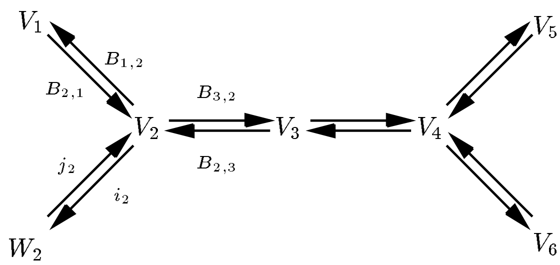
箙多様体と量子アファイン環

中島 啓 (HIRAKU NAKAJIMA)
京都大学・大学院理学研究科

1989 年に Kronheimer と筆者は, ALE 空間と呼ばれる 4 次元の多様体上の反自己双対接続のモジュライ空間を, 箙 (quiver)[1]の表現を使って記述した [26]. もともと反自己双対接続はある非線型偏微分方程式の解として定義されるが, quiver の記述では行列に関するある代数方程式の解となる (図 1). したがって, モジュライ空間を調べることはやさしくなるのではと期待していた. しかし実際には, モジュライ空間が空か否かを判定することさえも難しく, 何か根本的なアイデアが欠けているように感じられた.

そんな折り, 1990 年の京都の ICM の Lusztig の講演 [29] で, 彼の quiver を使った量子展開環の下三角部分環 $\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})$ の標準基底 (canonical basis) の構成を聞く機会があった. とは言っても, そのとき彼の講演で理解できたのは, quiver が出て来ていると言うことだけで, 表現論の内容や偏屈層などの重要な登場人物については何も知らなかった. それにもかかわらず, これを勉強しなくてはいけない, と確信した.

量子展開環は, もともとは可解格子模型の研究から Drinfeld-神保によって導入された非可換環である. また, 共形場理論の Wess-Zumino-Witten 模型と呼ばれるものとも深い関係がある. これは Riemann 面上のゲージ理論 (接続を取り扱う理論) である. 一方, ALE 空間は 4 次元の多様体であり, 同じゲージ理論ではあるものの両者の間には何の関係もないように, 当初は思われた.



$$\begin{cases} B_{2,1}B_{1,2} + B_{2,3}B_{3,2} + i_2 j_2 = -\zeta_{\mathbb{C}}^{(2)}\,\mathrm{id}_{V_2} \\ B_{2,1}B_{2,1}^\dagger - B_{1,2}^\dagger B_{1,2} + B_{2,3}B_{2,3}^\dagger - B_{3,2}^\dagger B_{3,2} + i_2 i_2^\dagger - j_2^\dagger j_2 = -\zeta_{\mathbb{R}}^{(2)}\,\mathrm{id}_{V_2} \\ \cdots\cdots \\ \text{(各頂点につき同様の方程式)} \end{cases}$$

図 1. quiver による記述の例

そして暗中模索の日々, 紆余曲折の道程を経て, 1992 年ごろからだんだんと Lusztig の仕事と箙多様体 (ALE 空間上の反自己双対接続のモジュライ空間の別名) の間の関係が見えてきた. すなわち, 箙多様体は Lusztig が扱った空間の余接束を modify したものであり, この modification が表現論では $\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})$ を左イデアルで割って最高ウェイト加群を得る操作に対応するという結果である. さらに 1994 年には, 理論物理における S-双対性との関連から私の研究が着目された. この関連に触発されて, 一般の代数曲面上の点の Hilbert 概型のコホモロジー群に Heisenberg Lie 環の表現が実現されることを示した ([35] 参照). 現在では, ALE 空間という特殊な 4 次元多様体だけでなく, より一般的な 4 次元多様体のゲージ理論, あるいは, Calabi-Yau 多様体の Gromov-Witten 理論においても同じように表現論との関係があるのではないか, と期待が見えてきている. 一方で昨年, 元々の箙多様体について量子アファイン環の有限次元表現との関連が分かった. この論説の目的はこの結果[2]を解説することである. 主結果は §9,§10 で説明する. その準備として, 構成の基本思想である合成積による代数の構成を §3 までで説明し, また Ringel-Lusztig による量子展開環の幾何学的な構成を §4,§5 で述べる. §6 で箙多様体の定義を与え, §7, §8 で (アファインでない) 量子展開環 $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$ との関連を述べる.

量子アファイン環の有限次元表現に関する結果のみに興味がある場合には, §9 のみをご覧になれば足りると思う. また, 表現論の結果に興味のない方でも §6 までは楽しめるのではないかと思う.

Supported by the Grant-in-aid for Scientific Research (No.11740011), the Ministry of Education, Japan.

[1] 以前, 東北大で年次報告書を書いたときに, 数学用語はできるだけ日本語訳をつけるように指示された. そこで英和辞典を調べたところ, quiver の日本語訳は箙であった.

[2] 原論文 [36] の他に, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ のときに限定したときの詳しい説明が [37] にある. このとき, 箙多様体は複素グラスマンの余接束になる.

1. 合成積 (CONVOLUTION)

我々は, 幾何学的な設定から代数の表現を作るために合成積を用いる. これは, 量子展開環の構成だけでなく, 他にもよく現れる重要な技術である.

$\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ 上で定義された関数 $K(x,y)$ が与えられたとき, $\mathbb{R}^n$ 上の関数 $f(y)$ に対して

$$(K * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y) f(y) dy$$

によって $\mathbb{R}^m$ 上の関数 $K * f$ を定義する. これを K と f の合成積という. (積分が発散しないためには, K もしくは f の台に条件を仮定する必要があるが, 取り敢えずはこだわらないことにする.) f を動かすと, $\mathbb{R}^n$ 上の関数の空間から $\mathbb{R}^m$ 上の関数の空間への作用素が定められていると考えることができる. $K(x,y)$ を与えるごとに作用素が定まるわけである. たとえば, $m=n=1$ で, $K(x,y)=e^{ixy}$ としたものが Fourier 変換である.

上では, $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ で考えたが, M, N を有限集合とすると, 積分を和で置き換えることにより合成積が定義できる.

$$(K * f)(x) = \sum_{y \in N} K(x,y) f(y).$$

Riemann 多様体 $M \times N$ でも全く同様に定義できる. dy を N 上の体積要素で置き換えればよい. また多様体上では, 微分形式についても合成積が定義される. K を $M \times N$ 上の k-form としたとき, N 上の p-form α に対して

$$K * \alpha = \int_N K \wedge p_N^* \alpha$$

によって, M 上の $(k+p-\dim N)$-form を定義すればよい. ここで, p_N は, 射影 $M \times N \to N$ である. M, N がコンパクトでないときは, K の台に仮定を置く必要があるが, ここではこだわらないことにする.

この設定で, もしも K が closed form であったとすると, K は N 上の closed form を M 上の closed form にうつす. また, exact form は exact form にうつす. したがって K は de Rham コホモロジーの間の線型写像

$$H^p(N, \mathbb{R}) \to H^{k+p-\dim N}(M, \mathbb{R})$$

を引き起こす. さらに, この写像は K のコホモロジー類にしか依存しない. 実際, 合成積はコホモロジー群に対して直接定義できる:

$$K * \alpha = (p_M)_* (K \cup p_N^* \alpha)$$

ただし, $\cup$ はカップ積であり, p_M は射影 $M \times N \to M$ で, $(p_M)_*$ はホモロジー群の間の push-forward 準同型を Poincaré 双対でコホモロジー群に移したものである.

しばしば, K は $M \times N$ の部分多様体 $\mathcal{K}$ の基本類の Poincaré 双対として与えられる. 例えば, $\mathcal{K}$ が M から N への C^∞ 写像 f のグラフの場合には, 合成積は f による引き戻し写像に他ならない. 一般には, $\mathcal{K}$ はグラフとは限らず, M の点 x に対し, $p_N(\mathcal{K} \cap p_M^{-1}(x))$ は, N の複数の点になる. 写像の一般化という意味で $\mathcal{K}$ は, しばしば対応 **(correspondence)** と呼ばれる.

また, 合成積の合成は, やはり合成積で表わされる. すなわち, K を $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ で定義された関数とし, L を $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ で定義された関数とするとき, $\mathbb{R}^p$ 上で定義された関数 $f(z)$ に L を合成積し, さらに K を合成積したものを考える. すなわち

$$(K * (L * f))(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^p} K(x,y) L(y,z) f(z) dy dz$$

である. 式から分かるとおり, 合成積の合成は $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ 上の関数

$$(K * L)(x,z) = \int_{\mathbb{R}^m} K(x,y) L(y,z) dy$$

による合成積に他ならない. コホモロジー群についても合成積の合成は同様の表示を持つ.

2. HECKE 環, 合成積の作る環

G を有限群, H をその部分群とし, 右側剰余類 $M = G/H$ を考える. このとき, $M \times M$ に G の diagonal な作用を考え, G 不変な関数の全体のなす空間を $\mathcal{H}(G,H)$ とおく. このとき, $\mathcal{H}(G,H)$ に積を

$$(f * g)(x,z) = \sum_{y \in G/H} f(x,y) g(y,z)$$

によって定義する. これは, 上の合成積の合成に他ならない. この積によって $\mathcal{H}(G,H)$ は (一般には非可換な) 代数となる. これを **Hecke** 環と呼ぶ. $H = \{e\}$ のときには, $\mathcal{H}(G,\{e\})$ は, G の群環に他ならない.

G, H が有限とは限らない一般的な設定で定義するためには, $\mathcal{H}(G,H)$ の元は次の性質をみたすものだけを考えることにすればよい.

- x (resp. y) を固定したとき $f(x,y) \neq 0$ となる y (resp. x) は, 高々有限個である.

例 2.1. G, B を有限体 $\mathbb{F}_q$ 上定義された Chevalley 群とその Borel 部分群とするとき, 対応する Hecke 環 $\mathcal{H}(G,B)$ は, 岩堀 [15] によって調べられた. このとき $\mathcal{B}=G/B$ は $\mathbb{F}_q$ 上定義された旗多様体 (flag variety) である. $\mathcal{B}\times\mathcal{B}$ の G 軌道は, $\mathcal{B}$ の B 軌道に一対一対応し, よく知られているように, これは, Weyl 群 W でパラメトライズされる, いわゆる Schubert 胞体たちからなる. その特性関数が $\mathcal{H}(G,B)$ の基底を定める. これを用いると, $\mathcal{H}(G,B)$ は生成元と関係式による表示を持つ. また, このとき q は有限体の元の個数であるが, 生成元と関係式による定義は, q を不定元として定義可能である. そこで, $q=1$ と置いてみると, Hecke 環は, Weyl 群 W の群環に特殊化される. この意味で, Hecke 環は Weyl 群の q 変形であると言われる.

この例やあとに出てくる関係する例については, 谷崎の論説 [42] を参照するとより理解が深まることと思う.

例 2.2. $G=\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})$ (行列式が正の有理数係数 2×2 行列の全体), $H=\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ がある. このとき, 対応する Hecke 環 $\mathcal{H}(G,H)$ は保型形式の空間に作用する. これを見るためには, 保型形式の空間を上半平面 $\mathfrak{H}$ を H で割った空間 $\mathfrak{H}/H$ 上の関数 (正確にはある直線束の切断) と思うとよい. すると, $G/H\times G/H$ の G 軌道 $G(eH,\alpha H)$ は,

$$\{(\tau_1,\tau_2)\in\mathfrak{H}/H\times\mathfrak{H}/H\mid\tau_2=\alpha\cdot\tau_1\}$$

という $\mathfrak{H}/H\times\mathfrak{H}/H$ の部分多様体を定める. ただし $\alpha\in G$ は一次分数変換で上半平面に作用する. (この部分多様体は α の取り方によらない.) (詳しくは [40] 参照.)

