箙多様体と量子アファイン環

中島 啓 (HIRAKU NAKAJIMA)
京都大学・大学院理学研究科

1989 年に Kronheimer と筆者は, ALE 空間と呼ばれる 4 次元の多様体上の反自己双対接続のモジュライ空間を, 箙 (quiver)[1]の表現を使って記述した [20]. もともと反自己双対接続はある非線型偏微分方程式の解として定義されるが, quiver の記述では行列に関するある代数方程式の解となる (図 1). したがって, モジュライ空間を調べることはやさしくなるのではと期待していた. しかし実際には, モジュライ空間が空か否かを判定することさえも難しく, 何か根本的なアイデアが欠けているように感じられた.

そんな折り, 1990 年の京都の ICM で Lusztig の講演 [24] で, 彼の quiver を使った量子展開環の下三角部分環 $\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})$ の標準基底 (canonical basis) の構成を聞く機会があった. とは言っても, そのとき彼の講演で理解できたのは, quiver が出て来ていると言うことだけで, 表現論の内容は何も知らなかったし, 交叉コホモロジー, 偏屈層などの重要な登場人物については聞いたこともなかった. それにもかかわらず, これを勉強しなくてはいけない, と確信した.

量子展開環は, もともとは可解格子模型の研究から Drinfeld-神保によって導入された非可換環である. また, 共形場理論の Wess-Zumino-Witten 模型と呼ばれるものとも深い関係がある. これは Riemann 面上のゲージ理論 (接続を取り扱う理論) である. 一方, ALE 空間は 4 次元の多様体であり, 同じゲージ理論ではあるものの両者の間には何の関係もないように, 当時は思われた.

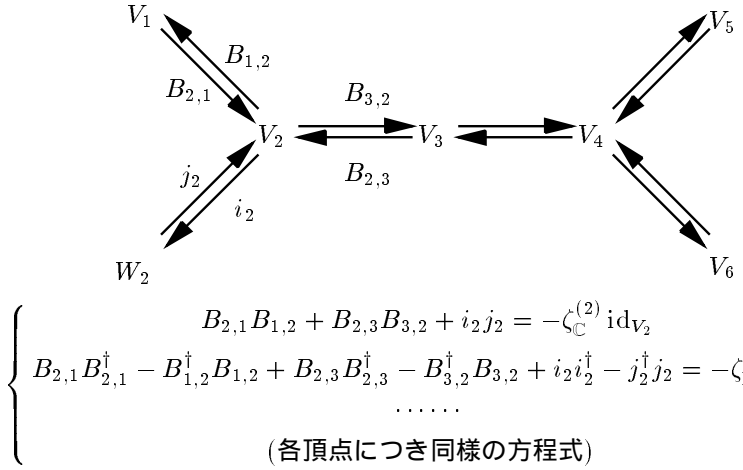

図 1. quiver による記述の例

そして暗中模索の日々, 紆余曲折の道程を経て, 1992 年ごろから, だんだんと Lusztig の仕事と箙多様体 (ALE 空間上の反自己双対接続のモジュライ空間の別名) の間の関係が見えてきた. すなわち, 箙多様体は Lusztig が扱った空間の余接束を modify したものであり, この modification が表現論では $\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})$ を左イデアルで割って最高ウェイト加群を得る操作に対応するという結果である. さらに 1994 年には, 理論物理における S-双対性との関連から私の研究が着目された. この関連に触発されて, 一般の代数曲面上の点の Hilbert 概型のコホモロジー群に Heisenberg Lie 環の表現が実現されることを示した ([29] 参照). 現在では, ALE 空間という特殊な 4 次元多様体だけでなく, より一般的な 4 次元多様体のゲージ理論, あるいは, Calabi-Yau 多様体の Gromov-Witten 理論においても同じように表現論との関係があるのではないか, と期待が見えてきている. 一方, 元々の箙多様体については, 昨年, 量子アファイン展開環の有限次元表現との関連が分かった. ここでは, この構成について, 具体的な内容[2]にはできるだけ触れずに, 思想的な背景[3]を解説したい.

Supported by the Grant-in-aid for Scientific Research (No.11740011), the Ministry of Education, Japan.

[1] 昔東北大で年次報告書を書いたときに, 数学用語はできるだけ日本語訳をつけるように指示された. そこで英和辞典を調べたところ, quiver の日本語訳は箙であった.

[2] 原論文 [30] の他に, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ のときに限定したときの詳しい説明が [31] にある. このとき, 箙多様体は複素グラスマンの余接束になる.

[3] ただし, 私自身が研究を進めてきた過程で考えていたことではない. 今から振り返ってみると, このように考えていればもっと研究がスムーズに進んだのではないか, というあとで付けた説明である.

1. 合成積 (convolution)

$\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ 上で定義された関数 $K(x,y)$ が与えられたとき, $\mathbb{R}^n$ 上の関数 $f(y)$ に対して

$$(K * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^m} K(x,y) f(y) dy$$

によって $\mathbb{R}^m$ 上の関数 $K * f$ を定義する. これを K と f の合成積という. (積分が発散しないためには, K もしくは f の台に条件を仮定する必要があるが, 取り敢えずはこだわらないことにする.) f を動かすと, $\mathbb{R}^n$ 上の関数の空間から $\mathbb{R}^m$ 上の関数の空間への作用素が定められていると考えることができる. $K(x,y)$ を与えるごとに作用素が定まるわけである. たとえば, $m = n = 1$ で, $K(x,y) = e^{ixy}$ としたものが Fourier 変換である.

上では, $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ で考えたが, M, N を有限集合とすると, 積分を和で置き換えることにより合成積が定義できる.

$$(K * f)(x) = \sum_{y \in N} K(x,y) f(y).$$

Riemann 多様体 $M \times N$ でも全く同様に定義できる. dy を N 上の体積要素で置き換えればよい. また多様体上では, 微分形式についても合成積が定義される. K を $M \times N$ 上の k-form としたとき, N 上の p-form α に対して

$$K * \alpha = \int_N K \wedge p_N^* \alpha$$

によって, M 上の $(k + p - \dim N)$-form を定義すればよい. ここで, p_N は, 射影 $M \times N \to N$ である. M, N がコンパクトでないときは, K の台に仮定を置く必要があるが, ここではこだわらないことにする.

この設定で, もしも K が closed form であったとすると, K は N 上の closed form を M 上の closed form にうつす. また, exact form は exact form にうつす. したがって K は de Rham コホモロジーの間の線型写像

$$H^p(N, \mathbb{R}) \to H^{k+p-\dim N}(M, \mathbb{R})$$

を引き起こす. さらに, この写像は K のコホモロジー類にしか依存しない. 実際, 合成積はコホモロジー群に対して直接定義できる:

$$K * \alpha = (p_M)_* (K \cup p_N^* \alpha)$$

ただし, $\cup$ はカップ積であり, p_M は射影 $M \times N \to M$ で, $(p_M)_*$ はホモロジー群の間の push-forward 準同型を Poincaré 双対でコホモロジー群に移したものである.

