長さが最短の線で二点を結ぶ

中島 啓
京都大学理学研究科

平成 11 年 7 月 23 日

直線は, 平面上の二点を結ぶ長さが最短の線であるという特徴づけを持ちます. この講義では, これを一般化した問題, 例えば曲面 (より一般に多様体) 上の二点のときはどうか, 面積最少の面は何か, といったことについて紹介します.

1 直線

直線が平面上の二点を結ぶ長さが最短の線であるということは直感的には明らかだと思いますが, 未だかつて証明を習った覚えがありませんし, 自分で講義で証明をした覚えがありません. そこで, ここでは少し丁寧に証明を与えようと思います.

まず, 曲線とは何かを定義します.

定義 1.1 平面上の二点 P, Q を結ぶ曲線とは, 写像 $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ であって, $c(a) = P$, $c(b) = Q$ であり, さらに $c(t) = (x(t), y(t))$ と表わしたときに, x, y が連続であるもののことを言います.

しかし, この定義のままでは非常にぐちゃぐちゃと曲がっているために長さが測れない可能性があります. そこで, ここでは次の定義を採用します.

定義 1.2 平面上の二点 P, Q を結ぶ長さの測れる曲線とは, 写像 $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ であって, $c(a) = P$, $c(b) = Q$ であり, さらに $c(t) = (x(t), y(t))$ と表わしたときに, x, y が微分可能でその導関数が連続であるもののことを言います.

実際には, 例えば有限個の点で折れ曲がってそれ以外の点で微分可能な曲線, などもう少し広いクラスの曲線が長さを持ちますが, 簡単のためにここでは, 上のものだけを考えることにします.

このとき, 曲線 c の長さ $L(c)$ を

$$L(c) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

によって定義します. $(x'(t), y'(t)$ は, c の速度ベクトルであり, $\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ はその長さ, すなわち速さです. 上の定義は, 速さを積分することで道のりが得られるということを表わしています.

最初に「直線が平面上の二点を結ぶ長さが最短の線である」といったのは, 次の定理が成り立つと言うことです.

定理 1.3 全ての P と Q を結ぶ長さの測れる曲線 c にたいして, 不等式

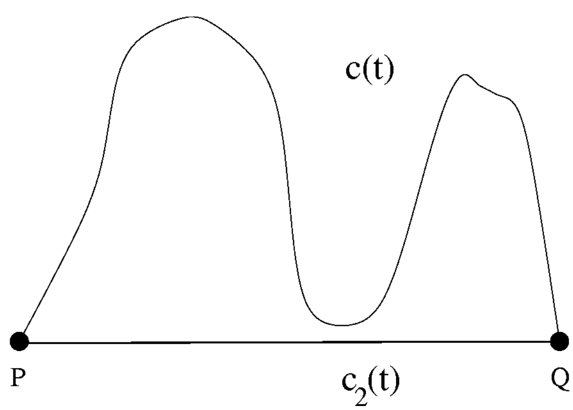
$$L(c) \geq P \text{と} Q \text{を結ぶ直線の長さ}$$

が成り立つ. さらに等号が成立するのは c が直線のときである.

ただし, 直線とは言っても, 速度が一定のもの $(c(t) = (1-t)P + tQ)$ とは限りません. 直線に沿って進む限り, ゆっくり行こうが早く行こうが, 途中で速さを変えようが, 戻らない限りは長さ=道のりは変わりません. 従って, 最後の c が直線のときであるといったときには, 直線に沿って戻らずに進んでいると言うことを意味します. 証明の中でよりはっきりとします.

証明. 平行移動と回転で曲線の長さが変わらないことに注意すると, $P = (0,0)$, $Q = (L,0)$ $(L > 0)$ と仮定して一般性を失わない.

c を P と Q を結ぶ曲線とし, $c(t) = (x(t), y(t))$ と表わす. このとき新たな直線 c_2 を $c_2(t) = (x(t), 0)$ で定める. これは, c を x 軸に射影してできる曲線である. 最初に P, Q が, x 軸上にあるようにしておいたから, c_2 も P と Q を結ぶ曲線である.