以上, 二つの例で言いたかったことは, 次である.

$$\boxed{\text{合成積で有用な代数が構成できる}}$$

上の例だけでは納得されない読者も多いであろうが, ページ数も限られているのでこれだけで勘弁させていただく. あとで出てくる, Hall algebra も合成積に似たやり方で代数を構成する.

言うまでもないことであるが, Hecke 環は G, H の表現論に深く結び付いている.

群のコセットの場合に限らず, 合成積により代数を作ることができる. コホモロジー環で同様の構成を考えよう. M をコンパクト多様体とする. 安直に $\mathcal{H}=H^*(M\times M,\mathbb{R})$ としてみると, これは確かに

$$\alpha*\beta=p_{13*}\left(p_{12}^*\alpha\cup p_{23}^*\beta\right)$$

と定義して積が定まっている. ただし p_{ij} は $M\times M\times M$ から第 i 成分と第 j 成分の直積への射影である. しかし, Künneth 同型と Poincaré 双対をあわせると,

$$H^*(M\times M,\mathbb{R})\cong H^*(M,\mathbb{R})\otimes H^*(M,\mathbb{R})\cong\mathrm{End}\left(H^*(M,\mathbb{R})\right)$$

と行列環と同型になってしまって, 面白い代数は出てこない. あとで出てくるのは, M がコンパクトとは限らず, 以下の条件をみたす $Z\subset M\times M$ という (閉) 部分多様体があったときに, 相対コホモロジー $\mathcal{H}=H^*(M\times M,M\times M\setminus Z,\mathbb{R})$ に合成積によって定められた代数である.

- 第一成分, 第二成分への射影の Z への制限がそれぞれ固有写像になっている.

例を与えよう.

例 2.3. G を複素単純 Lie 群とし, B をその Borel 部分群とする. $\mathcal{B}$ を旗多様体 G/B とし, M をその余接束 (cotangent bundle)

$$M=T^*\mathcal{B}=\{(gB,x)\in\mathcal{B}\times\mathfrak{g}\mid x\text{ は巾零で, }x\in\mathrm{Ad}(g)\mathfrak{b}\}$$

とする. ただし $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{b}$ は G, B の Lie 環である. このとき Z を $\mathcal{B}\times\mathcal{B}$ の G 軌道 (前の例 2.1 で見たように本質的に Schubert 胞体である) の余法束 (conormal bundle) の和とする. Z は Steinberg 多様体と呼ばれる $M\times M$ のラグランジアン部分多様体 (特異点を持つ) である. 具体的には, N を巾零元の全体として, $\pi\colon M\to N$ を自然な射影とするとき (Springer resolution),

$$Z=M\times_N M=\{(x^1,x^2)\in M\times M\mid\pi(x^1)=\pi(x^2)\}$$

となる. 特に, 上の条件をみたすことがチェックできる. このとき

$$H^{\dim Z}(M\times M,M\times M\setminus Z,\mathbb{R})\cong H_{\dim Z}(Z,\mathbb{R})$$

に合成積により環構造を入れたものは, Weyl 群 W の群環 $\mathbb{R}[W]$ と同型になることが知られている. ここで, $H_{\dim Z}(Z,\mathbb{R})$ は Borel-Moore ホモロジーと呼ばれるもので, 局所有限なチェインの作るホモロジー群である.

この例で $H_{\dim Z}(Z,\mathbb{R})$ が $\mathbb{R}[W]$ であることを見るのは, それ程自明なことではない. 例えば, 前の例 2.1 では, Schubert 胞体の特性関数が $\mathbb{R}[W]$ の元として具体的に分かるのに対し, この例では Schubert 胞体の余法束の基本類を具体的に表わす公式は知られていないのである.

では, 上の結果はどのように証明されるのであろうか? 現在までのところいくつかの証明が知られている. (おそらくは, これ以外にもあるだろう. また, 引用の仕方が正しいのか, 心許ない. 関係者の方, すいません.)

(1) よく分かる $\mathcal{B}$ への W の作用へ帰着させる. [23] による方法.
(2) Z を変形し, '易しい' 多様体に置き換えてチェックする. [10] による. ([8, 3.4] にも書いてある.)

(3) $\mathcal{B}\times\mathcal{B}$ 上の G-不変な D 加群のなすアーベル圏の Grothendieck 群 $K(D(\mathcal{B}\times\mathcal{B},G))$ に合成積で積を入れると, 例 2.1 との類似により $\mathbb{Z}[W]$ に同型となる. このとき, D 加群 M に対し, その特性サイクル (特性多様体を重複度込みで考えたもの) を対応させる写像 $K(D(\mathcal{B}\times\mathcal{B},G))\to H_{\dim Z}(Z,\mathbb{Z})$ が代数の同型であることを示す. [21, 10, 41]

(4) (詳細は [11] を参照. また [4, 27, 14] も見よ.) M 上の定数層 $\mathbb{C}_M$ を $\pi\colon M\to N$ で落としたものを $\pi_*(\mathbb{C}_M)$(N 上の構成可能層の導来圏 $D^b(N)$ の object) とする. このとき, 同型 $H_{\dim Z}(Z,\mathbb{C})\cong \operatorname{Hom}_{D^b(N)}(\pi_*(\mathbb{C}_M),\pi_*(\mathbb{C}_M))$ がある. (ここで, π が semismall であることが本質的である.) さらに $\pi_*(\mathbb{C}_M)$ を Fourier 変換すると, 右辺が $\mathbb{C}[W]$ に等しいことはチェックできる.

(3) からも分かるとおり, 例 2.1 と例 2.3 の間には, 深い関係がある. この両者の関係はあとでも出てくる.

(4) のように, 構成可能層の導来圏を用いることは合成積から作られる代数を調べるの役に立つ. あとで用いられる応用をここで説明しておこう. 以下の結果は Ginzburg による ([8, Chapter 8] 参照).

$\pi\colon M\to N$ を代数多様体の間の射影的な写像とし, M は非特異とする. $Z=M\times_N M$ とおくとき,

$$H_*(Z,\mathbb{C})\cong \operatorname{Ext}^*_{D^b(N)}(\pi_*(\mathbb{C}_M),\pi_*(\mathbb{C}_M)) \tag{2.4}$$

という代数の同型がある. ただし, $\operatorname{Ext}^k_{D^b(N)}(A,B)=\operatorname{Hom}_{D^b(N)}(A,B[k])$ であって, 上の同型は両辺の自然な次数づけを保つとは限らない. π が (4) のように semismall の場合は, 左辺の次数 $=\dim Z$ の部分が右辺の次数 $=0$ の部分に移り, それが (4) で述べた同型を導く. Beilinson-Bernstein-Deligne-Gabber の分解定理により

$$\pi_*(\mathbb{C}_M)=\bigoplus_{\phi,k} L_{\phi,k}\otimes P_\phi[k]$$

と分解する. ここで, P_ϕ は N の既役な偏屈層, すなわちある局所閉な部分多様体の既役な局所系に関する交叉コホモロジーであり, $L_{\phi,k}$ は有限次元ベクトル空間である. 同型(2.4) より

$$H_*(Z,\mathbb{C})\cong\bigoplus_{\phi,\psi,i,j,k}\operatorname{Hom}(L_{\phi,i},L_{\psi,j})\otimes\operatorname{Ext}^k_{D^b(N)}(P_\phi,P_\psi)$$

となるが, さらに, 既役な偏屈層の性質 $\operatorname{Ext}^k(P_\phi,P_\psi)=0$ $(k<0)$, $\operatorname{Ext}^0(P_\phi,P_\psi)=\mathbb{C}\delta_{\phi,\psi}\operatorname{id}$ より, Ext の次数 k が正の部分はべき零元根基 (nilradical) となり,

$$L_\phi\overset{\text{def.}}{=}\bigoplus_k L_{\phi,k}$$

が既役な $H_*(Z,\mathbb{C})$-加群で, 既役な $H_*(Z,\mathbb{C})$-加群はすべてこの形であることが従う. ちなみにこれを例 2.3 の場合に適用すると, Weyl 群の Springer 表現が得られる. これが Borho-MacPherson [4] による構成であり, Springer 表現への偏屈層を用いたアプローチは Lusztig [27] に始まる.

さらに $x\in N$ に対して $H_*(\pi^{-1}(x),\mathbb{C})$ は $H_*(Z,\mathbb{C})$-加群となるが, 上の記述より

$$H_*(\pi^{-1}(x),\mathbb{C})=\bigoplus_\phi L_\phi\otimes H^*(i_x^!P_\phi)$$

が $H_*(Z,\mathbb{C})$-加群の Grothendieck 群における等式として成立する. ただし, i_x は x の N への埋め込みであり, $H_*(Z,\mathbb{C})$ は $H^*(i_x^!P_\phi)$ に自明に作用する. このように, L_ϕ の $H_*(\pi^{-1}(x),\mathbb{C})$ 内での重複度が交叉コホモロジーの言葉で書ける.

3. 層の Grothendieck 群上の合成積, そして q 変形

§1 の定義を見れば分かるとおり, 合成積を考えるためには次の設定があれば十分である.

(1) '空間' に対してある代数的対象 (ベクトル空間, 加群等) が定まる.
(2) 射影に対して, pull-back 準同型写像が定義される.
(3) 積が定義される.
(4) 射影に対して, push-forward 準同型写像が定義される.

'空間' としては代数多様体を考えることにすると, 上のようなものの典型的な例は, 構成可能なベクトル空間の層の導来圏 ($\mathbb{C}$ 上では, Riemann-Hilbert 対応により正則ホロノミー D_X 加群の導来圏といってもよい) と, 連接 $\mathcal{O}_X$ 層の導来圏である. しかし, 以下では, その Grothendieck 群しか考えない.

単なる層でなくさらに構造を付け加えたものを考えた方が良い場合が多い. 構成可能層の場合には, 射影多様体 X は有限体 $\mathbb{F}_q$ 上定義されているとし, これをその代数閉包 $\overline{\mathbb{F}_q}$ まで係数拡大する. このとき, X 上の $\mathbb{Q}_l$-構成可能層 E を Frobenius 写像の lift 付きで考える. このような層 E に対し, Frobenius 写像の作用を代える Tate twist と呼ばれる操作がある. この操作を不定元 q を掛けることに対応させると, 上のような層のなすアーベル圏の Grothendieck 群は, $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ 加群になる.

Frobenius 写像を F としたとき, F^n の固定点は多様体の $\mathbb{F}_{q^n}$-点に他ならない. これは有限集合である. その点での E の茎への Frobenius 写像の作用の跡 (trace) を考えることにより, $X(\mathbb{F}_{q^n})$ 上の関数を与える. この操作は, Frobenius 写像の作用つき構成可能層の Grothendieck 群から $X(\mathbb{F}_{q^n})$ 上の関数への関手を定める. 特に, 層の合成積と有限集合上の関数の合成積の間に自然な準同型写像が構成される.

Frobenius 写像の作用つきの構成可能層の理論の $\mathbb{C}$ 上での対応物が斎藤盛彦の混合 Hodge 加群の理論である. 混合 Hodge 加群のなすアーベル圏の Grothendieck 群も上と同様に $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ 加群の構造を持つ.

一方, 連接 $\mathcal{O}_X$ 層の場合には, 代数群の作用がある代数多様体上で同変な層を考える. あとで出てくるのは $\mathbb{C}^*$ の作用がある場合で, このとき同変な連接 $\mathcal{O}_X$ 層の Grothendieck 群は $\mathbb{C}^*$ の表現環 $R(\mathbb{C}^*)=\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ の加群となる.

このように構成可能層でも連接層でも, パラメータ q が導入される. あとで, 合成積を用いて環を構成するときに q 変形の q に対応することになる.