しばしば, K は $M \times N$ の部分多様体 $\mathcal{K}$ の基本類の Poincaré 双対として与えられる. 例えば, $\mathcal{K}$ が M から N への C^∞ 写像 f のグラフの場合には, 合成積は f による引き戻し写像に他ならない. 一般には, $\mathcal{K}$ はグラフとは限らず, M の点 x に対し, $p_N(\mathcal{K} \cap p_M^{-1}(x))$ は, N の複数の点になる. 写像の一般化という意味で $\mathcal{K}$ は, しばしば対応 (**correspondence**) と呼ばれる.

また, 合成積の合成は, やはり合成積で表わされる. すなわち, K を $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ で定義された関数とし, L を $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ で定義された関数とするとき, $\mathbb{R}^p$ 上で定義された関数 $f(z)$ に L を合成積し, さらに K を合成積したものを考える. すなわち

$$(K * (L * f))(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^p} K(x,y) L(y,z) f(z) dy dz$$

である. 式から分かるとおり, 合成積の合成は $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ 上の関数

$$(K * L)(x,z) = \int_{\mathbb{R}^m} K(x,y) L(y,z) dy$$

による合成積に他ならない. コホモロジー群についても合成積の合成は同様の表示を持つ.

2. Hecke 環, 合成積の作る環

G を有限群, H をその部分群とし, 右側剰余類 $M = G/H$ を考える. このとき, $M \times M$ に G の diagonal な作用を考え, G 不変な関数の全体のなす空間を $\mathcal{H}(G,H)$ とおく. このとき, $\mathcal{H}(G,H)$ に積を

$$(f * g)(x,z) = \sum_{y \in G/H} f(x,y) g(y,z)$$

によって定義する. これは, 上の合成積の合成に他ならない. この積によって $\mathcal{H}(G,H)$ は (一般には非可換な) 環となる. これを **Hecke** 環と呼ぶ. $H = \{e\}$ のときには, $\mathcal{H}(G, \{e\})$ は, G の群環に他ならない.

G, H が有限とは限らない一般的な設定で定義するためには, $\mathcal{H}(G,H)$ の元は次の性質をみたすものだけを考えることにすればよい.

- x (resp. y) を固定したとき $f(x,y) \neq 0$ となる y (resp. x) は, 高々有限個である.

例 **2.1.** G, B を有限体 $\mathbb{F}_q$ 上定義された Chevalley 群とその Borel 部分群とするとき, 対応する Hecke 環 $\mathcal{H}(G,B)$ は, 岩堀 [12] によって調べられた. このとき $\mathcal{B}=G/B$ は $\mathbb{F}_q$ 上定義された旗多様体 (flag variety) である. $\mathcal{B}\times\mathcal{B}$ の G 軌道は, $\mathcal{B}$ の B 軌道に一対一対応し, よく知られているように, これは, Weyl 群 W で parametrize された, いわゆる Schubert 胞体たちからなる. その特性関数が $\mathcal{H}(G,B)$ の基底を定める. これを用いると, $\mathcal{H}(G,B)$ は生成元と関係式による表示を持つ. また, このとき q は有限体の元の個数であるが, 生成元と関係式による定義は, q を不定元として定義可能である. そこで, $q=1$ と置いてみると, Hecke 環は, Weyl 群 W の群環に特殊化される. この意味で, Hecke 環は Weyl 群の q 変形であると言われる.

例 **2.2.** $G=\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})$ (行列式が正の有理数係数 2×2 行列の全体), $H=\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ がある. このとき, 対応する Hecke 環 $\mathcal{H}(G,H)$ は保型形式の空間に作用する. これを見るためには, 保型形式の空間を上半平面 $\mathfrak{H}$ を H で割った空間 $\mathfrak{H}/H$ 上の関数 (正確にはある直線束の切断) と思うとよい. すると, $G/H\times G/H$ の G 軌道 $G(eH,\alpha H)$ は,

$$\{(\tau_1,\tau_2)\in\mathfrak{H}/H\times\mathfrak{H}/H \mid \tau_2=\alpha\cdot\tau_1\}$$

という $\mathfrak{H}/H\times\mathfrak{H}/H$ の部分多様体を定める. ただし $\alpha\in G$ は一次分数変換で上半平面に作用する. (この部分多様体は α の取り方によらない.) (詳しくは [34] 参照.)

以上, 二つの例で言いたかったことは, 次である.

合成積で有用な環が構成できる

上の例だけでは納得されない読者も多いであろうが, ページ数も限られているのでこれだけで勘弁させていただく.

群のコセットの場合に限らず, 合成積により環を作ることができる. コホモロジー環で同様の構成を考えよう. M をコンパクト多様体とする. 安直に $\mathcal{H}=H^*(M\times M,\mathbb{R})$ としてみると, これは確かに

$$\alpha*\beta=p_{13*}(p_{12}^*\alpha\cup p_{23}^*\beta)$$

と定義すると, 確かに積が定まっている. ただし p_{ij} は $M\times M\times M$ から第 i 成分と第 j 成分の直積への射影である. しかし, Künneth 同型と Poincaré 双対をあわせると,

$$H^*(M\times M,\mathbb{R})\cong H^*(M,\mathbb{R})\otimes H^*(M,\mathbb{R})\cong\mathrm{End}\,(H^*(M,\mathbb{R}))$$

と行列環と同型になってしまって, 面白い環は出てこない. あとで出てくるのは, M がコンパクトとは限らず, 以下の条件をみたす $Z\subset M\times M$ という (閉) 部分多様体があったときに, 相対コホモロジー $\mathcal{H}=H^*(M\times M,M\times M\setminus Z,\mathbb{R})$ に合成積によって定められた環である.

- 第一成分, 第二成分への射影の Z への制限がそれぞれ固有写像になっている.

例を与えよう.

例 **2.3.** G を複素単純 Lie 群とし, B をその Borel 部分群とする. $\mathcal{B}$ を旗多様体 G/B とし, M をその余接束 (cotangent bundle)

$$M=T^*\mathcal{B}=\{(gB,x)\in\mathcal{B}\times\mathfrak{g} \mid x\text{ は巾零で, }x\in\mathrm{Ad}(g)\mathfrak{b}\}$$

とする. ただし $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{b}$ は G, B の Lie 環である. このとき Z を $\mathcal{B}\times\mathcal{B}$ の G 軌道 (前の例 2.1 で見たように本質的に Schubert 胞体である) の余法束 (conormal bundle) の和とする. Z は Steinberg 多様体と呼ばれる $M\times M$ のラグランジアン部分多様体 (特異点を持つ) である. 具体的には, $\mathcal{N}$ を巾零元の全体として, $\pi\colon M\to\mathcal{N}$ を自然な射影とするとき (Springer resolution),

$$Z=M\times_{\mathcal{N}}M=\{(x^1,x^2)\in M\times M \mid \pi(x^1)=\pi(x^2)\}$$

となる. 特に, 上の条件をみたすことがチェックできる. このとき

$$H^{\dim Z}(M\times M,M\times M\setminus Z,\mathbb{R})\cong H_{\dim Z}(Z,\mathbb{R})$$

に合成積により環構造を入れたものは, Weyl 群 W の群環 $\mathbb{R}[W]$ と同型になることが知られている. ここで, $H_{\dim Z}(Z,\mathbb{R})$ は Borel-Moore ホモロジーと呼ばれるもので, 局所有限なチェインの作るホモロジー群である.

