^3$ に働く SO(3) の作用である.

$$\zeta=(\zeta_I,\zeta_J,\zeta_K),\qquad \zeta'=(\zeta_I',\zeta_J',\zeta_K')$$

とする. このとき上の SO(3) の作用によって箙多様体の C^∞ 級多様体としての構造が変わらないことに注意しよう. 実際, hyper-Kähler 構造 I, J, K がこの作用で

$$a_{11}I+a_{12}J+a_{13}K,\quad a_{21}I+a_{22}J+a_{23}K,\quad a_{31}I+a_{32}J+a_{33}K,\quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\in\mathrm{SO}(3)$$

と変えられるだけで, それ以外は何も変わっていないのである. 有限個の余次元 3 の部分空間の和の外では, パラメータは generic であることから (命題 2.3), この変換によってパラメータを動かして, $(0,\zeta_J,\zeta_K)$ は generic であると仮定して一般性を失わない. すると補題 3.6 によって,

$$\mathfrak{M}_{(\zeta_I,\zeta_J,\zeta_K)},\quad \mathfrak{M}_{(0,\zeta_J,\zeta_K)},\quad \mathfrak{M}_{(\zeta_I',\zeta_J,\zeta_K)},$$

は, 複素構造 I について複素多様体としては双正則同値になる. 特に, これらはすべて微分同相である. 同じ議論を複素構造 I を J,K に取り替えて繰り返せば, 結論が従う. $\square$

4. Hilbert 概型と McKay 対応

頂点が一つで, その点をその点と結ぶ辺がある有限グラフを考えよう. (図 2)

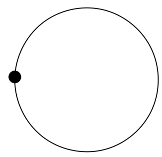

図 2

対応する箙多様体は, ベクトル空間 V, W に対して

$$\mathfrak{M}_\zeta=\left\{(B_1,B_2,i,j)\;\middle|\;\begin{array}{l}\frac{\sqrt{-1}}{2}\Big([B_1,B_1^\dagger]+[B_2,B_2^\dagger]+ii^\dagger-j^\dagger j\Big)=\zeta_I\\ [B_1,B_2]+ij=\zeta_{\mathbb{C}}\end{array}\right\}\Big/\,\mathrm{U}(V)$$

で定義される. ただし, B_1, $B_2\in\mathrm{End}(V)$, $i\in\mathrm{Hom}(W,V)$, $j\in\mathrm{Hom}(V,W)$ である. 幾何学的不変式論による記述も今までと同様である. さらに, 次のことが知られている.

定理 4.1. (1) $\sqrt{-1}\zeta_I < 0$, $\zeta_{\mathbb{C}} = 0$ と仮定する. このとき $\mathfrak{M}_\zeta$ は, $\mathbb{P}^2$ 上の torsion-free 連接層の, 無限直線 ℓ_∞ での枠付きのモジュライ空間と複素多様体として同型である:

$$\mathfrak{M}_\zeta \cong \left\{ (E,\Phi) \;\middle|\; \begin{array}{l} E \text{ は, 階数が } r = \dim W,\ c_2(E) \\ \text{が } \dim V \text{ である torsion free の連} \\ \text{接層であり, 無限直線 } \ell_\infty \text{ の近傍で} \\ \text{局所自明である. } \Phi : E|_{\ell_\infty} \cong \mathcal{O}_{\ell_\infty}^{\oplus r} \\ : \text{ は, 無限直線での枠} \end{array} \right\} \Big/ \text{同型}$$

(2) $\zeta = 0$ のとき, $\mathfrak{M}_\zeta^{\mathrm{reg}} = \mathfrak{M}_0^{\mathrm{reg}}$ は S^4 上の反自己双対接続の, 無限遠点での枠付きモジュライ空間と hyper-Kähler 多様体として同型である. 複素多様体としては, 上のモジュライ空間のうち, E が局所自明なものからなる開集合に等しい. また, $\mathfrak{M}_0$ は, その Uhlenbeck の (部分) コンパクト化と位相空間として同相である. ここで階数と c_2 は上と同様.

(1) の証明は [10] 参照. (2) は, [2] を参照.