また二つの構成は無関係でない. D 加群 M に対し, その特性多様体を重複度付きで考えると, D 加群の Grothendieck 群からホモロジー群への準同型が得られることを例 2.3 のあとに述べたが, 同様に混合 Hodge 加群の Grothendieck 群から余接束上の $\mathbb{C}^*$-同変連接層の Grothendieck 群への $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$-加群の準同型が得られ, 合成積の間に対応が出来る. これを §2 の例でやってみせたのが, 谷崎 [41] である. これを以下説明する.

まず, 例 2.1 においては, 有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の関数の代わりに, その代数閉包 $\overline{\mathbb{F}_q}$ 上で定義された $\mathcal{B}$ に置き換え, Frobenius 写像の作用つきの $\mathbb{Q}_l$-構成可能層の Grothendieck 群を考える. これは, q を不定元とする Hecke 環 H_q と同型になる [31]. (正確には, Frobenius 写像の固定点の茎への作用の固有値が q のべきになっているものだけを考える必要がある.) また, 複素数体 $\mathbb{C}$ 上では, $\mathcal{B}\times\mathcal{B}$ 上の G 不変な混合 Hodge 加群の Grothendieck 群 $K(MHM(\mathcal{B}\times\mathcal{B},G))$ を考えれば, 同様の構成が可能である. ([43, 第 II 部, 第 5 章] 参照)

また例 2.3 において, ホモロジー群の代わりに $G\times\mathbb{C}^*$-同変な連接 $\mathcal{O}_Z$ 層の Grothendieck 群 $K^{G\times\mathbb{C}^*}(Z)$ を考える. ただし, $\mathbb{C}^*$ は, $M=T^*\mathcal{B}$ のファイバーのスカラー倍で作用する.

例 3.1. $G\times\mathbb{C}^*$-同変な連接 $\mathcal{O}_Z$ 層の Grothendieck 群 $K^{G\times\mathbb{C}^*}(Z)$ は, affine Weyl 群 $\widehat{W}$ の群環 $\mathbb{Z}[\widehat{W}]$ の q 変形である affine Hecke 環 $\widehat{H}_q$ と同型である. より精密に次の可換図式がある:

$$\begin{tikzcd}
K(MHM(\mathcal{B}\times\mathcal{B},G)) \arrow[r, "\mathrm{gr}"] & K^{G\times\mathbb{C}^*}(Z) \arrow[r, "\mathbb{C}^*\text{ 作用を}", "\text{忘れる}"'] & K^G(Z) \arrow[r] & H_{\dim Z}(Z,\mathbb{R}) \\
H_q \arrow[u] \arrow[r] & \widehat{H}_q \arrow[u, "\cong"'] \arrow[r] & \mathbb{Z}[\widehat{W}] \arrow[u, "\cong"'] \arrow[r] & \mathbb{R}[W] \arrow[u, "\text{例 2.3}", "\cong"']
\end{tikzcd}$$

ただし, 下の矢印はすべて自然な準同型写像であり, 上の一番左の矢印 gr は, (Hodge 加群に対する) 特性サイクル写像である. また, 上の一番右の矢印は, G の作用を忘れて Chern 指標を取り, そして次数が $\dim Z$ の部分を取るものである.

左から二番目の上向き矢印の同型は, もともとの Kazhdan-Lusztig [24] と Ginzburg [8, 第 7 章] による証明は生成元の行き先を決めて, 関係式をチェックするものであり, 関係式のチェックに K 加群の局所化を用いる. gr を使えば, 部分環 H_q の関係式のチェックは自動的で, 残りの関係式は比較的容易にチェッ クできる. 左から三番目の上向き矢印の同型は [8, 7.3] のように直接証明も出来るが, 左から二番目の上向き矢印の同型からも従う.

§10 で述べる結果を一言で言うと,

上の図式のうち一番左の列を除いたものを, $\widehat{H}_q$ の代わりに量子アファイン環 (正しくは量子ループ環) に対して構成した

となる. そのとき $M=T^*\mathcal{B}$ の代わりに箙多様体を用いる. 一番左の上向き矢印に対応するものは, Ringel-Lusztig による量子展開環の下三角部分環 $\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})$ の構成であり, これが筆者の構成の動機付けとなった. しかし, $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$ 全体でないと言う点で完全な類似とは言えない. $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$ 全体の幾何学的な構成は, 未解決問題である. また, あとで述べるように Lusztig の使った空間の余接束を 'modify' しないと, 箙多様体に対応しない. うまい modification を取ることが本質的であったとも言える.

4. 箙 (quiver) とその道代数 (path algebra)

次節で述べる Ringel-Lusztig による量子展開環の下三角部分環 $\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})$ の構成および箙多様体の定義のために必要な quiver の表現の言葉について準備する.

quiver $\mathcal{Q}$ は, 頂点の有限集合 I と (向きのついた) 辺の集合 Ω であって, 辺の始点と終点を対応させる写像 $\mathrm{out}\colon\Omega\to I$, $\mathrm{in}\colon\Omega\to I$ が与えられているもののことである. すなわち, 有限グラフの辺に向きを入れたものに他ならない. (図 2 参照)

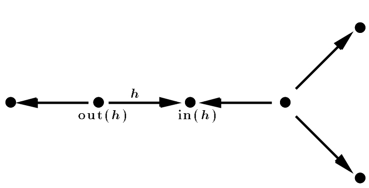


図 2. quiver の例

このとき道 **(path)** とは, 辺の有限列 $(h_1, h_2, \ldots, h_N)$ で $\mathrm{in}(h_1) = \mathrm{out}(h_2), \ldots, \mathrm{in}(h_{N-1}) = \mathrm{out}(h_N)$ が成り立つもののことを言う. N を道の長さという. さらに長さ N が 0 の道, すなわちひとつの頂点 $k \in I$ だけからなるものも道であると約束する.

$\mathbb{F}$ を体とするとき, 道代数 **(path algebra)** $\mathbb{F}\mathcal{Q}$ を道を基底とするベクトル空間に道の合成によって積を入れたものとする. もしも二つの道が合成できないとき, すなわちそれぞれの終点と始点とが一致しないときは, 積は 0 と定める. 例えば下の図 3 の定める道代数は, 一変数多項式環 $\mathbb{F}[x]$ に他ならない. 一般には, 道代数は非可換の代数になる.

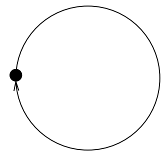


図 3. $\mathbb{F}[x]$ に対応する quiver

また $\mathfrak{J}$ を $\mathbb{F}\mathcal{Q}$ の両側イデアルとするとき, 道代数を関係式 $\mathfrak{J}$ で割った代数 $\mathbb{F}\mathcal{Q}/\mathfrak{J}$ もよく考える. 例えば, 上の例で m 回まわるループ h^m を 0 とする関係式を考えれば, 対応する代数は $\mathbb{F}[x]/x^m$ に他ならない.

quiver の表現とは, 道代数 $\mathbb{F}\mathcal{Q}$ の左加群のことを言う. 言い直せば, 各頂点 $k \in I$ に対して $\mathbb{F}$-ベクトル空間 V_k が与えられ, 各辺 $h \in \Omega$ に対して線型写像 $B_h \colon V_{\mathrm{out}(h)} \to V_{\mathrm{in}(h)}$ が与えられているもののことである. また $\mathbb{F}\mathcal{Q}/\mathfrak{J}$ の表現は, 上のような B_h に $\mathfrak{J}$ が定める条件を課したものに他ならない.

したがって, quiver の表現の同型類 (ただし次元が同じものだけを考える) の集合 (すなわち, 表現のモジュライ空間) は,

$$\bigoplus_{h\in\Omega} \mathrm{Hom}(V_{\mathrm{out}(h)}, V_{\mathrm{in}(h)}) \Big/ \prod_{k\in I} \mathrm{GL}(V_k) \tag{4.1}$$

に他ならない. ベクトル空間を $\mathbf{E}_\Omega(V)$, $\prod_{k\in I} \mathrm{GL}(V_k)$ を G_V で表わす.

表現のモジュライ空間(4.1) は, Riemann 面上の正則ベクトル束のモジュライ空間と類似点がある. 実際後者は, (無限次元の) アファイン空間を (やはり無限次元の)Lie 群で割った空間になっている.

relation の例であとの箙多様体と深く関係するものがあるので説明する. $\mathcal{Q}^\#$ を $\mathcal{Q} = (I, \Omega)$ のダブルとする. すなわち, I は変えず, Ω の辺 h にその向きを逆にしたもの $\overline{h}$ を付け加えたものである. このとき, $\mathcal{Q}^\#$ の辺 h に対し, $\varepsilon(h)$ を $h \in \Omega$ のときに 1, $h \in \overline{\Omega}$ のときに -1 と定める. そこで,

$$\sum_{\mathrm{in}(h)=k} \varepsilon(h) h \overline{h} = 0, \qquad (k \in I)$$

で生成される両側イデアルを考え $\mathfrak{J}$ とおく. $\mathbb{F}\mathcal{Q}^\#/\mathfrak{J}$ が preprojective algebra と呼ばれるものである. その表現の同型類は,

$$\left\{ (B_h) \in \mathbf{E}_{\Omega\cup\overline{\Omega}}(V) \;\middle|\; \sum_{\mathrm{in}(h)=k} \varepsilon(h) B_h B_{\overline{h}} = 0 \right\} \Big/ G_V \tag{4.2}$$

で与えられる. $\mathbf{E}_{\Omega\cup\overline{\Omega}}(V) = \mathbf{E}_\Omega(V) \oplus \mathbf{E}_{\overline{\Omega}}(V)$ は シンプレクティックベクトル空間で, $\sum \varepsilon(h) B_h B_{\overline{h}}$ は G_V の作用に関するモーメント写像である. よって上の空間は, もしも商空間が多様体の構造を持てばいわゆるシンプレクティック商と捉えることが出来る. またシンプレクティック商の一般論によれば, (4.1) の $\mathbf{E}_\Omega(V)/G_V$ が多様体になれば, その余接束 $T^*(\mathbf{E}_\Omega(V)/G_V)$ と同型になる. ところが, G_V のような代数群に関する商空間は, 一般には位相空間として Hausdorff にならない. この困難を解消するためには幾何学的不変式論が必要で, のちに述べる箙多様体もその様に定義される. その様な技術的な相違点があるにせよ, preprojective algebra の幾何学的な意味は '余接束' である.

また, (4.1) が Riemann 面の上の正則ベクトル束のモジュライ空間の類似であったように, (4.2) は, Riemann 面の上の Higgs 束のモジュライ空間 ([13]) の類似と思うことが出来る.

我々にとって大切なことは次である.

$\boxed{\text{(relation つき)quiver の表現と代数多様体上のベクトル束の間には関係がある}}$

実際, あとで quiver の表現を用いて定義する箙多様体は, ALE 空間上のベクトル束のモジュライ空間 (小林-Hitchin 対応によって反自己双対接続のモジュライ空間と同じである) と同型になり, これが筆者の研究の出発点であった. また, それ以外にも射影空間, A_n 型の旗多様体, Hirzebruch 曲面の上の層の導来圏が, ある quiver の表現の導来圏と同値であることが知られている. ([2, 3, 16, 25]) しかし, これは単なる動機付けとして上に書いておくだけに留め, これ以上は深入りしないことにして, 先に進もう.