この例で $H_{\dim Z}(Z,\mathbb{R})$ が $\mathbb{R}[W]$ であることを見るのは, それ程自明なことではない. 例えば, 前の例 2.1 では, Schubert 胞体の特性関数が $\mathbb{R}[W]$ の元として具体的に分かるのに対し, この例では Schubert 胞体の余法束の基本類を具体的に表わす公式は知られていないのである.

では, 上の結果はどのように証明されるのであろうか? 現在までのところいくつかの証明が知られている. (おそらくは, これ以外にもあるだろう. また, 引用の仕方が正しいのか, 心許ない. 関係者の方, すいません.)

(1) よく分かる $\mathcal{B}$ への W の作用へ帰着させる. [17] による方法.
(2) Z を変形し, '易しい' 多様体に置き換えてチェックする. [8] による. ([6, 3.4] にも書いてある.)
(3) $\mathcal{B}\times\mathcal{B}$ 上の G-不変な D 加群のなすアーベル圏の Grothendieck 群 $K(D(\mathcal{B}\times\mathcal{B},G))$ に合成積で積を入れると, 例 2.1 との類似により $\mathbb{Z}[W]$ に同型となる. このとき, D 加群 M に対し, その特性サイクル (特性多様体を重複度込みで考えたもの) を対応させる写像 $K(D(\mathcal{B}\times\mathcal{B},G))\to H_{\dim Z}(Z,\mathbb{Z})$ が環の同型であることを示す. [16, 8, 35]

(4) (詳細は [9] を参照. また [4, 21, 11] も見よ.) M 上の定数層 $\mathbb{C}_M$ を $\pi\colon M \to \mathcal{N}$ で落としたものを $\pi_*(\mathbb{C}_M)$($\mathcal{N}$ 上の構成可能層の導来圏 $D^b(\mathcal{N})$ の object) とする. このとき, 同型 $H_{\dim Z}(Z,\mathbb{C}) \cong \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{N})}(\pi_*(\mathbb{C}_M), \pi_*(\mathbb{C}_M))$ がある. (ここで, π が semismall であることが本質的である.) さらに $\pi_*(\mathbb{C}_M)$ を Fourier 変換すると, 右辺が $\mathbb{C}[W]$ に等しいことはチェックできる.

(3) からも分かるとおり, 例 2.1 と例 2.3 の間には, 深い関係がある. この両者の関係はあとでも出てくる. また例 2.3 は, Weyl 群の Springer 表現と密接な関係がある. これについては, [6, 第 3 章] を見よ.

3. 層の Grothendieck 群上の合成積, そして q 変形

§1 の定義を見れば分かるとおり, 合成積を考えるためには次の設定があれば十分である.

(1) '空間' に対してある代数的対象 (ベクトル空間, 加群等) が定まる.
(2) 射影に対して, pull-back 準同型写像が定義される.
(3) 積が定義される.
(4) 射影に対して, push-forward 準同型写像が定義される.

'空間' としては代数多様体を考えることにすると, 上のようなものの典型的な例は, 構成可能なベクトル空間の層の導来圏 ($\mathbb{C}$ 上では, Riemann-Hilbert 対応により正則ホロノミー D_X 加群の導来圏といってもよい) と, 連接 $\mathcal{O}_X$ 層の導来圏である. しかし, 以下では, その Grothendieck 群しか考えない.

単なる層でなくさらに構造を付け加えたものを考えた方が良い場合が多い. 構成可能層の場合には, 射影多様体 X は有限体 $\mathbb{F}_q$ 上定義されているとし, これをその代数閉包 $\overline{\mathbb{F}_q}$ まで係数拡大する. このとき, X 上の $\mathbb{Q}_l$-構成可能層 E を Frobenius 写像の lift 付きで考える. このような層 E に対し, Frobenius 写像の作用を代える Tate twist と呼ばれる操作がある. この操作を不定元 q を掛けることに対応させると, 上のような層のなすアーベル圏の Grothendieck 群は, $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ 加群になる.

Frobenius 写像を F としたとき, F^n の固定点は多様体の $\mathbb{F}_{q^n}$-点に他ならない. これは有限集合である. その点での E の茎への Frobenius 写像の作用の跡 (trace) を考えることにより, $X(\mathbb{F}_{q^n})$ 上の関数を与える. この操作は, Frobenius 写像の作用つき構成可能層の Grothendieck 群から $X(\mathbb{F}_{q^n})$ 上の関数への関手を定める. 特に, 層の合成積と有限集合上の関数の合成積の間に自然な対応がつく.

Frobenius 写像の作用つきの構成可能層の理論の $\mathbb{C}$ 上での対応物が混合 Hodge 加群の理論である. 混合 Hodge 加群のなすアーベル圏の Grothendieck 群も上と同様に $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ 加群の構造を持つ.

一方, 連接 $\mathcal{O}_X$ 層の場合には, 代数群の作用がある代数多様体上で同変な層を考える. あとで出てくるのは $\mathbb{C}^*$ の作用がある場合で, このとき同変な連接 $\mathcal{O}_X$ 層の Grothendieck 群は $\mathbb{C}^*$ の表現環 $R(\mathbb{C}^*) = \mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ の加群となる.

このように構成可能層でも連接層でも, パラメータ q が導入される. あとで, 合成積を用いて環を構成するときに q 変形の q に対応することになる.

また二つの構成は無関係でない. D 加群 M に対し, その特性多様体を重複度付きで考えると, D 加群の Grothendieck 群からホモロジー群への準同型が得られることを例 2.3 のあとに述べたが, 同様に混合 Hodge 加群の Grothendieck 群から余接束上の $\mathbb{C}^*$-同変連接層の Grothendieck 群への $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$-加群の準同型が得られ, 合成積の間に対応が出来る. これを §2 の例でやってみせたのが, 谷崎 [35] である. これを以下説明する.

まず, 例 2.1 においては, 有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の関数の代わりに, その代数閉包 $\overline{\mathbb{F}_q}$ 上で定義された $\mathcal{B}$ に置き換え, Frobenius 写像の作用つきの $\mathbb{Q}_l$-構成可能層の Grothendieck 群を考える. これは, q を不定元とする Hecke 環 H_q と同型になる [25]. (正確には, Frobenius 写像の固定点の茎への作用の固有値が q のべきになっているものだけを考える必要がある.) また, 複素数体 $\mathbb{C}$ 上では, $\mathcal{B}\times\mathcal{B}$ 上の G 不変な混合 Hodge 加群の Grothendieck 群 $K(MHM(\mathcal{B}\times\mathcal{B},G))$ を考えれば, 同様の構成が可能である. ([36, 第 II 部, 第 5 章] 参照)

また例 2.3 において, ホモロジー群の代わりに $G\times\mathbb{C}^*$-同変な連接 $\mathcal{O}_Z$ 層の Grothendieck 群 $K^{G\times\mathbb{C}^*}(Z)$ を考える. ただし, $\mathbb{C}^*$ は, $M = T^*\mathcal{B}$ のファイバーのスカラー倍で作用する.