特に $\dim W = 1$ のときは, (1) は, $\mathbb{C}^2$ 上の点の Hilbert 概型

$$(\mathbb{C}^2)^{[n]} = \{ I \subset \mathbb{C}[z_1, z_2] \mid I \text{ はイデアルで}, \dim \mathbb{C}[z_1,z_2]/I = n \}$$

になり, (2) は $\mathfrak{M}_0^{\mathrm{reg}}$ は空集合で, $\mathfrak{M}_0$ は $\mathbb{C}^2$ の対称積 $S^n(\mathbb{C}^2)$ になる ($n = \dim V$). これを見るのは, 上の定理よりもずっと容易で, まず (1) では, $j = 0$ となることを証明したのち ([10, 2.7]),

$$I = \{ f(z_1,z_2) \in \mathbb{C}[z_1,z_2] \mid f(B_1,B_2) = 0 \}$$

でイデアルを定義したときに, Hilbert 概型の点を定めることをチェックすればよい. 逆に, Hilbert 概型の点 $I \subset \mathbb{C}[z_1,z_2]$ が与えられると,

$$V = \mathbb{C}[z_1,z_2]/I$$

とおいて, B_1, B_2 を z_1, z_2 を掛ける写像が誘導する V の線型写像, $i\colon \mathbb{C} \to V$ を $i(1) = 1 \pmod{I}$ で定義される線型写像, とおけばよい.

次に (2) は, $i = j = 0$ となることをみたのち ([10, 2.9]), B_1, B_2 を同時三角化して,

$$B_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} \mu_1 & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mu_n \end{pmatrix}.$$

と表わし, $((\lambda_1,\mu_1),\dots,(\lambda_n,\mu_n)) \pmod{\mathfrak{S}_n}$ で対称積の点を定めればよい.

さらに Γ を $\mathrm{SU}(2)$ の非自明な有限部分群とする. Γ は $\mathbb{P}^2$, S^4 に作用するので, 枠付きモジュライ空間にも作用が lift される. ただし, $\mathcal{O}_{\ell_\infty}^{\oplus r}$ への作用は Γ の r 次元の表現から来るもの

として定めておく．このとき Γ-同変な層, あるいは半自己双対接続の枠付きモジュライ空間を考える．箙多様体としての記述が可能で, 結果として, V, W が Γ の表現であり,

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} : V \to Q \otimes V, \quad i\colon W \to V, \quad j\colon V \to W$$

のすべてが Γ-同変な線形写像であることが条件となる．ただし, Q は Γ の SU(2) への埋め込みから決まる 2 次元表現である．

(V, W の Γ の表現としての構造を止めたときに,) McKay 対応を用いて Γ-同変な層, 接続の枠付きモジュライ空間が箙多様体の例として記述されることを見よう．Γ の既約表現 (の同型類) を $\rho_0, \dots, \rho_n$ とする．ただし, ρ_0 は自明な 1 次元表現とする．各既約表現に頂点を対応させることにする．さらに

$$\rho_k \otimes Q = \bigoplus_l \rho_l^{\oplus a_{kl}}$$

とテンソル積を分解して, 頂点 l から k へ向きつきの辺を a_{kl} 本引く．このとき Q が自己双対 $Q^* \cong Q$ であることから, $a_{kl} = a_{lk}$ であり, つまり辺に向きのない有限グラフから §2 のルールに従って, 各辺に対して二つの向きを入れてできるグラフになっている．辺の全体 H を半分に分け, $H = \Omega \sqcup \overline{\Omega}$ と分解しておく．(箙多様体は, 本質的に Ω の取り方に依存しないことがわかる.) このとき McKay 対応により, 最初の有限グラフはアファイン Dynkin 図式であることが知られている．

さて

$$V = \bigoplus V_k \otimes \rho_k, \quad W = \bigoplus W_k \otimes \rho_k$$

と既約分解しよう．このとき i, j が Γ-同変であることから,

$$i_k\colon W_k \to V_k, \quad j_k\colon V_k \to W_k$$

という線形写像が定められる．また, $\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$ は, 各 $h \in H$ に対し線形写像

$$B_h\colon V_{\mathrm{out}(h)} \to V_{\mathrm{in}(h)}$$

を定める．このようにしてアファイン Dynkin 図式に対応した箙多様体の元 $[B, i, j] \in \mathfrak{M}$ の元が定まる．逆に, そのような元は Γ-同変な対象を与える．ただし, もともとの図 2 に対応する箙多様体ではパラメータが $\mathbb{R}^3$ を動いていたのに対し, アファイン Dynkin 図式にすると $(\mathbb{R}^3)^I$ (I は頂点の集合) に増えていることに注意しよう．

特に, W を 1 次元の自明な表現, V を Γ の正規表現として取ると, Kronheimer[5] の研究した ALE 空間になる．複素多様体としては, $\mathfrak{M}_\zeta$ はパラメータ ζ に応じて, 単純特異点 $\mathbb{C}^2/\Gamma$ の (半普遍) 変形や, その同時特異点解消を与える．この研究が, すべての出発点であった．$\Gamma = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

のときには, 本質的に例 1.5 に同じである. (A_1 型のアファインでない Dynkin 図式であったが...)