5. Hall algebra

Ringel の構成では, quiver の表現のなすアーベル圏に関する Hall algebra と呼ばれるものを考える．ここでは [17] に従い, 設定を一般化した形で述べる．$\mathcal{A}$をアーベル圏とし, さらに任意の対象 $A, B \in \mathcal{A}$ に対して $\operatorname{Ext}^i_{\mathcal{A}}(A,B)$ は有限集合であって, 十分大きい i に対しては 0 になっているとする．例えば, quiver の $\mathbf{F}_q$ への表現を考えればよい．

このとき, A, B, $C \in \operatorname{Ob}(\mathcal{A})$ に対し, C の subobject A' で, $A' \cong A$, $C/A' \cong B$ となるものは高々有限個しかない．その数を g^C_{AB} で表わす．

$\mathcal{A}$ の Hall algebra $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ とは, $\mathcal{A}$ の object の同型類を基底に持つような $\mathbb{C}$-ベクトル空間に

$$[A] * [B] = \sum_{[C]} g^C_{AB}[C]$$

によって積を入れた代数である．0 の同型類 $[0]$ を単位元として持つ結合律を満たす代数となる．

例 2.2 との類似に注意して欲しい．$\mathfrak{H}/H$ を 2 次元格子 L のモジュライ空間 (あるいは, 複素トーラス $\mathbb{C}/L$ のモジュライ空間) と考えると,

$$\{(L,L') \in \mathfrak{H}/H \times \mathfrak{H}/H \mid L \subset L', [L:L'] = n\}$$

は, $\mathfrak{H}/H \times \mathfrak{H}/H$ の対応を定める．

また, 上の構成は有限体上 $\mathbb{F}_q$ 定義された多様体 X 上の層のアーベル圏にも適応できる．このとき $x \in X$ に対し,

$$0 \to E \to E' \to i_{x*}\mathbb{F}_q \to 0$$

(ただし i_x は $\{x\} \to X$ という埋め込み) は, 対応の典型的な例である．特に, X が曲線のとき (X が高次元のときは, 点 x の代わりに因子にする), E' から E を作る操作は, 初等変換 (elementary transform), あるいは上との類似から Hecke 対応と呼ばれる．

定理 5.1 (Ringel[38])**.** $\mathcal{Q}$ を ADE 型の Dynkin グラフに向き (勝手でよい) を入れたものとする．このとき, $\mathbb{F}$ を有限体とし, $\mathbb{F}\mathcal{Q}$ の表現のアーベル圏の Hall algebra の積を

$$[A] \circ [B] = \sqrt{\prod_{i \ge 0} \#\operatorname{Ext}^i(A,B)^{(-1)^i}}\, [A] * [B]$$

と modify したものを考える．このとき, modified Hall algebra は, Drinfeld- 神保の量子展開環 $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$ の下三角部分環 $\mathbf{U}^-_q(\mathfrak{g})$ と同型になる．ただし, $\mathfrak{g}$ は Dynkin グラフに対応した単純 Lie 環であり, パラメータ q は $\sqrt{\#\mathbb{F}}$ に特殊化される.[3]

Lusztig は, この構成を '幾何学化' した [28].[4] まず, $\mathbf{E}_\Omega(V)$ の G_V 軌道を基底とするようなベクトル空間, すなわち(4.1) 上の G_V 不変な (複素数値) 関数全体を考える代わりに, 定義体を有限体の代数閉包に取り替えて, $\mathbf{E}_\Omega(V)$ 上の Frobenius 写像の作用つき $\mathbb{Q}_l$-構成可能層で G_V-同変なもののなす圏の Grothendieck 群を考える．次に上の積 $\circ$ に対応する operation をその上に定義する．合成積を若干 modify する必要が出てくるので, ここでは詳しく述べないが, 基本的には平坦な写像に関する引き戻し逆像, 固有写像に関する押し出し順像, およびテンソル積を用いて書き与えられる．

このとき, $\mathbf{E}_\Omega(V)$ の G_V 軌道の上の定数層を 0 で外に拡張したものが, $\mathbf{U}^-_q(\mathfrak{g})$ のいわゆる PBW 基底に対応し, 交叉コホモロジーに対応するものが, 標準基底を与える．

一言注意しておく．前に述べた類似で, Dynkin グラフに向きを入れた quiver$\mathcal{Q}$ の表現のアーベル圏は, 代数曲線上のベクトル束 (あるいは連接層) のアーベル圏に対応する．Ringel の結果をあるリーマン面 (おそらくは $\mathbb{P}^1$ の鎖?) の連接層のアーベル圏 (あるいは導来圏) で再構成できるだろうか？

6. 箙多様体 (quiver variety)

箙多様体の定義をする．まず(4.1) の $\mathbf{E}_\Omega(V)$ とその双対空間の直和を考える:

$$\mathbf{E}_\Omega(V) \oplus \mathbf{E}_\Omega(V)^* = \bigoplus_{h \in \Omega} \operatorname{Hom}(V_{\mathrm{out}(h)}, V_{\mathrm{in}(h)}) \oplus \operatorname{Hom}(V_{\mathrm{in}(h)}, V_{\mathrm{out}(h)})$$

これは, E のダブル, すなわち E の辺に逆向きの辺も付け加えてできた quiver (これを $\mathcal{Q}^\#$ で表わす) に対応するベクトル空間と思える．E のダブルを H で表わす．さらに, 各頂点ごとにベクトル空間 W_k を置いて,

$$\left(\bigoplus_{h \in H} \operatorname{Hom}(V_{\mathrm{out}(h)}, V_{\mathrm{in}(h)})\right) \oplus \left(\bigoplus_{k \in I} \operatorname{Hom}(W_k, V_k) \oplus \operatorname{Hom}(V_k, W_k)\right) \tag{6.1}$$

というベクトル空間を考える．このベクトル空間を $\mathbf{M}(V,W)$ と書こう．$\mathbf{M}(V,W)$ には自然に $G_V = \prod_{k \in I} \operatorname{GL}(V_k)$ が作用する．

[3] $\#\mathbb{F}$ は通常 q で表わされる．Lusztig は, 混同を避けるために量子展開環のパラメータは v と書いている．

[4] 彼は, Dynkin グラフ以外のグラフに拡張することにも成功したのであるが, 必要な modification についてはここでは述べない．

さて, (6.1) の点の意味するところは何であろうか？ 第一の成分は, quiver H の表現であるから意味は明らかであろう. 一方, 第二成分は [26] で現れたものの, quiver の表現論で扱われたことはなかったようである. 次節以降で表現論との関連から, 第二成分の最高ウェイトベクトルとしての意味がはっきりしてくるのではあるが, ここで [26] での意味を説明しよう. 箙多様体を ALE 空間上の正則ベクトル束のモジュライ空間として見るとき, $(W_k)_{k\in I}$ は, framing, すなわち無限遠でのベクトル束の自明化に対応する. これを quiver の言葉に無理矢理に翻訳すると次のようになる. quiver $\mathcal{Q}^\#$ から一切の辺を取り除いた quiver を $\mathcal{Q}'$ とする. このとき, $\mathcal{Q}'$ の表現とは, 頂点の上にベクトル空間を置いたもの, そしてベクトル空間の間の線型写像は一切考えないものに他ならない. $\mathcal{Q}^\#$ の表現 $(V_k)_{k\in I}$, $(B_h)_{h\in H}$ に対し, B_h を忘れると, $\mathcal{Q}'$ の表現が与えられる. これは, 表現の間の関手である. (より一般に, $\mathcal{Q}^\#$ の部分グラフを考えれば, 同様の関手が定義される.) この関手を制限と呼ぼう. さて, 上の式で, $(W_k)_{k\in I}$ は, $\mathcal{Q}'$ の表現と考えることができる. すると

$$\bigoplus_{k\in I}\operatorname{Hom}(W_k,V_k)$$

は, $(W_k)_{k\in I}$ から $(V_k)_{k\in i}, (B_h)_{h\in I}$ の制限への quiver $\mathcal{Q}'$ での準同型の全体である.

$$\bigoplus_{k\in I}\operatorname{Hom}(V_k,W_k)$$

はもちろん, $(V_k)_{k\in I}, (B_h)_{h\in H}$ の制限から $(W_k)_{k\in i}$ への quiver $\mathcal{Q}'$ での準同型の全体である.

前に述べたような, quiver の表現とベクトル束の類似のもとでは, 次の対応があることは納得が行くであろう.

(1) 上の関手は, ベクトル束を部分多様体へ制限することに対応する.
(2) (6.1) の第二成分は, 部分多様体に与えられたベクトル束との間の準同型に対応する.

さて, (6.1) の各成分を B_h, i_k, j_k と書こう. このとき, 次の写像を考える.

$$\mu\colon \mathbf{M}\to\bigoplus_{k\in I}\operatorname{End}(V_k);\quad (B_h,i_k,j_k)_{h\in H,k\in I}\longmapsto\left(\sum_{h\in H:\operatorname{in}(h)=k}\varepsilon(h)B_hB_{\overline{h}}+i_kj_k\right)_{k\in I}.$$

$\mathbf{M}(V,W)$ は, その '半分'

$$\bigoplus_{h\in\Omega}\operatorname{Hom}(V_{\operatorname{out}(h)},V_{\operatorname{in}(h)})\oplus\bigoplus_{k\in I}\operatorname{Hom}(W_k,V_k) \tag{6.2}$$

の余接束と見ることができ, 特に自然なシンプレクティック形式を持つ. 上のベクトル空間を $\mathbf{M}_\Omega(V,W)$ と書こう. G_V の作用は, このシンプレクティック形式を保つ. 上の写像 μ は, 運動量写像である. このあたりは, preprojective algebra の説明をしたときと同様である.

さて, シンプレクティック商

$$\mu^{-1}(0)/G_V$$

を考えたい. もしも商空間 $\mathbf{M}_\Omega(V,W)/G_V$ が多様体であれば, これはその余接束と同型である. しかし, 集合論的な商空間は一般には代数多様体になることが期待できない. 幾何学的不変式論 [32] の教えは, 商空間を考える代わりに商空間上の関数が何かを考えよ, と言うことである. 今の場合は, 二つの候補がある. まず第一のものは, $\mu^{-1}(0)$ をアファイン代数多様体と思って, 座標環の G_V 不変な部分環に対応するアファイン代数多様体を考えるものである. これは $\mu^{-1}(0)/\!\!/G_V$ と書かれるもので, その点は $\mu^{-1}(0)$ の閉軌道に他ならない.

もう一つは, $\mu^{-1}(0)$ 上の直線束 (今の場合, 自明なものを取る) に, G_V の作用を持ち上げ, 直線束のテンソル積の G_V 不変な切断のなす次数つき環に対応する準射影多様体を考えるものである. 自明な直線束への作用の持ち上げを, $\operatorname{GL}(V_k)$ の行列式の積と取ると, 以下のように定義される '安定 (stable)' な点の全体の商空間になる.

定義 6.3. $(B_h,i_k,j_k)_{h\in H,k\in I}$ が安定であるとは, 次の条件が成り立つときを言う: V_k の線型部分空間の集まり $(S_k)_{k\in I}$ であって,

- $S_k\subset\operatorname{Ker}j_k$ がすべての k について成り立つ
- $B_h(S_{\operatorname{out}(h)})\subset S_{\operatorname{in}(h)}$ がすべての h について成り立つ

という条件をみたすものは, すべての k について $S_k=0$ となるものに限る.

安定な点の全体を $\mu^{-1}(0)^{\mathrm{s}}$ と書く. よって二つめの商は, $\mu^{-1}(0)^{\mathrm{s}}/G_V$ である.

なお, 元々の [26] における反自己双対接続のモジュライ空間は, hyper-Käher 商として書かれており, 上の説明とは一見異なるが, Kempf-Ness, Kirwan らの結果により上のものと一致することが, King [25] の議論を使うと証明される.

上のようにして構成された二つの商空間をそれぞれ

$$\mathfrak{M}_0(V,W),\qquad \mathfrak{M}(V,W)$$

で表わそう. 作り方から

$$\pi\colon\mathfrak{M}(V,W)\to\mathfrak{M}_0(V,W)$$

という射影的な写像がある. 具体的には, $\mathfrak{M}(V,W)$ の点, すなわち安定な軌道に対して, その閉包に含まれるようなただ一つの閉軌道を対応させる写像である.