例 3.1. $G\times\mathbb{C}^*$-同変な連接 $\mathcal{O}_Z$ 層の Grothendieck 群 $K^{G\times\mathbb{C}^*}(Z)$ は, affine Weyl 群 $\widehat{W}$ の群環 $\mathbb{Z}[\widehat{W}]$ の q 変形である affine Hecke 環 $\widehat{H}_q$ と同型である. より精密に次の可換図式がある:

$$\begin{array}{ccccccc}
K(MHM(\mathcal{B}\times\mathcal{B},G)) & \xrightarrow{\mathrm{gr}} & K^{G\times\mathbb{C}^*}(Z) & \xrightarrow[\text{忘れる}]{\mathbb{C}^*\text{ 作用を}} & K^G(Z) & \longrightarrow & H_{\dim Z}(Z,\mathbb{R}) \\
\uparrow & & \uparrow\cong & & \uparrow\cong & & \text{例 2.3 による}\uparrow\cong \\
H_q & \longrightarrow & \widehat{H}_q & \longrightarrow & \mathbb{Z}[\widehat{W}] & \longrightarrow & \mathbb{R}[W]
\end{array}$$

ただし, 下の矢印はすべて自然な準同型写像であり, 上の一番左の矢印 gr は, (Hodge 加群に対する) 特性サイクル写像で, 上に述べたように谷崎 [35] による. また, 上の一番右の矢印は, G の作用を忘れて Chern 指標を取り, そして次数が $\dim Z$ の部分を取るものである.

左から二番目の上向き矢印の同型は, Kazhdan-Lusztig[18] と Ginzburg[6, 第 7 章] によるものであるが, もともとの証明は生成元の行き先を決めて, 関係式をチェックするものであり, 関係式のチェックに K 加群の局所化を用いる. gr を使えば, 部分環 H_q の関係式のチェックは自動的で, 残りの関係式は比較的容易にチェックできる. 左から三番目の上向き矢印の同型は [6, 7.3] のように直接証明も出来るが, 左から二番目の上向き矢印の同型からも従う.

筆者の結果 [28, 30] を一言で言うと,

> 上の図式のうち一番左の列を除いたものを, $\widehat{H}_q$ の代わりに量子アファイン環 (正しくは量子ループ環) に対して構成した

となる. そのとき $M = T^*\mathcal{B}$ の代わりに箙多様体を用いる. 一番左の上向き矢印に対応するものは, Ringel-Lusztig による量子展開環の下三角部分環 $\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})$ の構成であり, これが筆者の構成の動機付けとなった. しかし, $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$ 全体でないと言う点で完全な類似とは言えない. $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$ 全体の幾何学的な構成は, 未解決問題である. また, あとで述べるように Lusztig の使った空間の余接束を 'modify' しないと, 箙多様体に対応しない. うまい modification を取ることが本質的であったとも言える.

4. Hall algebra

この章と次章で Ringel-Lusztig による量子展開環の下三角部分環 $\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})$ の構成を説明する.

[14] に従い, 設定を一般化した形で述べる. $\mathcal{A}$ をアーベル圏とし, さらに任意の対象 A, $B \in \mathcal{A}$ に対して $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(A, B)$ は有限集合であって, 十分大きい i に対しては 0 になっているとする. 例えば, $\mathbf{F}_q$-代数 (ただし homological 次元[4]が有限と仮定する) の表現のアーベル圏を考えればよい.

このとき, A, B, $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ に対し, C の subobject A' で, $A' \cong A$, $C/A' \cong B$ となるものは高々有限個しかない. その数を g_{AB}^C で表わす.

$\mathcal{A}$ の Hall algebra $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ とは, $\mathcal{A}$ の object の同型類を基底に持つような $\mathbb{C}$-ベクトル空間に

$$[A] * [B] = \sum_{[C]} g_{AB}^C [C]$$

によって積を入れた algebra である. 0 の同型類 $[0]$ を単位元として持つ結合律を満たす algebra となる.

例 2.2 との類似に注意して欲しい. $\mathfrak{H}/H$ を 2 次元格子 L のモジュライ空間 (あるいは, 複素トーラス $\mathbb{C}/L$ のモジュライ空間) と考えると,

$$\{(L, L') \in \mathfrak{H}/H \times \mathfrak{H}/H \mid L \subset L', [L : L'] = n\}$$

は, $\mathfrak{H}/H \times \mathfrak{H}/H$ の対応を定める.

また, 上の構成は有限体上 $\mathbb{F}_q$ 定義された多様体 X 上の層のアーベル圏にも適応できる. このとき $x \in X$ に対し,

$$0 \to E \to E' \to i_{x*}\mathbb{F}_q \to 0$$

(ただし i_x は $\{x\} \to X$ という埋め込み) は, 対応の典型的な例である. 特に, X が曲線のとき (X が高次元のときは, 点 x の代わりに因子にする), E' から E を作る操作は, 初等変換 (elementary transform), あるいは上との類似から Hecke 対応と呼ばれる.

5. 箙 (quiver) とその path algebra

箙 (quiver) $\mathcal{Q}$ は, 頂点の集合 I と (向きのついた) 辺の集合 Ω であって, 辺の始点と終点を対応させる写像

$$\mathrm{out}\colon \Omega \to I, \qquad \mathrm{in}\colon \Omega \to I$$

が与えられているもののことである. すなわち, グラフの辺に向きを入れたものに他ならない. このとき道 (path) とは, 辺の有限列 $(h_1, h_2, \ldots, h_N)$ で $\mathrm{in}(h_1) = \mathrm{out}(h_2)$, $\ldots$, $\mathrm{in}(h_{N-1}) = \mathrm{out}(h_N)$ が成り立つもののことを言う. N を path の長さという. さらに長さ N が 0 の path, すなわちひとつの頂点 $k \in I$ だけからなる constant path も path とする.

$\mathbb{F}$ を体とするとき, path algebra $\mathbb{F}\mathcal{Q}$ を path を基底とするベクトル空間に path の合成によって積を入れたものとする. もしも二つの path が合成できないとき, すなわちそれぞれの終点と始点とが一致しないときは, 積は 0 と定める. 例えば下の図 2 の定める path algebra は, 一変数多項式環 $\mathbb{F}[x]$ に他ならない. 一般には, path algebra は非可換の algebra になる.

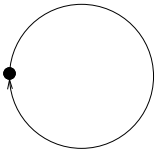

図 2. $\mathbb{F}[x]$ に対応する quiver

[4] アーベル圏 $\mathcal{A}$ の **homological** 次元が d 以下である, とは $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(A, B) = 0$ が任意の A, $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, $i > d$ について成り立つときと定義する.

また $\mathfrak{I}$ を $\mathbb{F}\mathcal{Q}$ の両側イデアルとするとき, path algebra を関係式 $\mathfrak{I}$ で割った algebra $\mathbb{F}\mathcal{Q}/\mathfrak{I}$ もよく考える. 例えば, 上の例で, m 回まわるループ h^m を 0 とする関係式を考えれば, 対応する algebra は $\mathbb{F}[x]/x^m$ に他ならない.

quiver の表現とは, path algebra $\mathbb{F}\mathcal{Q}$ の left module のことを言う. 言い直せば, 各頂点 $k \in I$ に対して $\mathbb{F}$-ベクトル空間 V_k が与えられ, 各辺 $h \in \Omega$ に対して homomorphism $B_h \colon V_{\mathrm{out}(h)} \to V_{\mathrm{in}(h)}$ が与えられているもののことである. また $\mathbb{F}\mathcal{Q}/\mathfrak{I}$ の表現は, 上のような B_h に $\mathfrak{I}$ が定める条件を課したものに他ならない.