さらに

$$L(c) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt \geq \int_a^b \sqrt{x'(t)^2}dt = L(c_2)$$

が成り立つ. 等号が成立するのは, $y'(t) = 0$ が全ての t について成り立つときである. $y(a) = y(b) = 0$ であるから, これは $y(t) = 0$ のとき, すなわち曲線がもともと x 軸の上にあったときに他ならない.

さらに

$$\sqrt{x'(t)^2} = |x'(t)| \geq x'(t)$$

が成り立つ. 等号成立は, $x'(t) \geq 0$ のときである. よって,

$$L(c_2) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2} dt \geq \int_a^b x'(t) dt = x(b) - x(a) = L$$

が成り立つ. 上の不等式と組み合わせて,

$$L(c) \geq L$$

が証明された. これが, 示したい不等式であった.

さらに等号が成立するのは, $y(t) = 0$ であり, $x'(t) \geq 0$ のときである. これは, 直線に沿って戻らずに進んでいることを意味する. $\square$

2　極小ネットワーク (Steiner Problem)

これから「二点を結ぶ長さが最短の曲線は直線である」と言うことを様々な方向に拡張していきます. まず最初は, 二点でなく, 三点, 四点, $\cdots$ ではどうかです.

問題 2.1 平面上に与えられた有限個の点に対し, それら全てを幾つかの (長さが測れる) 曲線で結ぶことを考える. その中で, 長さの和が最短のものを求めよ.

この問題には, 二通りの解釈があります.

1. 曲線は, 最初に与えられた点以外では分岐を許さない.
2. 曲線は, 最初に与えられた点以外では分岐をしてもよい.

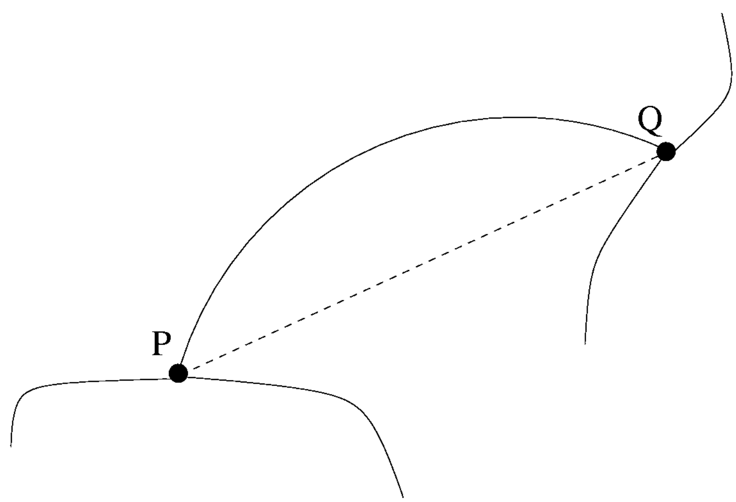
答えは, それぞれの解釈によって異なり, 一般には 2 の解釈の方が短い答えを与えます. ここでは, 2 の解釈を採用します.

この問題は, 例えば日本の都市を結ぶ道路網を長さが最短になるように作れ, といった実際的な問題を抽象化したものと言えるでしょう. もっとも, 山や川がありますから, あまりに抽象化しすぎている, という批判はあるでしょうが....

まず最初に次のことに注意しましょう.

命題 2.2 上の問題の答えは, 幾つかの直線からなる.

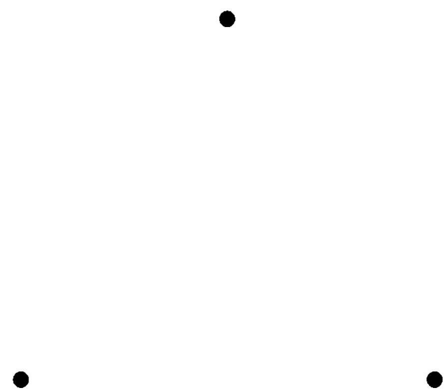
証明. 幾つかの曲線 $c_1, c_2, \ldots$ が, 上の問題の答えになっていたとする. ある曲線 c_i の上の二つの分岐点でその間に分岐点がないもの, P, Q を取る. P と Q を c_i で結ぶ代わりに P と Q を直線で結んだものに取り替える. すると, 最初から P と Q の間が直線で結ばれていたとき以外は, 長さの和は短