また, Hilbert 概型との関係に注意すれば, パラメータが $\zeta_{\mathbb{C}}^{(k)} = 0$, $\zeta_I^{(k)} = \zeta_I$ (k によらない定数) で $i\zeta_I < 0$ のときには, 対応する箙多様体は

$$\{I \subset \mathbb{C}[z_1, z_2] \mid I \text{ は } \Gamma\text{-不変なイデアルで}, \mathbb{C}[z_1, z_2]/I \text{ は } \Gamma \text{ の正規表現}\}$$

となることは容易に分かる. このようにすれば箙多様体を経由しないで, Hilbert 概型を用いて $\mathbb{C}^2/\Gamma$ の特異点解消が構成できることが分かる. この事実は (Kronheimer の結果と独立に)Ginzburg-Kapranov, Ito-Nakamura によって発見された. また, 同様にして通常のアファイン平面の代わりに非可換なアファイン平面上で, 点の Hilbert 概型を考察することによって, 単純特異点の半普遍変形が自然に構成される. (Nekrasov-Schwartz[12])

もともと箙多様体は, Kronheimer-Nakajima[6] で調べた ALE 空間上の反自己双対接続のモジュライ空間を一般化したものである. この結果について一言だけ述べよう.

上に述べたように ALE 空間は, アファイン Dynkin 図式に対応する, 次元を特別に選んだ箙多様体であった. V, W を一般の Γ の表現にしたもので, さらにパラメター ζ を

$$\zeta \cdot \delta = 0$$

と取ると, 対応する箙多様体 $\mathfrak{M}_\zeta^{\mathrm{reg}}$ が反自己双対接続の枠付きモジュライ空間になる. ここで, δ は Γ の正規表現の次元を並べてできるベクトルである[6].

ここで ALE 空間の無限遠は, S^3/Γ であり, 無限遠での枠付きは接続が収束する平坦接続のことである. これは Γ の表現に対応し, それが W になる. (詳しくは原論文を参照.) また, V は L^2 条件を課した, ある 1 次元コホモロジー群に対応する.

5. 階層

定義 5.1. 部分群 $\widehat{G} \subset G$ に対して, $(\widehat{G})$ で $\widehat{G}$ の共役類を表わす. 点 $x \in \mathfrak{M}_\zeta$ の **G-軌道型が** $(\widehat{G})$ であるとは, x の代表元 (B, i, j) の stabilizer が G と共役であるときをいう.

G-軌道型が $(\widehat{G})$ の点の全体を $(\mathfrak{M}_\zeta)_{(\widehat{G})}$ で表わす.

$\mathfrak{M}_\zeta$ は,

$$\mathfrak{M}_\zeta = \bigsqcup_{(\widehat{G})} (\mathfrak{M}_\zeta)_{(\widehat{G})}$$

と分割される. 和は, G の部分群の共役類の全体を動く. 定義から $\widehat{G} = \{e\}$ に対応する $(\mathfrak{M}_\zeta)_{(\widehat{G})}$ が $\mathfrak{M}_\zeta^{\mathrm{reg}}$ である.

このとき次は容易に分かる:

[6]アファイン Lie 環の虚ルートになる

(1) 各 $(\mathfrak{M}_\zeta)_{(\widehat{G})}$ は局所閉な部分集合である.
(2) 各 $(\mathfrak{M}_\zeta)_{(\widehat{G})}$ は hyper-Kähler 多様体である. より強く, (一般には異なるグラフに対する) 箙多様体として記述できる.

この意味で, 箙多様体は自然な階層を持つ.

例で調べてみよう. 例 3.2 のとき, $\zeta \neq 0$ であれば $\mathfrak{M}_\zeta^{\mathrm{reg}} = \mathfrak{M}^{\mathrm{reg}}$ であった. $\zeta = 0$ のときは

$$\mathfrak{M}_0 = \{A \in \mathrm{End}(W) \mid A^2 = 0, \operatorname{rank} A \leq \dim V\}$$

であったが, A の Jordan 標準形のタイプ (今の場合は rank と対応) で分割される:

$$\mathfrak{M}_0 = \bigsqcup_{0 \leq k \leq \dim V} \{A \in \mathrm{End}(W) \mid A^2 = 0, \operatorname{rank} A = k\}.$$

各 stratum $\{A \in \mathrm{End}(W) \mid A^2 = 0, \operatorname{rank} A = k\}$ は V を k 次元のベクトル空間で置き換えて定義される箙多様体である. これが上の階層であることが容易にチェックできる.