したがって, quiver の表現の同型類の集合は, ベクトル空間

$$\bigoplus_{h\in\Omega} \mathrm{Hom}(V_{\mathrm{out}(h)}, V_{\mathrm{in}(h)}) \tag{5.1}$$

の $\prod_{k\in I} \mathrm{GL}(V_k)$ 軌道全体の空間に他ならない. あとの都合上, このベクトル空間を $\mathbf{E}_\Omega(V)$ で表わそう. $\prod_{k\in I} \mathrm{GL}(V_k)$ は, G_V で表わす.

我々にとって大切なことは次である.

(relation つき)quiver の表現と代数多様体上のベクトル束の間には関係がある

実際, あとで quiver の表現を用いて定義する箙多様体は, ALE 空間上のベクトル束のモジュライ空間と同型になり, これが筆者の研究の出発点であった. また, それ以外にも射影空間, A_n 型の旗多様体, Hirzebruch 曲面の上の層の導来圏が, ある quiver の表現の導来圏と同値であることが知られている. ([2, 3, 13, 19]) しかし, これは単なる動機付けとして上に書いておくだけに留め, これ以上は深入りしない[5]ことにして, Ringel の構成に進もう.

定理 5.2 (Ringel[32]). $\mathcal{Q}$ を ADE 型の Dynkin グラフに向き (勝手でよい) を入れたものとする. このとき, $\mathbb{F}$ を有限体とし, $\mathbb{F}\mathcal{Q}$ の表現のアーベル圏の Hall algebra の積を

$$[A] \circ [B] = \sqrt{\prod_{i\geq 0} \#\,\mathrm{Ext}^i(A,B)^{(-1)^i}}\,[A] * [B]$$

と modify したものを考える. このとき, modified Hall algebra は, Drinfeld-Jimbo の量子展開環 $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$ の下三角部分環 $\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})$ と同型になる. ただし, $\mathfrak{g}$ は Dynkin グラフに対応した単純 Lie 環であり, パラメータ q は $\sqrt{\#\mathbb{F}}$ に特殊化される.[6]

Lusztig は, この構成を '幾何学化' した [23].[7] まず, $\mathbf{E}_\Omega(V)$ の G_V 軌道を基底とするようなベクトル空間, すなわち(5.1) 上の G_V 不変な (複素数値) 関数全体を考える代わりに, 定義体を有限体の代数閉包に取り替えて, $\mathbf{E}_\Omega(V)$ 上の Frobenius 写像の作用つき $\mathbb{Q}_l$-構成可能層で G_V-同変なもののなす圏の Grothendieck 群を考える. 次に上の積 $\circ$ に対応する operation をその上に定義する. 合成積を若干 modify する必要が出てくるので, ここでは詳しく述べないが, 基本的には平坦な写像に関する引き戻し逆像, 固有写像に関する押し出し順像, およびテンソル積を用いて書き与えられる.

このとき, $\mathbf{E}_\Omega(V)$ の G_V 軌道の上の定数層を 0 で外に拡張したものが, $\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})$ のいわゆる PBW 基底に対応し, 交叉コホモロジー複体 (極小拡大) に対応するものが, 標準基底を与える.

一言注意しておく. Dynkin グラフに向きを入れた quiver $\mathcal{Q}$ の homological 次元は 1 である. 前に述べた類似で, $\mathbb{F}\mathcal{Q}$ は, 代数曲線上のベクトル束 (あるいは連接層) のアーベル圏に対応する. Ringel の結果をあるリーマン面 (おそらくは $\mathbb{P}^1$ の鎖?) の連接層のアーベル圏 (あるいは導来圏) で再構成できるだろうか?

6. 箙多様体

箙多様体の定義をしよう. まず(5.1) の $\mathbf{E}_\Omega(V)$ とその双対空間の直和を考える:

$$\mathbf{E}_\Omega(V) \oplus \mathbf{E}_\Omega(V)^* = \bigoplus_{h\in\Omega} \mathrm{Hom}(V_{\mathrm{out}(h)}, V_{\mathrm{in}(h)}) \oplus \mathrm{Hom}(V_{\mathrm{in}(h)}, V_{\mathrm{out}(h)})$$

これは, E のダブル, すなわち E の辺に逆向きの辺も付け加えてできた quiver (これを $\mathcal{Q}^\#$ で表わす) に対応するベクトル空間と思える. E のダブルを H で表わす. さらに, 各頂点ごとにベクトル空間 W_k を置いて,

$$\left(\bigoplus_{h\in H} \mathrm{Hom}(V_{\mathrm{out}(h)}, V_{\mathrm{in}(h)})\right) \oplus \left(\bigoplus_{k\in I} \mathrm{Hom}(W_k, V_k) \oplus \mathrm{Hom}(V_k, W_k)\right) \tag{6.1}$$

というベクトル空間を考える. このベクトル空間を $\mathbf{M}(V,W)$ と書こう. $\mathbf{M}(V,W)$ には自然に $G_V = \prod_{k\in I} \mathrm{GL}(V_k)$ が作用する.

さて, (6.1) の点の意味するところは何であろうか? 第一の成分は, quiver H の表現であるから意味は明らかであろう. 一方, 第二成分は [20] で現れたものの, quiver の表現論で扱われたことはなかったようである. [20] では $(W_k)_{k\in I}$ は, framing, すなわち ALE 空間の無限遠でのベクトル束の自明化に対応する. これを quiver の言葉に無理矢理に翻訳すると次のようになる. quiver $\mathcal{Q}^\#$ から一切の辺を取り除いた quiver を $\mathcal{Q}'$ とする. このとき, $\mathcal{Q}'$ の表現とは, 頂点の上にベクトル空間を置いたもの, そしてベクトル空間の間の線型写像は一切考えないものに他ならない. $\mathcal{Q}^\#$ の表現 $(V_k)_{k\in I}$, $(B_h)_{h\in H}$ に対し, B_h を忘れると, $\mathcal{Q}'$ の表現が与えられる. これは, 表現の間

[5] 将来のためキーワードを書き留めておこう. reflection functor, tilting module, Koszul duality, almost split sequence....

[6] $\#\mathbb{F}$ は通常 q で表わされる. Lusztig は, 混同を避けるために量子展開環のパラメータは v と書くことにしている.

[7] 彼は, Dynkin グラフ以外のグラフに拡張することにも成功したのであるが, 必要な modification についてはここでは述べない.