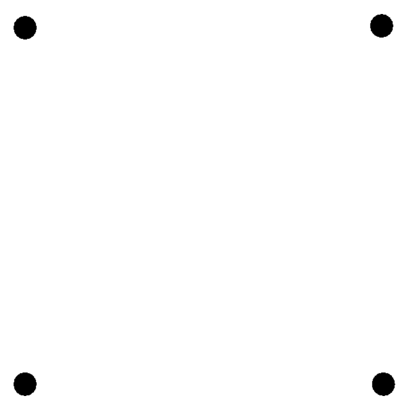
くなる. これは最初に $c_1, c_2, \ldots$ が問題の答えになっていたことに矛盾する. よって, P と Q の間は直線で結ばれていなければいけない. □

この命題により, 直線で結ぶことだけを考えればよくなったのでだいぶ単純化されてきました.

では, 具体的に点を与えて考えてみましょう. 正三角形の頂点のときにはどうでしょうか？ 答えを下に書き込んでみてください.



正解が答えられたでしょうか？ それでは, 正四角形のときはどうですか？

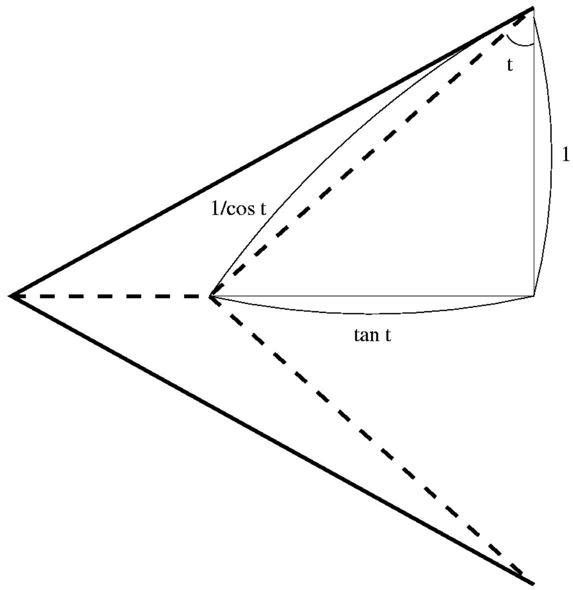


どうでしたか. 意外な答えだったでしょうか？

次の命題が成り立ちます.

命題 2.3 最初に与えられた点でない分岐点において, その点から出ている直線の本数はちょうど3本であり, それぞれの間の角はちょうど $\frac{2\pi}{3}$ である. また, 最初に与えられた点から出ている直線が二本だったとして, その間の成す角は, $\frac{2\pi}{3}$ 以上である.

証明. 分岐点 P からのびた二本の直線を考え, その間には別の直線は入っていないとする. 二本の直線を下図の点線のように少し変形することを考える. 図のように角度 t を取る. 最初の角度を t_0 とする. 図から $t_0 > t$ である. このとき最初の直線の長さの和 L_0 から新しく変形した直線の長さの和 L



を引いたものは

$$L_0 - L = \tan t - \tan t_0 + \frac{2}{\cos t_0} - \frac{2}{\cos t}$$

で与えられる. もともとが長さの和が最小であったとすると, $L_0 - L \leq 0$でなければならない. これは, $L_0 - L$をtで微分して, $t = t_0$とおいたものが≥ 0であることを意味する. そこで上の式を微分してみると

$$\frac{1}{\cos^2 t} - \frac{2\sin t}{\cos^2 t}$$

である. $t = t_0$でこの微分が≥ 0となる条件は, $t_0 \leq \frac{\pi}{6}$である. 二つの直線の間のなす角度θでいうと, $\theta \geq \frac{2\pi}{3}$である.

もしも分岐点からn本の直線が出ていたとすると, どれか二つの間の角度は必ず$\frac{2\pi}{n}$以下になってしまう. 上と比べると$n \leq 3$でなければならないことが分かった. さらに$n = 3$のときも$\frac{2\pi}{3}$未満の角があってはならないから, それぞれちょうど$\frac{2\pi}{3}$をなしていないといけない. □

じつは, この問題には答えを与えるアルゴリズムがあることが知られています. しかし, 最初に与えられた点の数が増えるに従い, 計算量が膨大に増えていきます. 有効なアルゴリズムを与えることは計算数学の重要な問題です.