また, 前節の Hilbert 概型のときを考えてみよう. $\zeta \neq 0$ であれば stratum が一つなのは上の例と同様である. $\zeta = 0$ のときは $\mathfrak{M}_0$ は対称積 $S^n(\mathbb{C}^2)$ に等しかったが,

$$S^n(\mathbb{C}^2) = \bigsqcup_{\lambda \text{ は } n \text{ の分割}} S^n_\lambda(\mathbb{C}^2)$$

という自然な階層を持つ. ここで, $\lambda = (a_1 \geq a_2 \geq \dots)$ (非負整数の減少列で総和が n のものを n の分割という) に対し

$$S^n_\lambda(\mathbb{C}^2) = \left\{ \sum a_p[x_p] \,\middle|\, x_p \neq x_q (p \neq q) \right\}$$

である. これが上の階層であることも容易にチェックできる. 例えば, $\lambda = (n)$ に対応する stratum は, 台が一点に集中した元たち

$$\{n[x] \mid x \in \mathbb{C}^2\}$$

に等しい.

分割 λ に対し, 0 でない成分の数を $l(\lambda)$ とする. また,

$$\begin{aligned} S^n_0(\mathbb{C}^2) &= \{Z \in S^n(\mathbb{C}^2) \mid Z \text{ の重心は原点}\} \\ &= \{[(B_1, B_2, 0, 0)] \in \mathfrak{M}_0 \mid \mathrm{tr}(B_1) = \mathrm{tr}(B_2) = 0\} \end{aligned}$$

とする. すると, 点 $Z = \sum a_p[x_p] \in S^n_\lambda(\mathbb{C}^2)$ の $S^n(\mathbb{C}^2)$ における近傍は,

$$\mathbb{C}^{2l(\lambda)} \times S^{a_1}_0(\mathbb{C}^2) \times S^{a_2}_0(\mathbb{C}^2) \times \dots$$

の原点における近傍と複素解析空間として局所同型である. $\mathbb{C}^{2l(\lambda)}$ は, stratum $S^n_\lambda(\mathbb{C}^2)$ の接空間と同一視されるので, 残りの成分がスライスとなる.

この例を一般の箙多様体の場合に拡張することができる (正確な statement と証明は, [11] を参照).

定理 5.2. 箙多様体の各 stratum $(\mathfrak{M}_\zeta)_{(\widehat{G})}$ に対し, 別のグラフ, ベクトル空間, そしてパラメータは 0 に対応した箙多様体 $\widehat{\mathfrak{M}}_0$ が存在して, 任意の点 $x \in (\mathfrak{M}_\zeta)_{(\widehat{G})}$ の $\mathfrak{M}_\zeta$ における近傍は, 原点 0 の $\mathbb{C}^{2N} \times \widehat{\mathfrak{M}}_0$ における近傍と複素解析空間として同型になる. ここで $N = \dim(\mathfrak{M}_\zeta)_{(\widehat{G})}$ である. さらに, stratum の集合の間に自然な対応があって, この同型は, 対応する stratum の上の正則シンプレクティック形式を保つように構成できる.

6. 同時特異点解消

$\zeta_I = 0$ のときは, $/\!\!/_{\zeta_I}$ はアファイン多様体の幾何学的商であると述べた. 一般の $\zeta = (\zeta_I, \zeta_{\mathbb{C}})$ に対して $\zeta' = (0, \zeta_{\mathbb{C}})$ と定めよう. 幾何学的不変式論による記述から複素構造 I に関する正則写像

$$\pi\colon \mathfrak{M}_\zeta \to \mathfrak{M}_{\zeta'}$$

が存在する. 実際, $\mathfrak{M}_{\zeta'}$ 上の正則関数は $\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(\zeta_{\mathbb{C}})$ 上の $G^{\mathbb{C}}$-不変な正則関数であるから, 制限によって $\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(\zeta_{\mathbb{C}})/\!\!/_{\zeta_I} G^{\mathbb{C}}$ 上の正則関数が定まる. また, その定め方と幾何学的不変式論の一般論により π が射影的であることも分かる. また, 同じ一般論により, 集合の間の写像としては次のように与えられる. $x \in \mathfrak{M}_\zeta$ に対し, その同値類の代表元の $G^{\mathbb{C}}$ 軌道を取ったとき, その $\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(\zeta_{\mathbb{C}})$ における閉包に含まれるただ一つの閉軌道が $\pi(x)$ である.