の関手である. (より一般に, $\mathcal{Q}^{\#}$ の部分グラフを考えれば, 同様の関手が定義される.) この関手を制限と呼ぼう. さて, 上の式で, $(W_k)_{k\in I}$ は, $\mathcal{Q}'$ の表現と考えることができる. すると

$$\bigoplus_{k\in I}\operatorname{Hom}(W_k, V_k)$$

は, $(W_k)_{k\in I}$ から $(V_k)_{k\in i}, (B_h)_{h\in I}$ の制限への quiver $\mathcal{Q}'$ での準同型の全体である.

$$\bigoplus_{k\in I}\operatorname{Hom}(V_k, W_k)$$

はもちろん, $(V_k)_{k\in I}, (B_h)_{h\in H}$ の制限から $(W_k)_{k\in i}$ への quiver $\mathcal{Q}'$ での準同型の全体である.

前に述べたような, quiver の表現とベクトル束の類似のもとでは, 次の対応があることは納得が行くであろう.

(1) 上の関手は, ベクトル束を部分多様体へ制限することに対応する.

(2) (6.1) の第二成分は, 部分多様体に与えられたベクトル束との間の準同型に対応する.

さて, (6.1) の各成分を B_h, i_k, j_k と書こう. このとき, 次の写像を考える.

$$\mu\colon \mathbf{M} \to \bigoplus_{k\in I}\operatorname{End}(V_k);\quad (B_h, i_k, j_k)_{h\in H, k\in I} \longmapsto \left(\sum_{h\in H:\mathrm{in}(h)=k} \varepsilon(h) B_h B_{\overline{h}} + i_k j_k\right)_{k\in I}$$

ただし, $\overline{h}$ は h の向きを逆にしたもので, $\varepsilon\colon H \to \mathbb{F}^{\times}$ であって $\varepsilon(h) + \varepsilon(\overline{h}) = 0$ をみたす (任意の) 関数である.

$\mathbf{M}(V, W)$ は, その '半分'

$$\bigoplus_{h\in\Omega}\operatorname{Hom}(V_{\mathrm{out}(h)}, V_{\mathrm{in}(h)}) \oplus \bigoplus_{k\in I}\operatorname{Hom}(W_k, V_k) \tag{6.2}$$

の余接束と見ることができ, 特に自然なシンプレクティック形式を持つ. 上のベクトル空間を $\mathbf{M}_{\Omega}(V, W)$ と書こう. G_V の作用は, このシンプレクティック形式を保つ. 上の写像 μ は, 運動量写像である. これは, シンプレクティック幾何学からの μ の意味づけであるが, quiver の表現論の立場からも 'preprojective algebra' という名前で研究されている [33]. これは, homological 次元が 2 の環である. これは, ALE 空間という (複素) 二次元の空間と対応することの反映である.

さて, シンプレクティック商

$$\mu^{-1}(0)/G_V$$

を考えたい. もしも商空間 $\mathbf{M}_{\Omega}(V, W)/G_V$ が多様体であれば, これはその余接束と同型である. しかし, 集合論的な商空間は一般には代数多様体になることが期待できない. 幾何学的不変式論 [26] の教えは, 商空間を考える代わりに商空間上の関数が何かを考えよ, と言うことである. 今の場合は, 二つの候補がある. まず第一のものは, $\mu^{-1}(0)$ をアファイン代数多様体と思って, 座標環の G_V 不変な部分環に対応するアファイン代数多様体を考えるものである. これは $\mu^{-1}(0)/\!\!/G_V$ と書かれるもので, その点は $\mu^{-1}(0)$ の閉軌道に他ならない.

もう一つは, $\mu^{-1}(0)$ 上の直線束 (今の場合, 自明なものを取る) に, G_V の作用を持ち上げ, 直線束のテンソル積の G_V 不変な切断のなす次数つき環に対応する準射影多様体を考えるものである. 自明な直線束への作用の持ち上げを, $\mathrm{GL}(V_k)$ の行列式の積と取ると, 以下のように定義される '安定 (stable)' な点の全体の商空間になる.

定義 6.3. $(B_h, i_k, j_k)_{h\in H, k\in I}$ が安定であるとは, 次の条件が成り立つときを言う: V_k の線型部分空間の集まり $(S_k)_{k\in I}$ であって,

- $S_k \subset \operatorname{Ker} j_k$ がすべての k について成り立つ
- $B_h(S_{\mathrm{out}(h)}) \subset S_{\mathrm{in}(h)}$ がすべての h について成り立つ

という条件をみたすものは, すべての k について $S_k = 0$ となるものに限る.

安定な点の全体を $\mu^{-1}(0)^{\mathrm{s}}$ と書く. よって二つめの商は, $\mu^{-1}(0)^{\mathrm{s}}/G_V$ である.

なお, 元々の [20] における反自己双対接続のモジュライ空間は, hyper-Käher 商として書かれており, 上の説明とは一見異なるが, Kempf-Ness, Kirwan らの結果により上のものと一致することが, King [19] の議論を使うと証明される.

上のようにして構成された二つの商空間をそれぞれ

$$\mathfrak{M}_0(V, W), \qquad \mathfrak{M}(V, W)$$

で表わそう. 作り方から

$$\pi\colon \mathfrak{M}(V, W) \to \mathfrak{M}_0(V, W)$$

という射影的な写像がある. 具体的には, $\mathfrak{M}(V, W)$ の点, すなわち安定な軌道に対して, その閉包に含まれるようなただ一つの閉軌道を対応させる写像である.

ここで, なぜ $\mu^{-1}(0)$ だけでなく, $\mathbf{M}_{\Omega}(V, W)$ の幾何学的不変式論による商も考えないのか疑問に思わないだろうか? 実は, その様な商を考えることは可能であるが,

- $\mathbf{M}_{\Omega}(V, W)$ の閉軌道は 0 しかない. すなわち $\mathbf{M}_{\Omega}(V, W)/\!\!/G_V$ は一点のみからなる空間である.

- 多くの場合, 安定な軌道は存在しない.

などの現象があり, あまり自然なものとは考えられないのである.

また, 次のような現象もある. quiver$\mathcal{Q}$ は, グラフの辺に向きを入れたものであったが, 異なる向きを入れることを考える. このとき quiver $\mathcal{Q}$ は変わるが, その double $\mathcal{Q}^{\#}$ は変わらない. そして, $\mathfrak{M}_0(V,W)$, $\mathfrak{M}(V,W)$ は向きの取り方によらないが, $\mathbf{M}_\Omega(V,W)$ の向きの取り方によって, 安定な点を持ったり持たなかったり変わってしまうのである.

すなわち, 次の哲学が成り立っている.

商空間 $\mathbf{M}_\Omega(V,W)/G_V$ は意味を持たないが, その余接束は定義可能である.

例を与えよう. グラフは A_1 型, すなわち頂点が一個で辺はないものとする. このとき, V, W はベクトル空間で, $i\colon W \to V$, $j\colon V \to W$ となる. $\mu = 0$ は, $ij = 0$ で, 安定であることは, j が単射であることと同値である. そこで, $\mathfrak{M}(V,W)$ からグラスマン多様体の余接束への写像を

$$\mathfrak{M}(V,W) \ni G_V \cdot (i,j) \longmapsto (\operatorname{Image} j, ji) \in T^* \operatorname{Grass}(v,W)$$

で定める. ただし,

$$T^* \operatorname{Grass}(v,W) = \{(S,\xi) \mid S \text{ は } W \text{ の } v \text{ 次元部分空間で, } \xi\colon W/S \to S\}$$

である. 容易にチェックできるように, これは同型である. また, $\mathfrak{M}_0(V,W)$ の方は,

$$\mathfrak{M}_0(V,W) \ni G_V \cdot (i,j) \mapsto ji \in \{\xi \in \operatorname{End} W \mid \xi^2 = 0,\ \operatorname{rank}\xi \le \dim V\}$$

が同型写像を与える.