ここで, なぜ $\mu^{-1}(0)$ だけでなく, $\mathbf{M}_\Omega(V,W)$ の幾何学的不変式論による商も考えないのか疑問に思わないだろうか? 実は, その様な商を考えることは可能であるが,

- $\mathbf{M}_\Omega(V,W)$ の閉軌道は 0 しかない. すなわち $\mathbf{M}_\Omega(V,W)/\!\!/G_V$ は一点のみからなる空間である.
- 多くの場合, 安定な軌道は存在しない.

などの現象があり, あまり自然なものとは考えられないのである. したがって, $\mathbf{M}_\Omega(V,W)$ では商空間 $\mathbf{M}_\Omega(V,W)/\!\!/G_V$ を考えるのではなく, G_V-同変な $\mathbf{M}_\Omega(V,W)$ 上の対象を考えるのがいいようである.

また, 次のような現象もある. quiver$\mathcal{Q}$ は, グラフの辺に向きを入れたものであったが, 異なる向きを入れることを考える. このとき quiver $\mathcal{Q}$ は変わるが, その double $\mathcal{Q}^\#$ は変わらない. そして, $\mathfrak{M}_0(V,W)$, $\mathfrak{M}(V,W)$ は向きの取り方によらないが, $\mathbf{M}_\Omega(V,W)$ の向きの取り方によって, 安定な点を持ったり持たなかったり変わってしまうのである.

すなわち, 次の哲学が成り立っている.

$$\boxed{\text{商空間 } \mathbf{M}_\Omega(V,W)/G_V \text{ は意味を持たないが, その余接束は定義可能である.}}$$

しかし, そもそもなぜ商空間を考えることが必要なのか, G_V-同変な対象ではいけないのかという疑問はあろう. 筆者の答は, 次節以降で安定性が表現論的な意味を持つのを見ることで与えられる.

箙多様体の例を与えよう. グラフは A_1 型, すなわち頂点が一個で辺はないものとする. このとき, V, W はベクトル空間で, $i\colon W\to V$, $j\colon V\to W$ となる. $\mu=0$ は, $ij=0$ で, 安定であることは, j が単射であることと同値である. そこで, $\mathfrak{M}(V,W)$ からグラスマン多様体の余接束への写像を

$$\mathfrak{M}(V,W)\ni G_V\cdot(i,j)\longmapsto(\operatorname{Image} j, ji)\in T^*\operatorname{Grass}(v,W)$$

で定める. ただし,

$$T^*\operatorname{Grass}(v,W)=\{(S,\xi)\mid S\text{ は }W\text{ の }v\text{ 次元部分空間で}, \xi\colon W/S\to S\}$$

である. 容易にチェックできるように, これは同型である. また, $\mathfrak{M}_0(V,W)$ の方は,

$$\mathfrak{M}_0(V,W)\ni G_V\cdot(i,j)\mapsto ji\in\{\xi\in\operatorname{End}W\mid \xi^2=0,\ \operatorname{rank}\xi\le\dim V\}$$

が同型写像を与える.

7. 最高ウェイト加群と安定性

この節では, グラフは Dynkin ADE 型であると仮定する.

Ringel-Lusztig の構成を見ると, V をいろいろと取り替えて初めて量子展開環が見えてくるはずである. 一方, W の方は固定しておく. では, 前節で '人工的' に導入されたかのように見える W の意味は何であろうか? 実は, 次の結果が示すとおり量子展開環の表現論と W, そして安定性が密接に関係しているのである.

定義体は $\mathbb{C}$ とする[5]. $\mathbf{E}_\Omega(V)$ 上の G_V-不変な構成可能層の複体 A を考える. Lusztig の構成により $\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})$ の元と思うことにする. A の singular support(もしくは特性多様体)$SS(A)\subset T^*\mathbf{E}_\Omega(V)=\mathbf{E}_\Omega(V)\times\mathbf{E}_\Omega(V)^*$ を考える. このとき, $SS(A)$ は

$$\mathbf{L}(V)\overset{\text{def.}}{=}\{B\in T^*\mathbf{E}_\Omega(V)\,|\,\mu(B)=0,\quad B\text{ は nilpotent}\}\tag{7.1}$$

に含まれていることが, Lusztig [30] により観察されている. よって

$$SS(A)\times\left(0\oplus\bigoplus_k\operatorname{Hom}(V_k,W_k)\right)\subset\mathbf{M}(V,W)$$

は $\mu^{-1}(0)$ に含まれている. このとき, 上の集合の点がすべて安定でない点になっているような A から生成される $\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})$ の $\mathbb{Q}(q)$-部分空間を I_W とおく. (W は固定し, V を動かす.)

定理 7.2 ([33, 11.7]). *I_W は, $\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})$ の左イデアルであり, 商 $\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})/I_W$ は最高ウェイトが*

$$\mathbf{w}=\sum_k\dim W_k\,\Lambda_k$$

であるような $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$ の有限次元既約最高ウェイト加群と同型である. ただし, Λ_k は基本ウェイトである.

前半の証明は, singular support の評価式 [20, 第 5 章] を用いてなされ, 後半の証明は I_W が $F_k^{\dim W_k+1}$ を含んでいること, そして最高ウェイトベクトルと最低ウェイトベクトルを含んでいないことをチェックして証明できる. すべて安定性の定義から容易に従う.

'$\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})/I_W$ に $\mathbf{U}_q^+(\mathfrak{g})$ の作用を幾何学的に構成せよ' という問題は未解決であることを注意しておこう. $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$ 全体の幾何学的構成が未解決なのと同様である.

[5] Hodge 加群を用いて書き直すか, もしくは原論文のように分解定理を使うことによって, 半単純な複体の圏で話をするか, によって Lusztig の構成は $\mathbb{C}$ 上でも出来る.

なお, 次節の液晶基底の幾何学的な実現を用いれば, 上の結果はより一般の対称な Kac-Moody Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対応する $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$ についても成立することを注意しておく.

8. 結晶基底 (CRYSTAL BASE) の幾何学的な実現

この節では, グラフは始点と終点が一致する辺がないものとだけ仮定し, ADE 型とは限らない. 結晶基底については, [18] を参照のこと.

$\mathbf{L}(V)$ の V を動かして非交和を取り, $\mathbf{L}$ で表わそう. $\mathbf{L}$ の既約成分には, Lusztig [30] により次のような '帰納的' 記述がある.

各頂点 $k \in I$ に対し, 線型写像

$$\tau_k = \sum_{h:\mathrm{in}(h)=k} B_h \colon \bigoplus_{h:\mathrm{in}(h)=k} V_{\mathrm{out}(h)} \to V_k$$

を考える.

$$\mathbf{L}(V)_{k;n} = \{B \in \mathbf{L}(V) \mid \mathrm{codim}_{V_k} \mathrm{Im}\, \tau_k = n\},$$

とおく. これは, $\mathbf{L}(V)$ の局所閉な部分多様体である. このとき, V_k を $\mathrm{Im}\, \tau_k$ で置き換え, 他の V_l は変えないものを V' とおく. B は $T^*\mathbf{E}_\Omega(V')$ の元を自然に定め, それは $\mathbf{L}(V')_{k;0}$ に属している. さらに $\mathbf{L}(V)_{k;n} \to \mathbf{L}(V')_{k;0}$ はファイバー束になっている.

さて, $\mathbf{L}(V)$ の既約成分 Y が与えられたとき, Y の generic な元はある $k \in I$, $n > 0$ に関して $\mathbf{L}(V)_{k;n}$ に属しているとしよう. ($\mathbf{L}(V)$ の元が nilpotent であることから, $V = 0$ でなければ $\mathbf{L}(V)$ は $\bigcup_{k\in I, n>0} \mathbf{L}(V)_{k;n}$ と union になっている. よってその様な k, n は存在する.) これを上の写像で $\mathbf{L}(V')_{k;0}$ に写し, その閉包を取ることにより $\mathbf{L}(V')$ の既約成分 Y' が得られる. この操作を繰り返すことにより, $\mathbf{L}$ のすべての既約成分は, $V = 0$ の場合 (このとき $\mathbf{L}(V) = \{0\}$ である) から出発して帰納的に構成することが出来る.

さらに, 柏原-斎藤 [19] により, この帰納的な記述を用いて $\mathbf{L}$ の既約成分に '結晶' 構造が入れられる. (結晶構造は, 結晶基底の性質を抽象化したものである.) 実際, V'' を $V_l (l \neq k)$ は変えずに V_k を一次元減らしたもの, V''' を一次元増やしたものとするとき, $\mathbf{L}(V'')_{k;n-1} \to \mathbf{L}(V')_{k;0}$, と $\mathbf{L}(V''')_{k;n+1} \to \mathbf{L}(V')_{k;0}$ を用いて, 上の操作と逆向きの同様の操作によって Y' から $\mathbf{L}(V'')$ と $\mathbf{L}(V''')$ の既約成分 Y'', Y''' を作る. そこで, $\mathbf{L}$ の既約成分の集合を $\mathbf{B}$ とし, 写像 $\mathbf{B} \to \mathbf{B} \sqcup \{0\}$ を

$$\widetilde{e}_k[Y] = [Y''], \quad \widetilde{f}_k[Y] = [Y''']$$

と定める. ただし $n = 0$ のときは, $\widetilde{e}_k[Y] = 0$ とする. この写像により, $\mathbf{B}$ は液晶になる. さらに, 柏原-斎藤により $\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})$ の結晶基底と同型になっている.

この構成は箙多様体のときにも有効である. 写像 $\pi \colon \mathfrak{M}(V,W) \to \mathfrak{M}_0(V,W)$ の原点 $0 \in \mathfrak{M}_0(V,W)$ の逆像を $\mathfrak{L}(V,W)$ で表わそう. 具体的には,

$$\mathfrak{L}(V,W) = \{(B,i,j) \in \mu^{-1}(0)^{\mathrm{s}} \mid i = 0 \text{ で } B \text{ は nilpotent}\}$$

と表わされる. これは, $\mathfrak{M}(V,W)$ のラグランジアン部分多様体となる. ([33, 5.8]) による幾何学的証明と [30] にアナウンスされている帰納法による証明がある.) 上の記述より $\mathfrak{L}(V,W)$ の射影 $\mu^{-1}(0)^{\mathrm{s}} \to \mathfrak{M}(V,W)$ による逆像は,

$$\mathbf{L}(V) \times \left(0 \oplus \bigoplus_k \mathrm{Hom}(V_k, W_k)\right)$$

に含まれている.

$\mathfrak{L}(V,W)$ の非交和を $\mathfrak{L}(W)$ で表わそう. $\mathfrak{L}(W)$ の既約成分の集合を $\mathbf{B}(W)$ とすると, $\mathbf{L}$ の場合とまったく同様にして, 写像 $\widetilde{e}_k, \widetilde{f}_k \colon \mathbf{B}(W) \to \mathbf{B}(W) \sqcup \{0\}$ が定義される. ただし, 上の Y''' にあたるものが安定性の条件のために空集合になることがあるので, その場合は $\widetilde{f}_k[Y] = 0$ とおく. このとき $\mathbf{B}(W)$ は最高ウェイトが $\mathbf{w} = \sum \dim W_k \Lambda_k$ の既約最高ウェイト $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$-加群の液晶基底と同型になる.