例えば Hilbert 概型と対称積の場合の例では, この写像はいわゆる Hilbert-Chow 写像 $\pi\colon (\mathbb{C}^2)^{[n]} \to S^n(\mathbb{C}^2)$ に一致する. すなわち, イデアル I に対して, その台を対応させる写像である.

定理 5.2 を精密化した次の結果が成り立つ.

補題 6.1. $\mathfrak{M}_{\zeta'}$ の stratum $(\mathfrak{M}_{\zeta'})_{(\widehat{G})}$ に対して $\widehat{\mathfrak{M}}_0$ を定理 5.2 のように取る. パラメータを $(\zeta_I, 0)$ に取り替えたものと上と同様に定義される写像を

$$\widehat{\pi}\colon \mathbb{C}^{2N} \times \widehat{\mathfrak{M}}_{(\zeta_I,0)} \to \mathbb{C}^{2N} \times \widehat{\mathfrak{M}}_0$$

とする. $\mathbb{C}^{2N}$ 成分においては恒等写像である.

任意の $x \in (\mathfrak{M}_{\zeta'})_{(\widehat{G})}$ に対して, $\pi^{-1}(x)$ の $\mathfrak{M}_\zeta$ における近傍と $\Pi^{-1}(0)$ の $\mathfrak{M}'_{(\zeta_I,0)}$ における近傍の間の同型で次の図式が可換になるものが存在する.

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{M} \supset \pi^{-1}(x) \text{ の近傍} & \xrightarrow[\cong]{} & \widehat{\pi}^{-1}(0) \text{ の近傍} \subset \mathbb{C}^{2N} \times \widehat{\mathfrak{M}}_{(\zeta_I,0)} \\
{\scriptstyle \pi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \widehat{\pi}} \\
\mathfrak{M}_0 \supset x \text{ の近傍} & \xrightarrow[\cong]{\text{定理 5.2 の同型}} & 0 \text{ の近傍} \subset \mathbb{C}^{2N} \times \widehat{\mathfrak{M}}_0
\end{array}$$

特に, $\pi^{-1}(x)$ は $\widehat{\pi}^{-1}(0)$ と同型.

例えば Hilbert-Chow 写像 $\pi\colon (\mathbb{C}^2)^{[n]} \to S^n(\mathbb{C}^2)$ の場合, $Z \in S^n_\lambda(\mathbb{C}^2)$ に対して $\pi^{-1}(Z)$ の近傍と,

$$\mathbb{C}^{2l(\lambda)} \times \pi_1^{-1}(0) \times \pi_2^{-1}(0) \times \dots$$

の近傍は同型であるが, これは自明である. ここで

$$\pi_1\colon (\mathbb{C}^2)^{[a_1]}_0 \to S^{a_1}_0(\mathbb{C}^2), \dots$$

は Hilbert-Chow 写像の重心が 0 の部分空間への制限である.

応用を与える.

定理 6.2. ζ は generic であると仮定する. このとき $\mathfrak{M}^{\mathrm{reg}}_{\zeta'} \neq \emptyset$ であれば, π は次の意味で特異点解消である.

(1) π は射影的な射である.
(2) $\mathfrak{M}_\zeta$ は特異点を持たない. (連結でないとしてもすべて等次元である.)
(3) $\pi^{-1}(\mathfrak{M}^{\mathrm{reg}}_{\zeta'})$ の上で π は同型写像である.
(4) $\dim\left(\mathfrak{M}_\zeta \setminus \pi^{-1}(\mathfrak{M}^{\mathrm{reg}}_{\zeta'})\right) < \dim\mathfrak{M}_\zeta$ が成り立つ.

証明. (1) はすでに説明した. (2) は ζ が generic であることから従う.