7. 最高ウェイト加群と安定性

以下, グラフは Dynkin ADE 型であると仮定する.

Ringel-Lusztig の構成を見ると, V をいろいろと取り替えて初めて量子展開環が見えてくるはずである. 一方, W の方は固定しておく. では, 前節で '人工的' に導入されたかのように見える W の意味は何であろうか? 実は, 次の結果が示すとおり量子展開環の表現論と W, そして安定性が密接に関係しているのである.

定義体は $\mathbb{C}$ とする[8]. $\mathbf{E}_\Omega(V)$ 上の G_V-不変な構成可能層の複体 A を考える. Lusztig の構成により $\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})$ の元と思うことにする. A の singular support(もしくは特性多様体)$SS(A) \subset T^*\mathbf{E}_\Omega(V) = \mathbf{E}_\Omega(V) \times \mathbf{E}_\Omega(V)^*$ を考える. このとき,

$$SS(A) \times \left(0 \oplus \bigoplus_k \operatorname{Hom}(V_k, W_k)\right) \subset \mathbf{M}(V,W)$$

が $\mu^{-1}(0)$ に入っていることは, Lusztig により観察されている. このとき, 上の集合の点がすべて安定でない点になっているような A から生成される $\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})$ の $\mathbb{Q}(q)$-部分空間を I_W とおく. (W は固定し, V は動かす.)

定理 7.1 ([27, 11.7]). *I_W は, $\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})$ の左イデアルであり, 商 $\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})/I_W$ は最高ウェイトが*

$$\sum_k \dim W_k \, \Lambda_k$$

であるような $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$ の有限次元既約最高ウェイト加群と同型である. ただし, Λ_k は基本ウェイトである.

前半の証明は, singular support の評価式 [15, 第 5 章] を用いてなされ, 後半の証明は I_W が $F_k^{\dim W_k+1}$ を含んでいること, そして最高ウェイトベクトルと最低ウェイトベクトルを含んでいないことをチェックして証明できる. すべて安定性の定義から容易に従う.

'$\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})/I_W$ に $\mathbf{U}_q^+(\mathfrak{g})$ の作用を幾何学的に構成せよ' という問題は未解決であることを注意しておこう. $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$ 全体の幾何学的構成が未解決なのと同様である.

8. 量子アファイン環の有限次元表現

量子アファイン環の定義は省略する. アファイン・Lie 環は Kac-Moody Lie 環であるから, Drinfeld-Jimbo による量子展開環の定義が適用できる. 一方で, アファイン・Lie 環が, 有限次元 Lie 環 $\mathfrak{g}$ のループ Lie 環 $\mathbf{L}\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[z,z^{-1}]$ の中心拡大として定義されたように, 量子アファイン環には別の定義がある. これは, Drinfeld realization と呼ばれている. 両者の定義が同じ環を与えることは, Drinfeld[7] によってアナウンスされていたが, 詳しい証明は, Beck[1] によって与えられた.

我々の目的に都合がよいのは, Drinfeld realization の方である. 有限次元表現を調べる立場から中心拡大をしない量子ループ環 $\mathbf{U}_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ を考える. これは, パラメータ q を 1 に特殊化すると, ループ Lie 環の普遍展開環となる.

0 でない複素数 a に対し, Lie 環の準同型

$$\mathbf{L}\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}; \qquad X \otimes z^k \mapsto a^k X$$

[8] Hodge 加群を用いて書き直すか, もしくは原論文のように分解定理を使うことによって, 半単純な複体の圏で話をするか, によって Lusztig の構成は $\mathbb{C}$ 上でも出来る.

を **evaluation** 写像といい, ev_a で表わす.
$\mathfrak{g}$ の表現 V を, ev_a を通じて $\mathbf{L}\mathfrak{g}$ の表現と思ったものを $\mathrm{ev}_a^* V$ で表わす.
$\mathbf{L}\mathfrak{g}$ の有限次元表現は, 次のようにして完全に理解される.

命題 8.1. (1) $a_1, \dots, a_n$ を相異なる 0 でない複素数とし, $V_1, \dots, V_n$ を $\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現とする. このとき

$$\mathrm{ev}_{a_1}^* V_1 \otimes \cdots \otimes \mathrm{ev}_{a_n}^* V_n$$

は $\mathbf{L}\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現である.
(2) $\mathbf{L}\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現は上のやり方で必ず得られる.

さて, 以上の q 類似を考えたい. ところが, evaluation 写像の q 類似は, $\mathfrak{g}$ が A_n 型のときにしか存在しないことが知られており, これが $\mathbf{U}_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ の表現論を難しくした. 実は, Drinfeld-Chari-Pressley[7, 5] によって, $\mathbf{U}_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ の有限次元既約表現は, 上の定理で与えられるようなパラメータ (a_i, V_i という意味) と同じだけのパラメータで分類されることが証明されている. (いわゆる Drinfeld 多項式である.) しかし, 具体的に有限次元既約表現を構成することはなされていなかった. 例えば, その指標は計算されていない. 次の章で述べる結果を用いると, 指標が箙多様体の交叉コホモロジーの次元を用いて書き表すことが出来るのである.

9. 箙多様体と量子アファイン環

以上の準備のもとに, いよいよ箙多様体を用いた量子アファイン環の幾何学的な構成を述べる.
V が V' の部分空間 (すなわち各頂点 k ごとに V_k が V'_k の部分空間) であるとすると, $\mathbf{M}(V, W)$ の中の $\mu^{-1}(0)$ は, $\mathbf{M}(V', W)$ の中の $\mu^{-1}(0)$ の部分多様体と思うことが出来る. すると

$$\mathfrak{M}_0(V, W) \to \mathfrak{M}_0(V', W)$$

という写像が自然に定義される. この写像が closed immersion であることは容易に分かる. さらに, グラフが Dynkin ADE 型であるという仮定を用いると, 十分大きな V で $\mathfrak{M}_0(V, W)$ が stabilize することも分かる. これを

$$\mathfrak{M}_0(\infty, W)$$

で表わすことにする. また, $\mathfrak{M}(V, W)$ の方は, 高々有限個の V を除き空集合となる. そこで, すべての非交和を取り

$$\mathfrak{M}(W)$$

で表わす. 写像 π は,

$$\mathfrak{M}(W) \to \mathfrak{M}_0(\infty, W)$$

を定める. これも π で表わす. そこで Steinberg 多様体の類似として

$$Z(W) = \mathfrak{M}(W) \times_{\mathfrak{M}_0(\infty, W)} \mathfrak{M}(W) = \{(x^1, x^2) \in \mathfrak{M}(W) \times \mathfrak{M}(W) \mid \pi(x^1) = \pi(x^2)\}$$

を導入する.
$\mathfrak{M}_0(\infty, W)$, $\mathfrak{M}(W)$ には, $G_W = \prod_{k \in I} \mathrm{GL}(W_k)$ と $\mathbb{C}^*$ の作用がある. G_W の方は, (6.1) への自然な作用が誘導する作用であり, $\mathbb{C}^*$ の方は, B_h, i_k, j_k を一斉にスカラー倍するという作用である.