演習問題 2.4 三点を結ぶ幾つかの曲線で, 長さの和が最小のものを求めなさい.

3 球面上の二点を長さが最短の曲線で結ぶ

次に平面上でなく, 球面の上にのった二点を結ぶ長さが最短の曲線は何かを考えましょう. 例えば, 地球上の二点 (地球は仮想的に球面であると考えます) を結ぶ最短の曲線は二点を通る大円であることはよくご存知かと思います. 例えば, 日本からヨーロッパへ向かう飛行機は, ロシアのかなり北の方の上空を飛びますが, これはそれが最短に近いからです. これが回り道のように思えるのは, 地球が丸いことを忘れて地図上で直線で結んだものが最短であると誤解しているためです. また, 地球儀の上に二つの点を取り, その間に糸をピンと張ると大円になることも実験的に確かめられます. しかし, ここでは球面上の二点を結ぶ最短の直線が大円であることを数学的に証明しましょう. 球面は, 半径 1 とし, 式 $x^2+y^2+z^2=1$ で表わされているとします.

球面上に曲線が与えられたとします. これは, 写像 $c\colon [a,b]\to\mathbb{R}^3$ であって, $c(t)=(x(t),y(t),z(t))$ と表わしたときに, $x(t)^2+y(t)^2+z(t)^2=1$ がなりたっているもののことです. 前と同様に, x, y, z は微分可能で導関数が連続であるとします. このとき曲線の長さは,

$$L(c)=\int_a^b \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}dt$$

で与えられます.

定理 3.1 全ての P と Q を結ぶ長さの測れる球面曲線 c にたいして, 不等式

$$L(c)\geq P \text{ と } Q \text{ を結ぶ大円の長さ}$$

が成り立つ. さらに等号が成立するのは c が大円 (の一部) のときである.

まず最初に与えられた二点 P,Q は, 共に xz-平面にのっていると仮定します. 球面を回転することによってこのように仮定しても一般性を失わないことが分かります.

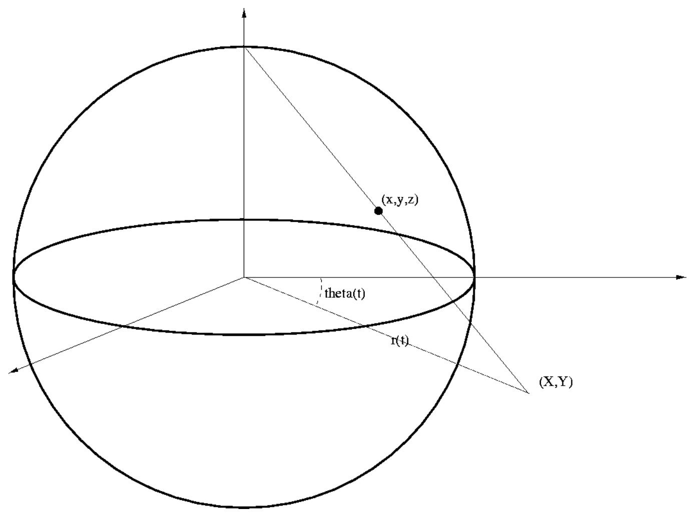
このままの定義では, 計算しにくいので球面の点を平面の点に '射影' して考えます. 球面の点 (x,y,z) に対して, 次ページの図のようにその点と北極を結んだ直線が xy-平面とぶつかる点を (X,Y) とします.

演習問題 3.2 (x,y,z) は, (X,Y) を用いると,

$$x=\frac{2X}{X^2+Y^2+1},\quad y=\frac{2Y}{X^2+Y^2+1},\quad z=\frac{X^2+Y^2-1}{X^2+Y^2+1}$$

と表わされることを証明しなさい.

球面の点を上のように xy-平面に射影することを stereographic projection と言います.