(3) の証明. 補題 3.6 の証明で述べたようにパラメータ $\zeta_I = 0$ に対して ζ_I-安定であれば, 他の任意のパラメータに対しても自動的に ζ_I-安定になる. したがって $\mathfrak{M}^{\mathrm{reg}}_{\zeta'} \to \mathfrak{M}_\zeta$ という自然な射が定義される. さらに, 上に述べたように $\pi(x) = y$ であるのは, x に対応する軌道の閉包に含まれるただ一つの閉軌道が y に対応するときである. もしも $y \in \mathfrak{M}^{\mathrm{reg}}_{\zeta'}$ であるとすれば, stabilizer が自明であることから, その閉軌道の次元は $\dim G$ に等しく, 最大である. よってその閉軌道が別の軌道の閉包に含まれることはありえない. よって, x に対応する軌道は同じ軌道である. これは, $\mathfrak{M}^{\mathrm{reg}}_{\zeta'} \to \mathfrak{M}_\zeta$ と π を合成すると恒等写像であることを意味する. よって π の制限は同型写像を与える.

(4) の証明. $\mathfrak{M}_\zeta$ は連結で (定理 2.4), $\dim\pi^{-1}(\mathfrak{M}^{\mathrm{reg}}_{\zeta'}) = \dim\mathfrak{M}_\zeta$ より明らか. □

注意 6.3. 上の定理において π は全射であると予想されるが, 今のところ何らかの仮定なしでは証明できない. 例えば, グラフが Dynkin 型ならば OK である.

さらに強く次が成立する.

定理 6.4. ζ は generic であると仮定する. このとき $\mathfrak{M}^{\mathrm{reg}}_{\zeta'} \neq \emptyset$ であれば, π は semi-small である. すなわち, $\mathfrak{M}_{\zeta'} = \bigsqcup(\mathfrak{M}_{\zeta'})_{(\widehat{G})}$ を前節の階層とし, $x \in (\mathfrak{M}_{\zeta'})_{(\widehat{G})}$ とするとき

(1) 写像 π は, $\pi^{-1}((\mathfrak{M}_{\zeta'})_{(\widehat{G})})$ に制限すると位相的なファイバー束である.

(2) 不等式

$$\dim_{\mathbb{C}} \pi^{-1}(x) \le \frac{1}{2}\left(\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{M}_\zeta - \dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{M}_{\zeta'})_{(\widehat{G})}\right)$$

が成り立つ.

証明. (1) は, 補題 6.1 から従う.

(2) は, 補題 6.1 と系 3.8 より

$$\dim_{\mathbb{C}} \pi^{-1}(x) = \dim_{\mathbb{C}} \widehat{\pi}^{-1}(0) \le \frac{1}{2}\dim_{\mathbb{C}} \widehat{\mathfrak{M}}_{(\zeta_I,0)} = \frac{1}{2}\left(\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{M}_\zeta - \dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{M}_{\zeta'})_{(\widehat{G})}\right)$$

となって成立する. □

References

[1] W. Crawley-Boevey, *Geometry of the moment map for representations of quivers*, to appear in Composito Math.

[2] S.K. Donaldson and P.B. Kronheimer, *The geometry of four-manifold*, Oxford Math. Monographs, Oxford Univ. Press, 1990.

[3] N.J. Hitchin, A. Karlhede, U. Lindström and M. Roček, *Hyperkähler metrics and supersymmetry*, Comm. Math. Phys. **108** (1987), 535–589.

[4] A. King, *Moduli of representations of finite dimensional algebras*, Quarterly J. of Math. **45** (1994), 515–530.

[5] P.B. Kronheimer, *The construction of ALE spaces as hyper-Kähler quotients*, J. of Diff. Geom. **29** (1989), 665–683.

[6] P.B. Kronheimer and H. Nakajima, *Yang-Mills instantons on ALE gravitational instantons*, Math. Ann. **288** (1990), 263–307.

[7] 中島 啓, 箙多様体と量子アファイン環, 数学 **52** (2000), 337–359.

[8] H. Nakajima, *Instantons on ALE spaces, quiver varieties, and Kac-Moody algebras*, Duke Math. **76** (1994), 365–416.

[9] ______, *Quiver varieties and Kac-Moody algebras*, Duke Math. **91** (1998), 515–560.

[10] ______, *Lectures on Hilbert schemes of points on surfaces*, Univ. Lect. Ser. **18**, AMS, 1999.

[11] ______, *Quiver varieties and finite dimensional representations of quantum affine algebras*, J. Amer. Math. Soc. **14** (2001), 145-238.

[12] N. Nekrasov and A. Schwarz, *Instantons on noncommutative $\mathbb{R}^4$, and $(2,0)$ superconformal six dimensional theory*, preprint, hep-th/9802068

E-mail address: nakajima@kusm.kyoto-u.ac.jp