9. 量子アファイン環 (QUANTUM AFFINE ALGEBRA) とその有限次元表現

アファイン Lie 環 $\widehat{\mathfrak{g}}$ は, Kac-Moody Lie 環の例であり, 一般化された Cartan 行列に対して, 生成元と関係式で定義される. 可積分表現を調べるときには, この定義を使うのが便利であるが, 一方で $\widehat{\mathfrak{g}}$ は有限次元 Lie 環 $\mathfrak{g}$ のループ Lie 環 $\mathbf{L}\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[z,z^{-1}]$ を中心拡大して, さらに次数作用素を付け加えたものという記述も可能である. すなわち,

$$\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[z,z^{-1}] \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$$

であって, Lie 環の構造を

$$[\widehat{\mathfrak{g}}, c] = 0,$$
$$[X \otimes z^r, Y \otimes z^s] = [X,Y] \otimes z^{r+s} + r\delta_{r+s,0}(X,Y)c,$$
$$[d, X \otimes z^r] = rX \otimes z^r$$

で入れたものである. ただし, (X, Y) は $\mathfrak{g}$ 上のある adjoint 不変な内積である.

ループ Lie 環 $\mathbf{L}\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[z, z^{-1}]$ の有限次元表現を考えよう. アファイン Lie 環の d 以外の元で生成される部分 Lie 環 (これをアファイン Lie 環と呼ぶこともある) の表現で, c が 0 によって作用するものである. 0 でない複素数 a に対し, Lie 環の準同型

$$\mathbf{L}\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}; \qquad X \otimes z^k \mapsto a^k X$$

を **evaluation** 写像といい, ev_a で表わす. $\mathfrak{g}$ の表現 V を, ev_a を通じて $\mathbf{L}\mathfrak{g}$ の表現と思ったものを $\mathrm{ev}_a^* V$ で表わす.

$\mathbf{L}\mathfrak{g}$ の有限次元表現は, 次のようにして完全に理解される.

定理 9.1 (Chari-Pressley [5]). (1) $a_1, \dots, a_n$ を相異なる 0 でない複素数とし, $V_1, \dots, V_n$ を $\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現とする. このとき

$$\mathrm{ev}_{a_1}^* V_1 \otimes \cdots \otimes \mathrm{ev}_{a_n}^* V_n$$

は $\mathbf{L}\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現である.

(2) $\mathbf{L}\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現は上のやり方で必ず得られる.

$\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現は, 支配的ウェイト $\sum w_k \Lambda_k$ ($w_k \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$, Λ_k は基本ウェイト) と一対一に対応していたことを思い出そう. 上の $\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現 V_i に対応する支配的ウェイトを $\sum w_k(V_i)\Lambda_k$ とするとき, 各 k に対し

$$P_k(u) = \prod_i (1 - a_i u)^{w_k(V_i)}$$

は, 次数 $\sum_i w_k(V_i)$ の u の多項式で $P_k(0) = 1$ となる. 上の結果により, $\mathbf{L}\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現は, 多項式を係数とするウェイト

$$P(u) = \sum_k P_k(u)\Lambda_k$$

と一対一に対応する.

さて, 以上の q 類似を考えたい. 普遍展開環 $\mathbf{U}(\widehat{\mathfrak{g}})$ の 'q 類似' $\mathbf{U}_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ は, アファイン量子展開環と呼ばれているが, $\widehat{\mathfrak{g}}$ に二通りの記述があったのと同様に, 二通りの記述が可能である.

一つは, $\widehat{\mathfrak{g}}$ の Kac-Moody Lie 環としての記述の 'q 類似' であり, Drinfeld-神保による対称化可能な Kac-Moody Lie 環に対する量子展開環の定義を使うものである. もう一つは, Drinfeld new realization と呼ばれているものであり, $\widehat{\mathfrak{g}}$ のループ Lie 環の拡大としての記述の 'q 類似' である.

二つの記述が同型であることは, Drinfeld[9] によってアナウンスされていたが, 詳しい証明は, Beck[1] によって与えられた.

ここでは, Drinfeld new realization を採用することとし, また有限次元表現を考察するので, 中心拡大せず, d を加えていない $\mathbf{L}\mathfrak{g}$ の量子化である量子ループ環 $\mathbf{U}_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ を取り扱うことにする.

簡単のため $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ のときの定義のみを与える. $\mathbf{U}_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ は, e_r, f_r ($r \in \mathbb{Z}$), $q^{\pm h}$, h_m ($m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) を生成元とし, 次の関係式で定義される $\mathbb{Q}(q)$-代数である:

$$\begin{gathered}
q^h q^{-h} = q^{-h} q^h = 1, \quad [q^h, h_m] = 0, \\
\left[\psi^+(z), \psi^+(w)\right] = \left[\psi^-(z), \psi^-(w)\right] = \left[\psi^+(z), \psi^-(w)\right] = 0, \\
(z - q^{\pm 2} w)\psi^s(z) x^\pm(w) = (q^{\pm 2} z - w) x^\pm(w) \psi^s(z), \\
\left[x^+(z), x^-(w)\right] = \frac{1}{q - q^{-1}} \left\{ \delta\left(\frac{w}{z}\right) \psi^+(w) - \delta\left(\frac{z}{w}\right) \psi^-(z) \right\}, \\
(z - q^{\pm 2} w) x^\pm(z) x^\pm(w) = (q^{\pm 2} z - w) x^\pm(w) x^\pm(z),
\end{gathered}$$

ただし, $s = \pm$ である. (同じ式に出てくる $\pm$ とは同符号でなくてもよい.) また, 次の母関数を用いた:

$$\delta(z) \overset{\text{def.}}{=} \sum_{r=-\infty}^{\infty} z^r, \qquad x^+(z) \overset{\text{def.}}{=} \sum_{r=-\infty}^{\infty} e_r z^{-r}, \qquad x^-(z) \overset{\text{def.}}{=} \sum_{r=-\infty}^{\infty} f_r z^{-r},$$

$$\psi^\pm(z) \overset{\text{def.}}{=} q^{\pm h} \exp\left(\pm(q - q^{-1}) \sum_{m=1}^{\infty} h_{\pm m} z^{\mp m} \right).$$

また, 次の母関数もあとで使う.

$$p^\pm(z) \overset{\text{def.}}{=} \exp\left(- \sum_{m=1}^{\infty} \frac{h_{\pm m}}{[m]_q} z^{\mp m} \right).$$

$[m]_q = (q^m - q^{-m})/(q - q^{-1})$ である.

$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ を $\mathfrak{sl}_2$ の生成元として取れば, $\mathbf{L}\mathfrak{g}$ の $e \otimes z^r$, $f \otimes z^r$, $h \otimes z^m$ がそれぞれ e_r, f_r, h_m に対応し, $h \otimes z^0$ だけは q の肩に乗っけて q^h としたと考えることが出来る.

一般の $\mathfrak{g}$ に対する定義関係式はここには書かないが, 生成元として $e_{k,r}$, $f_{k,r}$ (k は Dynkin 図式の頂点, $r \in \mathbb{Z}$), q^h (h はウェイト格子の元), $h_{k,m}$ ($m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) を持つ. 上と同様の母関数 $x_k^{\pm}(z)$, $\psi_k^{\pm}(z)$, $p_k^{\pm}(z)$ が Dynkin 図式の各頂点 k に対応して定義される.

$\mathfrak{g}$ に対応する Drinfeld-神保の量子展開環 $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$ は, $e_{k,0}$, $f_{k,0}$, q^h で生成される部分代数として $\mathbf{U}_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ に含まれている. $e_{k,r}$ で生成される $\mathbf{U}_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ の部分代数を $\mathbf{U}_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})^+$, f_r で生成される $\mathbf{U}_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ の部分代数を $\mathbf{U}_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})^-$, q^h と h_m で生成される $\mathbf{U}_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ の部分代数を $\mathbf{U}_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})^0$ で表わす. 次の弱い形の三角分解が成り立つ.

$$\mathbf{U}_q(\mathbf{L}\mathfrak{g}) = \mathbf{U}_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})^+ \cdot \mathbf{U}_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})^0 \cdot \mathbf{U}_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})^-.$$

さらに不定元 q を $\varepsilon \in \mathbb{C}^*$ に特殊化した量子ループ環 $\mathbf{U}_\varepsilon(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ を考える. その定義のためには, $\mathbf{U}_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ のある $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$-部分代数 $\mathbf{U}_q^{\mathbb{Z}}(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ を定義し, $\mathbf{U}_\varepsilon(\mathbf{L}\mathfrak{g}) = \mathbf{U}_q^{\mathbb{Z}}(\mathbf{L}\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{Z}[q,q^{-1}]} \mathbb{C}$ と定義する. ただし, $\mathbb{Z}[q, q^{-1}] \to \mathbb{C}$ は q を ε に送る準同型である. $\mathbf{U}_q^{\mathbb{Z}}(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ の定義をここでは述べないが, ε が超越数のときには, 上の $\mathbf{U}_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ の定義で q を ε で置き換えたものとすればよい.

既約有限次元 $\mathbf{U}_\varepsilon(\mathbf{L}\mathfrak{g})$-加群の構成, 分類を問題にしたい. 実は, 一般の $\mathfrak{g}$ にたいしては evaluation 写像 $\mathbf{U}_\varepsilon(\mathbf{L}\mathfrak{g}) \to \mathbf{U}_\varepsilon(\mathfrak{g})$ が存在しないことが知られており, このために $\mathbf{L}\mathfrak{g}$ の有限次元の構成 (定理 9.1) の類似がそのままでは成立しない. しかし次の結果が知られている:

定理 9.2 (Chari-Pressley [7]). ε は 1 のべき根でないとする. 既約有限次元 $\mathbf{U}_\varepsilon(\mathbf{L}\mathfrak{g})$-加群 M で $q^{\pm h}$ が ε のべき乗を固有値とする半単純な元として作用するものは, 多項式を係数とするウェイト

$$P(u) = \sum_k P_k(u)\Lambda_k$$

と一対一に対応する.

上のような $\mathbf{U}_\varepsilon(\mathbf{L}\mathfrak{g})$-加群は, 次の性質を持つベクトル m_0 を持つことが知られている.

$$e_{k,r} \cdot m_0 = 0, \quad \mathbf{U}_\varepsilon(\mathbf{L}\mathfrak{g})^- \cdot m_0 = M \tag{9.3}$$

をみたし, m_0 は q^h, $h_{k,m}$ の同時固有ベクトルである. このとき上の多項式 $P_k(u)$ は固有値の母関数として特徴づけられる.

$$\psi_k^{\pm}(z) \cdot m_0 = \varepsilon_k^{\deg P_k} \left(\frac{P_k(\varepsilon_k^{-1}/z)}{P_k(\varepsilon_k/z)}\right)^{\pm} m_0 \tag{9.4}$$

を満たす. ただし, $\varepsilon_k = \varepsilon^{(\alpha_k,\alpha_k)/2}$ であり (α_k は頂点 k に対応する単純ルート), また $(\ )^{\pm} \in \mathbb{C}[[z^{\mp}]]$ は, 有理関数の $z = \infty$ と 0 での展開を表わす. 一般に $m_0 \in M$ が(9.3) を満たし, q^h, $h_{k,m}$ の同時固有ベクトルであるとき, m_0 を l-最高ウェイトベクトルと呼び, このような m_0 を持つ $\mathbf{U}_\varepsilon(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ 加群を l-最高ウェイト 加群と呼ぶ. 三角分解を用いれば, 任意の形式的べき級数 $\Psi_k^{\pm}(z)$ に対して,

$$\psi_k^{\pm}(z) \cdot m_0 = \Psi_k^{\pm}(z) m_0$$

を満たす l-最高ウェイトベクトルを持つ既約な l-最高ウェイト加群がただ一つ存在することが証明される.