定理 9.1 ([28, 30])**.** 次の可換図式がある.

$$\begin{array}{ccc} K^{G_W \times \mathbb{C}^*}(Z(W)) & \longrightarrow & H_{\dim Z(W)}(Z(W), \mathbb{R}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{U}_q^{\mathbb{Z}}(\mathbf{L}\mathfrak{g}) & \longrightarrow & \mathbf{U}(\mathfrak{g}) \end{array}$$

ただし, $\mathfrak{g}$ は Dynkin グラフに対応した単純 Lie 環であり, $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ はその普遍展開環, そして $\mathbf{U}_q^{\mathbb{Z}}(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ は $\mathbf{U}_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ のある $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$-部分環である. 下の矢印は, $q = 1$ としてループ Lie 環の普遍展開環へ写像し, さらに $z = 1$ とおくことにより, $\mathfrak{g}$ の普遍展開環へ写像するものである. また, 上向き矢印は同型ではない.

これは, 例 3.1 の類似である.
証明は, $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$, $\mathbf{U}_q^{\mathbb{Z}}(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ の生成元の行き先を定め, 関係式をチェックすることで与えられる. 生成元の行き先の定め方は, 若干の umbiguity を除いて canonical なものである. 右側のときは, チェックは比較的容易で, [28] でなされた. 左側では, 関係式は一つを除き直接チェックすることが出来る. 残った一つの関係式 ($\mathfrak{sl}_2$ で言うところの $[e, f] = h$) は, すでに [10, 37] によって計算がされている $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ の場合に帰着させる. この帰着には, 合成積を部分多様体に制限するとどうなるか, G 主束に lift するとどうなるか, という関手的な性質を調べることでなされる.

References

[1] J. Beck, *Braid group action and quantum affine algebras*, Comm. Math. Phys. **165** (1994), 555–568.

[2] A. Beilinson, *Coherent sheaves on $\mathbf{P}^n$ and problems in linear algebra*, Func. Anal. and its Appl., **12** (1979), 214–216.

[3] I.N. Bernshtein, I.M. Gel'fand, and S.I. Gel'fand, *Algebraic bundles over $\mathbf{P}^n$ and problems of linear algebra*, Func. Anal. and its Appl., **12** (1979), 212–214.

[4] W. Borho and R. MacPherson *Partial resolutions of nilpotent varieties*, Astérisque **101–102** (1983), 23–74.

[5] V. Chari and A. Pressley, *A guide to quantum groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[6] N. Chriss and V. Ginzburg, *Representation theory and complex geometry*, Progress in Math. Birkhäuser, 1997.

[7] V.G. Drinfel'd, *A new realization of Yangians and quantized affine algebras*, Soviet math. Dokl. **32** (1988), 212–216.

[8] V. Ginzburg, *$\mathfrak{g}$-modules, Springer's representations and bivariant Chern classes*, Adv. in Math. **63** (1986), 1–48.

[9] ———, *Geometric methods in representation theory of Hecke algebras and quantum groups*, in "Representation theories and algebraic geometry (Montreal, PQ, 1997)", Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998.

[10] V. Ginzburg and E. Vasserot, *Langlands reciprocity for affine quantum groups of type A_n*, International Math. Research Notices (1993) No.3, 67–85.

[11] R. Hotta and M. Kashiwara, *The invariant holonomic system on a semisimple Lie algebra*, Invent. Math., **75** (1984), 327–358.

[12] N. Iwahori, *On the structure of the Hecke ring of a Chevalley group over a finite field*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec 1A, **10** (1964), 215–236.

[13] M. Kapranov, *On the derived categories of coherent sheaves on some homogeneous spaces*, Invent. Math. **92** (1988), 479–508.

[14] ———, *Eisenstein series and quantum affine algebras*, J. Math. Sci. **84** (1997), 1311–1360.

[15] M. Kashiwara and P. Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Springer-Verlag, 1990.

[16] M. Kashiwara and T. Tanisaki, *The characteristic cycles of holonomic systems on a flag manifold* Invent. Math., **77** (1984), 185–198.

[17] D. Kazhdan and G. Lusztig, *A topological approach to Springer's representations*, Adv. in Math. **38** (1980), 222–228.

[18] ———, *Proof of the Deligne-Langlands conjecture for Hecke algebras*, Invent. Math. **87** (1987), 153–215.

[19] A. King, *Moduli of representations of finite dimensional algebras*, Quarterly J. of Math. **45** (1994), 515–530.

[20] P.B. Kronheimer and H. Nakajima, *Yang-Mills instantons on ALE gravitational instantons*, Math. Ann. **288** (1990), 263–307.

[21] G. Lusztig, *Green polynomials and singularities of unipotent classes*, Adv. in Math. **42** (1981), 169–178.

[22] ———,

[23] ———, *Canonical bases arising from quantized enveloping algebras*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 447–498.

[24] ———, *Intersection cohomology methods in representation theory*, Proc. of the International Congress of Mathematicians (Kyoto 1990), 155–174.

[25] G. Lusztig and D.A. Vogan, *Singularities of closures of K-orbits on flag manifolds*, Invent. Math. **71** (1983), 365–379.

[26] D. Mumford, J. Fogarty and F. Kirwan, *Geometric invariant theory*, Third Enlarged Edition, Springer-Verlag, 1994.

[27] H. Nakajima, *Instantons on ALE spaces, quiver varieties, and Kac-Moody algebras*, Duke Math. **76** (1994), 365–416.

[28] ———, *Quiver varieties and Kac-Moody algebras*, Duke Math. **91** (1998), 515–560.

[29] ———, *Lectures on Hilbert schemes of points on surfaces*, Univ. Lect. Ser. **18**, AMS, 1999.

[30] ———, *Quiver varieties and finite dimensional representations of quantum affine algebras*, preprint, math.QA/9912158.

[31] ———, *Quiver varieties and finite dimensional representations of quantum affine algebras* (日本語解説), preprint, `http://www.kusm.kyoto-u.ac.jp/~nakajima/TeX-j.html`

[32] C.M. Ringel, *Hall algebras and quantum groups*, Invent. Math. **101** (1990), 583–592.

[33] ———, *The preprojective algebra of a quiver*, CMS conf. Proc. **24**, AMS, 1998, 467–480.

[34] G. Shimura, *Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic FUnctions*, Princeton Univ. Press, 1971.

[35] T. Tanisaki, *Hodge modules, equivariant K-theory and Hecke algebras*, Publ. RIMS **23** (1987), 841–879.

[36] 谷崎 俊之/堀田 良之, *D* 加群と代数群, シュプリンガー・フェアラーク東京, 1995.

[37] E. Vasserot, *Affine quantum groups and equivariant K-theory*, Transformation Groups **3** (1998), 269–299.

E-mail address: `nakajima@kusm.kyoto-u.ac.jp`