上のやり方で c を平面に射影した曲線 $(X(t), Y(t))$ を考えます. すると,

$$x'(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{2X(t)}{X(t)^2+Y(t)^2+1}\right) = 2\frac{X'(t)(X(t)^2+Y(t)^2+1) - 2X(t)(X(t)X'(t)+Y(t)Y'(t)}{(X(t)^2+Y(t)^2+1)^2}$$
$$y'(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{2Y(t)}{X(t)^2+Y(t)^2+1}\right) = 2\frac{Y'(t)(X(t)^2+Y(t)^2+1) - 2Y(t)(X(t)X'(t)+Y(t)Y'(t)}{(X(t)^2+Y(t)^2+1)^2}$$
$$z'(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{X(t)^2+Y(t)^2-1}{X(t)^2+Y(t)^2+1}\right) = 4\frac{X(t)X'(t)+Y(t)Y'(t)}{(X(t)^2+Y(t)^2+1)^2}$$

が成り立ちます. 従って,

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2 = (\text{途中計算略}) = 4\frac{X'(t)^2+Y'(t)^2}{(X(t)^2+Y(t)^2+1)^2}$$

となります.

さらに, $X(t) = r(t)\cos\theta(t)$, $Y(t) = r(t)\sin\theta(t)$ によって, $r(t)$ と $\theta(t)$ を定めます. (このような表わし方を, 曲座標と呼びます.) すると

$$X'(t) = r'(t)\cos\theta(t) - r(t)\sin\theta(t)\,\theta'(t), \quad Y'(t) = r'(t)\sin\theta(t) + r(t)\cos\theta(t)\,\theta'(t)$$

が成り立ちますから,

$$X'(t)^2 + Y'(t)^2 = r'(t)^2 + r(t)^2\theta'(t)^2$$

となります. 二つをまとめて,

$$\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2} = 2\frac{\sqrt{r'(t)^2+r(t)^2\theta'(t)^2}}{(r(t)^2+1)}$$

です.

さて, 今, 仮定から $\theta(a)=0$, $\theta(b)=0$ です. そこで, 平面上の二点を結んだときと同様に, 新しい曲線 $c_2(t)$ を

$$r_2(t)=r(t),\quad \theta_2(t)=0$$

となるように定めます. 従って

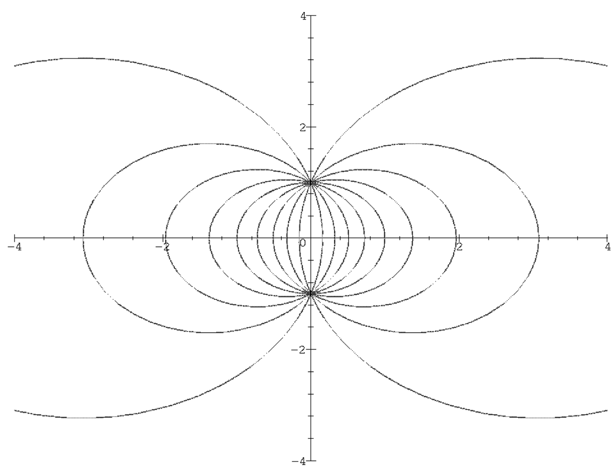
$$c_2(t)=(x_2(t),y_2(t),z_2(t));\qquad x_2(t)=\frac{2r(t)}{r(t)^2+1},\quad y_2(t)=0,\quad z_2(t)=\frac{r(t)^2-1}{r(t)^2+1}$$

です. 仮定からこの曲線も最初に与えられた二点を結んでいます.

このとき

$$L(c)=\int_a^b 2\frac{\sqrt{r'(t)^2+r(t)^2\theta'(t)^2}}{(r(t)^2+1)}dt \geq \int_a^b 2\frac{\sqrt{r_2'(t)^2}}{(r_2(t)^2+1)}dt=L(c_2)$$

が成り立ち, 等号が成立するのは, $r(t)\theta'(t)=0$ のときです. これは, $Y'(t)=0$ を導き, 従って, $y'(t)=0$ も導きます. すなわち, $y(t)=0$ で, この曲線は, xz 平面と球面の交わり, すなわち大円 (の一部) です.



演習問題 3.3 他の大円 (北極と南極を結ぶとは限らない) が stereographic projection で XY-平面にどのように射影されるか調べなさい.

4　ポアンカレ円板-非ユークリッド幾何学

前節では, 球面から出発し, それを平面に射影して, 曲線の長さを計算しました. ここで発想を転換し, 球面は忘れることにして, XY-平面の中の曲線 $c(t) = (X(t), Y(t))$ について, 曲線の長さを

$$L(c) = 2\int_a^b \frac{\sqrt{X'(t)^2 + Y'(t)^2}}{X(t)^2 + Y(t)^2 + 1} dt$$

で定義することを考えます. このときにも, $L(c)$ を最小にするような c は何かと言うことは意味がある問題です. さらに, それから進んで直線の代わりに上のような c, すなわち大円, を考えることによって, 幾何学を展開することが出来ます.