$\mathbf{U}_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ の定義より q^h, $h_{k,m}$ は互いに可換であるから, 有限次元 $\mathbf{U}_\varepsilon(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ 加群 M は, これらの元の同時一般固有空間の直和に分解する. 母関数 $\psi_k^{\pm}(z)$ を用いて

$$\begin{aligned} M_{\Psi^{\pm}} \overset{\text{def.}}{=} \{m \in M \mid & \text{ 各 } k \text{ について, 十分大きな } N \text{ に対し} \\ & (\psi_k^{\pm}(z) - \Psi_k^{\pm}(z)\,\mathrm{Id})^N \cdot m = 0 \text{ が成り立つ } \}. \end{aligned}$$

とおく. $M_{\Psi^{\pm}}$ が 0 にならないような $\Psi_k^{\pm}(z)$ のことを l-ウェイトと呼び, $M_{\Psi^{\pm}}$ を l-ウェイト空間と呼ぼう. さらに, l-ウェイトが l-支配的であるとは,

$$\Psi_k^{\pm}(z) = \varepsilon_k^{\deg P_k} \left(\frac{P_k(\varepsilon_k^{-1}/z)}{P_k(\varepsilon_k/z)}\right)^{\pm}$$

を満たすような多項式 $P_k(u)$ が各 k について存在するものと約束する.

上に述べた定理は, 既約 l-最高ウェイト加群が有限次元になるための必要十分条件は, l-最高ウェイト $\Psi_k^{\pm}$ が l-支配的であることであると主張しているわけである. これは, Lie 環の最高ウェイト加群が有限次元となるための必要十分条件は, 最高ウェイトが支配的であると言う結果の類似である.

このように有限次元既約 $\mathbf{U}_\varepsilon(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ 加群の分類は知られているものの, その構成は抽象的なものであり, 具体的な性質はよく知られていなかった. 例えば, 各有限次元既約 $\mathbf{U}_\varepsilon(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ 加群について l-ウェイト空間の次元を計算することは, Weyl の指標公式の $\mathbf{U}_\varepsilon(\mathbf{L}\mathfrak{g})$-版に当たるが, それは計算されていない.

筆者は, 最近箙多様体と呼ばれる空間の同変 K 群を利用して, 有限次元表現を構成した. 応用として, 指標を箙多様体の交叉コホモロジーの次元を用いて書き表すことが出来るのである. ただし, $\mathfrak{g}$ は ADE 型 (一般の Kac-Moody Lie 環に対して対応する理論を考えるときは, 一般化 Cartan 行列が対称なもの) のみを考えることが出来る.

もう少し詳しく述べよう．まず，支配的ウェイト $\mathbf{w} = \sum_k w_k\Lambda_k$ を固定する．このとき $G_{\mathbf{w}} = \prod_k \mathrm{GL}(w_k, \mathbb{C})$ とおく．$R(G_{\mathbf{w}})$ をその表現環とする．さらに $R(G_{\mathbf{w}} \times \mathbb{C}^*) = R(G_{\mathbf{w}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ を $G_{\mathbf{w}} \times \mathbb{C}^*$ の表現環とする．このとき，ある $\mathbf{U}_q^{\mathbb{Z}}(\mathbf{L}\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{Z}[q,q^{-1}]} R(G_{\mathbf{w}} \times \mathbb{C}^*)$-加群 $M(\mathbf{w})$ であって，$R(G_{\mathbf{w}} \times \mathbb{C}^*)$ 上自由で有限階数であり，

$$e_{k,r} \cdot m_0 = 0, \quad (\mathbf{U}_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})^- \otimes_{\mathbb{Z}[q,q^{-1}]} R(G_{\mathbf{w}} \times \mathbb{C}^*)) \cdot m_0 = M(\mathbf{w}),$$
$$q^h \cdot m_0 = \varepsilon^{\langle h, \mathbf{w}\rangle} m_0, \quad p_k^+(z) \cdot m_0 = \left(\textstyle\bigwedge_{-1/z} q^{-1} W_k\right) \cdot m_0,$$
$$p_k^-(z) \cdot m_0 = (-z)^{\dim W_k} \left(\textstyle\bigwedge_{-1/z} q^{-1} W_k \otimes \det(q^{-1}W_k)^*\right) \cdot m_0$$

を満たす $m_0 \in M(\mathbf{w})$ を持つものを構成することが出来る．ただし，W_k は $\mathrm{GL}(w_k, \mathbb{C})$ のベクトル表現で $q^{-1}W_k$ は，さらに $t \in \mathbb{C}^*$ が，$t^{-1}\,\mathrm{id}_{W_k}$ で作用するものである．そして $\bigwedge_u V = \sum_i u^i \bigwedge^i V$ である．

$M(\mathbf{w})$ は，次のように '普遍的' な l-最高ウェイト加群と思える．$G_{\mathbf{w}}$ の半単純な元 s と $\varepsilon \in \mathbb{C}^*$ を取り，$a = (s, \varepsilon)$ とおく． a での指標の値を取ることにより準同型 $R(G_{\mathbf{w}} \times \mathbb{C}^*) \to \mathbb{C}$ が定義される． この準同型により $\mathbb{C}$ を $R(G_{\mathbf{w}} \times \mathbb{C}^*)$-加群と思い，$\mathbb{C}_a$ と表わす．すると，$M(\mathbf{w}) \otimes_{R(G_{\mathbf{w}} \times \mathbb{C}^*)} \mathbb{C}_a$ は，有限次元の l-最高ウェイト加群で，(9.4) によって定められる $P_k(u)$ は $\bigwedge_{-u} q^{-1} W_k$ を準同型 $R(G_{\mathbf{w}} \times \mathbb{C}^*) \to \mathbb{C}$ によって多項式に写したものに他ならない．また $P_k(u)$ は，s の $\mathrm{GL}(w_k, \mathbb{C})$-成分の特性多項式であるから，$P(u) = \sum P_k(u)\Lambda_k$ を定めることと，半単純な元 $s \in G_{\mathbf{w}}$ を共役類を除いて定めることとは同じである．そこで，上で作られる $\mathbf{U}_\varepsilon(\mathbf{L}\mathfrak{g})$-加群を $M(P)$ で表わす．$M(P)$ を標準加群 **(standard module)** と呼ぶ．

$M(\mathbf{w})$ は，箙多様体のある Lagrangian 部分多様体上の $G_{\mathbf{w}} \times \mathbb{C}^*$ 同変な連接層の Grothendieck 群を用いて構成される．ただし箙多様体は $\mathbf{w}$ に依存して定められる．あとでこれを説明する．おそらくは，代数的に構成することも可能であると思われる．

定理 9.2 で与えられる既約 $\mathbf{U}_\varepsilon(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ 加群を $L(P)$ で表わそう．$L(P)$ は，$M(P)$ の商である．このとき，有限次元 $\mathbf{U}_\varepsilon(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ 加群の Grothendieck 群の中で，$M(P)$ は，次の形に書ける:

$$[M(P)] = \sum_Q a_{PQ}[L(Q)]$$

$M(P)$ は比較的調べやすいと考えられるので (実際，'基本表現' のテンソル積であると予想される)，係数 a_{PQ} を求めることが問題となる．$M(P)$ を Lie 環の Verma 加群，$L(P)$ を既約最高ウェイト加群に置き換えたものがいわゆる Kazhdan-Lusztig 予想である．そのとき，a_{PQ} は Kazhdan-Lusztig 多項式の 1 での値，旗多様体の Schubert 胞体の交叉ホモロジーで書ける ([22] を参照)．今の場合，

(1) 上の和の Q は，$M(P)$ の l-支配的ウェイト全体を走る
(2) a_{PQ} は，箙多様体のある分割の交叉ホモロジーで書ける

が証明できる．

なお，$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ の場合は，箙多様体は n-step 部分旗多様体の余接束であり，同様の構成が筆者よりも以前に Ginzburg-Vasserot[12, 45] によってなされている．筆者も彼らの結果に動機づけされている．

10. 箙多様体と量子アファイン環

以上の準備のもとに，いよいよ箙多様体を用いた量子アファイン環の幾何学的な構成を述べる．グラフは Dynkin ADE 型であると仮定する．

V が V' の部分空間 (すなわち各頂点 k ごとに V_k が V_k' の部分空間) であるとすると，$\mathbf{M}(V, W)$ の中の $\mu^{-1}(0)$ は，$\mathbf{M}(V', W)$ の中の $\mu^{-1}(0)$ の部分多様体と思うことが出来る．すると

$$\mathfrak{M}_0(V, W) \to \mathfrak{M}_0(V', W)$$

という写像が自然に定義される．この写像が closed immersion であることは容易に分かる．

支配的ウェイト $\mathbf{w}$ を $\sum \dim W_k \Lambda_k$ で定める．§7, §8 のように，W を固定して V を動かすことを考える．グラフが Dynkin ADE 型であるという仮定を用いると，十分大きな V で $\mathfrak{M}_0(V, W)$ が stabilize することが分かる．これを

$$\mathfrak{M}_0(\infty, W)$$

で表わすことにする．また，$\mathfrak{M}(V, W)$ の方は，高々有限個の V を除き空集合となる．そこで，すべての非交和を取り

$$\mathfrak{M}(W)$$

で表わす．写像 π は，

$$\mathfrak{M}(W) \to \mathfrak{M}_0(\infty, W)$$

を定める．これも π で表わす．そこで Steinberg 多様体の類似として

$$Z(W) = \mathfrak{M}(W) \times_{\mathfrak{M}_0(\infty, W)} \mathfrak{M}(W) = \{(x^1, x^2) \in \mathfrak{M}(W) \times \mathfrak{M}(W) \mid \pi(x^1) = \pi(x^2)\}$$

を導入する．

$\mathfrak{M}_0(\infty, W)$, $\mathfrak{M}(W)$ には, $G_{\mathbf{w}} = \prod_{k \in I} \mathrm{GL}(W_k)$ と $\mathbb{C}^*$ の作用がある. $G_{\mathbf{w}}$ の方は, (6.1) への自然な作用が誘導する作用であり, $\mathbb{C}^*$ の方は, B_h, i_k, j_k を一斉にスカラー倍するという作用である.

定理 10.1 ([34, 36])**.** 次の可換図式がある.

$$\begin{array}{ccc} K^{G_{\mathbf{w}} \times \mathbb{C}^*}(Z(W))/\mathrm{torsion} & \longrightarrow & H_{\dim Z(W)}(Z(W), \mathbb{R}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{U}_q^{\mathbb{Z}}(\mathbf{L}\mathfrak{g}) & \longrightarrow & \mathbf{U}(\mathfrak{g}) \end{array}$$

ただし, $\mathfrak{g}$ は Dynkin グラフに対応した単純 Lie 環であり, $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ はその普遍展開環, そして $\mathbf{U}_q^{\mathbb{Z}}(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ は $\mathbf{U}_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ のある $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$-部分環である. 下の矢印は, $q = 1$ としてループ Lie 環の普遍展開環へ写像し, さらに $z = 1$ とおくことにより, $\mathfrak{g}$ の普遍展開環へ写像するものである.

これは, 例 3.1 の類似である. しかし, その例と異なって上向き矢印は同型ではないことを注意しておく. (全射でも単射でもない.)

証明は, $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$, $\mathbf{U}_q^{\mathbb{Z}}(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ の生成元の行き先を定め, 関係式をチェックすることで与えられる. 生成元の行き先の定め方は, 若干の umbiguity を除いて canonical なものである. 右側のときは, チェックは比較的容易で, [34] でなされた. 左側では, 関係式は一つを除き直接チェックすることが出来る. 残った一つの関係式 ($\mathfrak{sl}_2$ で言うところの $[e, f] = h$) は, すでに [12, 45] によって計算がされている $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ の場合に帰着させる. この帰着には, 合成積を部分多様体に制限するとどうなるか, G 主束に lift するとどうなるか, という関手的な性質を調べることでなされる. Lusztig の $\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})$ の構成を直接用いるわけではないという意味で, [41] の証明よりは, [24, 8] による証明に近いとも言えるが, 上に述べた関手的な性質は, D 加群における対応する結果が自明に成り立つことに動機づけされている.

定理 10.1 を用いて, 以下のように $\mathbf{U}_\varepsilon(\mathbf{L}\mathfrak{g})$-加群を調べることが出来る. これは, アファイン Hecke 環のとき ([8, 11] を参照せよ) とほぼ同様の議論である.

定理 10.1 より, $K^{G_{\mathbf{w}} \times \mathbb{C}^*}(\mathfrak{L}(W))$ は $\mathbf{U}_q^{\mathbb{Z}}(\mathbf{L}\mathfrak{g})$-加群となる. さらに, 同変 K 群であることから表現環 $R(G_{\mathbf{w}} \times \mathbb{C}^*)$ の加群にもなっている. これが, 最初に述べた標準加群 $M(\mathbf{w})$ である. 支配的ウェイト $\mathbf{w}$ は $\sum_k \dim W_k \Lambda_k$ で与えられる. 最初に述べたように, 標準加群はは自由な $R(G_{\mathbf{w}} \times \mathbb{C}^*)$-加群であるが, それは $\mathfrak{L}(W)$ が affine 空間への分割を持つことから証明される.

標準加群 $M(\mathbf{w})$ を特殊化したもの

$$M(\mathbf{w}) \otimes_{R(G_{\mathbf{w}} \times \mathbb{C}^*)} \mathbb{C}_a$$

を考えた. これは,

$$K^{G_{\mathbf{w}} \times \mathbb{C}^*}(\mathfrak{L}(W)) \otimes_{R(G_{\mathbf{w}} \times \mathbb{C}^*)} \mathbb{C}_a$$

に他ならない. A を a の $G_{\mathbf{w}} \times \mathbb{C}^*$ における Zariski 閉包とする. これは, 可換な簡約群である. $\mathbb{C}_a$ は, $R(A)$-加群と思え, 上は

$$K^A(\mathfrak{L}(W)) \otimes_{R(A)} \mathbb{C}_a$$

と同型になる. また, $R(A)_a$ を a で指標が消える表現からなる素イデアルで $R(A)$ を局所化したものとすると, これは

$$K^A(\mathfrak{L}(W)) \otimes_{R(A)} R(A)_a \otimes_{R(A)_a} \mathbb{C}_a$$

と書ける. Thomason による K 群の局所化定理 [44] により, 上は

$$K^A(\mathfrak{L}(W)^A) \otimes_{R(A)} R(A)_a \otimes_{R(A)_a} \mathbb{C}_a$$

と同型となる. ただし, $\mathfrak{L}(W)^A$ は, A の作用で固定される点の全体の集合である. すると, 同変 K 群は, 通常の K 群を用いて $K^A(\mathfrak{L}(W)^A) \cong K(\mathfrak{L}(W)) \otimes_{\mathbb{Z}} R(A)$ と表わされるから, 上は

$$K(\mathfrak{L}(W)^A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$$

と同型である. さらに ($\mathfrak{M}(W)$ における局所)Chern 指標

$$\mathrm{ch}\colon K(\mathfrak{L}(W)^A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \to H_*(\mathfrak{L}(W)^A, \mathbb{C})$$

があるが, 今の場合はこれが同型になる. 定義から $\mathfrak{L}(W)^A$ は写像 $\pi\colon \mathfrak{M}(W) \to \mathfrak{M}_0(\infty, W)$ の制限

$$\pi^A\colon \mathfrak{M}(W)^A \to \mathfrak{M}_0(\infty, W)^A$$

の 0 の逆像である. $\mathfrak{M}_0(\infty, W)^A$ は

$$\mathfrak{M}_0(\infty, W)^A = \bigsqcup_Q \mathfrak{M}^A(Q)$$

という $M(\mathbf{w})$ の l-支配的な l-ウェイト Q でパラメトライズされる分割を持つ. あとは, $Z(W)^A \stackrel{\text{def.}}{=} \mathfrak{M}(W)^A \times_{\mathfrak{M}_0(\infty, W)^A} \mathfrak{M}(W)^A$ に §2 の最後に説明した結果を適用し,

(1) $\pi_*^A\left(\mathbb{C}_{\mathfrak{M}(W)^A}\right)$ の分解に現れる既役な偏屈層は $\mathfrak{M}^A(Q)$ の交叉コホモロジー $IC(\mathfrak{M}^A(Q))$ であること ($\mathfrak{M}^A(Q)$ 上の非自明な局所系の交叉コホモロジーが現れないこと)

(2) $IC(\mathfrak{M}^A(Q))$ に対応する既役な $H_*(Z(W)^A,\mathbb{C})$-加群が $\mathbf{U}_\varepsilon(\mathbf{L}\mathfrak{g})$-加群としても既役であり, l-支配的な l-ウェイト Q に対応する既約 $\mathbf{U}_\varepsilon(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ 加群 $L(Q)$ に等しいこと

を証明することによって, 前節で述べた a_{PQ} が

$$\dim H^*(i_0^! IC(\mathfrak{M}^A(Q)))$$

に等しいことが導かれる.

定理 10.1 の上向き矢印が同型でないことからこれらは自明でないが, l-最高ウェイトベクトルを使うことによって回避できる. 幾何学的には, §8 において使われたラグランジアン部分多様体 $\mathfrak{L}(W)$ の帰納的な記述が用いられる.

References

[1] J. Beck, *Braid group action and quantum affine algebras*, Comm. Math. Phys. **165** (1994), 555–568.
[2] A. Beilinson, *Coherent sheaves on* $\mathbf{P}^n$ *and problems in linear algebra*, Func. Anal. and its Appl., **12** (1979), 214–216.
[3] I.N. Bernshtein, I.M. Gel'fand, and S.I. Gel'fand, *Algebraic bundles over* $\mathbf{P}^n$ *and problems of linear algebra*, Func. Anal. and its Appl., **12** (1979), 212–214.
[4] W. Borho and R. MacPherson *Partial resolutions of nilpotent varieties*, Astérisque **101–102** (1983), 23–74.
[5] V. Chari and A. Pressley, *New unitary representations of loop groups*, Math. Ann. **275** (1986), 87–104.
[6] ———, *A guide to quantum groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
[7] ———, *Quantum affine algebras and their representations* in "Representation of Groups", CMS Conf. Proc., **16**, AMS, 1995, 59–78.
[8] N. Chriss and V. Ginzburg, *Representation theory and complex geometry*, Progress in Math. Birkhäuser, 1997.
[9] V.G. Drinfel'd, *A new realization of Yangians and quantized affine algebras*, Soviet math. Dokl. **32** (1988), 212–216.
[10] V. Ginzburg, $\mathfrak{g}$*-modules, Springer's representations and bivariant Chern classes*, Adv. in Math. **63** (1986), 1–48.
[11] ———, *Geometric methods in representation theory of Hecke algebras and quantum groups*, in "Representation theories and algebraic geometry (Montreal, PQ, 1997)", Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998.
[12] V. Ginzburg and E. Vasserot, *Langlands reciprocity for affine quantum groups of type* A_n, International Math. Research Notices (1993) No.3, 67–85.
[13] N.J. Hitchin, *The self-duality equations on a Riemann surface*, Proc. London Math. **55** (1987), 59–126.
[14] R. Hotta and M. Kashiwara, *The invariant holonomic system on a semisimple Lie algebra*, Invent. Math., **75** (1984), 327–358.
[15] N. Iwahori, *On the structure of the Hecke ring of a Chevalley group over a finite field*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec 1A, **10** (1964), 215–236.
[16] M. Kapranov, *On the derived categories of coherent sheaves on some homogeneous spaces*, Invent. Math. **92** (1988), 479–508.
[17] ———, *Eisenstein series and quantum affine algebras*, J. Math. Sci. **84** (1997), 1311–1360.
[18] 柏原正樹, 量子群の結晶化, 数学 **44** (1992), 330–342.
[19] M. Kashiwara and Y. Saito, *Geometric construction of crystal bases*, Duke Math. **89** (1997), 9–36.
[20] M. Kashiwara and P. Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Springer-Verlag, 1990.
[21] M. Kashiwara and T. Tanisaki, *The characteristic cycles of holonomic systems on a flag manifold* Invent. Math., **77** (1984), 185–198.
[22] 柏原正樹-谷崎俊之, *Kazhdan-Lusztig* 予想をめぐって, 数学 **47** (1995), 61–77.
[23] D. Kazhdan and G. Lusztig, *A topological approach to Springer's representations*, Adv. in Math. **38** (1980), 222–228.
[24] ———, *Proof of the Deligne-Langlands conjecture for Hecke algebras*, Invent. Math. **87** (1987), 153–215.
[25] A. King, *Moduli of representations of finite dimensional algebras*, Quarterly J. of Math. **45** (1994), 515–530.
[26] P.B. Kronheimer and H. Nakajima, *Yang-Mills instantons on ALE gravitational instantons*, Math. Ann. **288** (1990), 263–307.
[27] G. Lusztig, *Green polynomials and singularities of unipotent classes*, Adv. in Math. **42** (1981), 169–178.
[28] ———, *Canonical bases arising from quantized enveloping algebras*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 447–498.
[29] ———, *Intersection cohomology methods in representation theory*, Proc. of the International Congress of Mathematicians (Kyoto 1990), 155–174.
[30] ———, *Quivers, preverse sheaves, and quantized enveloping algebras*, J. Amer. Math. Soc. **4** (1991), 365–421.
[31] G. Lusztig and D.A. Vogan, *Singularities of closures of* K*-orbits on flag manifolds*, Invent. Math. **71** (1983), 365–379.
[32] D. Mumford, J. Fogarty and F. Kirwan, *Geometric invariant theory*, Third Enlarged Edition, Springer-Verlag, 1994.
[33] H. Nakajima, *Instantons on ALE spaces, quiver varieties, and Kac-Moody algebras*, Duke Math. **76** (1994), 365–416.
[34] ———, *Quiver varieties and Kac-Moody algebras*, Duke Math. **91** (1998), 515–560.
[35] ———, *Lectures on Hilbert schemes of points on surfaces*, Univ. Lect. Ser. **18**, AMS, 1999.
[36] ———, *Quiver varieties and finite dimensional representations of quantum affine algebras*, preprint, math.QA/9912158.
[37] ———, *Quiver varieties and finite dimensional representations of quantum affine algebras* (日本語解説), preprint, `http://www.kusm.kyoto-u.ac.jp/~nakajima/TeX-j.html`
[38] C.M. Ringel, *Hall algebras and quantum groups*, Invent. Math. **101** (1990), 583–592.
[39] ———, *The preprojective algebra of a quiver*, CMS conf. Proc. **24**, AMS, 1998, 467–480.
[40] G. Shimura, *Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic FUnctions*, Princeton Univ. Press, 1971.
[41] T. Tanisaki, *Hodge modules, equivariant* K*-theory and Hecke algebras*, Publ. RIMS **23** (1987), 841–879.
[42] 谷崎 俊之, 半単純リー群の表現と D 加群, 数学 **41** (1989), 126–139.
[43] 谷崎 俊之-堀田 良之, D 加群と代数群, シュプリンガー・フェアラーク東京, 1995.
[44] R. Thomason, *Une formule de Lefschetz en* K*-théorie équivariante algébrique*, Duke Math. **68** (1992), 447–462.
[45] E. Vasserot, *Affine quantum groups and equivariant* K*-theory*, Transformation Groups **3** (1998), 269–299.

E-mail address: `nakajima@kusm.kyoto-u.ac.jp`