曲線の長さを定義することを, 空間にリーマン計量を与えるといいます. リーマン計量を与えて幾何学を展開するのが, リーマン幾何学です. いわゆるユークリッド幾何学とは異なった幾何学になります.

ここでは, 上の定義を少し変えた

$$L(c) = 2\int_a^b \frac{\sqrt{X'(t)^2 + Y'(t)^2}}{1 - X(t)^2 - Y(t)^2} dt$$

を考えましょう. ただし, 曲線は半径 1 の円板の内部にあるものだけを考えます. 従って, 分母の $1 - X(t)^2 - Y(t)^2$ はつねに正です. このように曲線の長さを定めて展開された幾何学を, 双曲幾何学といいます. 半径 1 の円板の内部に, 上のようにリーマン計量を与えたものをポアンカレ円板といいます. 一番簡単な非ユークリッド幾何学の例です.

原点から $(B, 0)$ に向かう直線 $X(t) = t$, $Y(t) = 0$, $(t \in [0, B])$ の長さは,

$$L(c) = 2\int_0^B \frac{dt}{1 - t^2} = \left[\log\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\right]_0^B = \log\left(\frac{1+B}{1-B}\right)$$

で与えられます. 特に, $B \to 1$ のとき, $L(c) \to \infty$ となります. これは, この幾何学では, 点 $(0, 1)$ が無限のかなたにあることを意味しています. (球面では, どんな二点の間の距離も π 以下であったことを思い出しましょう.)

さて双曲幾何学で長さを最短にする曲線が何であるか考えましょう.

命題 4.1 原点 $(0, 0)$ と x 軸上にある点 $(B, 0)$ を結ぶ長さの測れる曲線 c にたいして, 不等式

$$L(c) \geq \log\left(\frac{1+B}{1-B}\right)$$

が成り立つ. さらに等号が成立するのは c が直線 (の一部) のときである.

証明. $c(t)=(X(t),Y(t))$ が与えられた曲線のときに, $c_2(t)=(X(t),0)$ で新しい曲線を定義する. 仮定からこの曲線も最初に与えられた二点を結ぶ. さらに

$$L(c)=2\int_a^b \frac{\sqrt{X'(t)^2+Y'(t)^2}}{1-X(t)^2-Y(t)^2}dt \geq 2\int_a^b \frac{\sqrt{X'(t)^2}}{1-X(t)^2}dt = L(c_2)$$

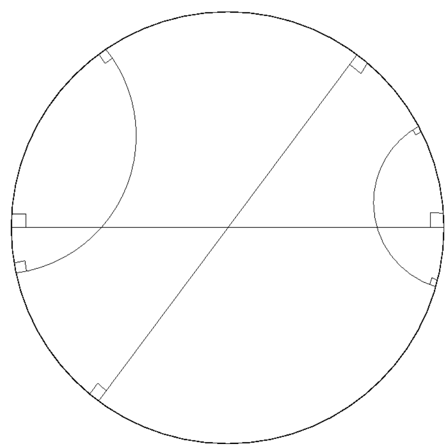
が成り立つ. 等号成立は, $Y(t)=0$ のときである. さらに,

$$L(c_2) \geq 2\int_a^b \frac{X'(t)}{1-X(t)^2}dt = 2\int_{X=0}^{X=B} \frac{dX}{1-X^2} = \log\left(\frac{1+B}{1-B}\right)$$

が成り立つ. 等号成立は, $X'(t)\geq 0$ のときである. よって主張が証明された. □

より一般の二点を結ぶ最短線はなんでしょうか？

定理 4.2 ポアンカレ円板における長さが最短の曲線は, 原点を通る直線または境界の円周 $x^2+y^2=1$ と垂直に交わる円 (の一部) である.



球面のときには, まず球面を回転させて, 簡単な場合に帰着させて大円が最短線であることを証明しました. 同様にポアンカレ円板を "回転" して, 上の命題で調べた場合に帰着させることによって上の定理を証明します.

ポアンカレ円板の '回転' とは関数論における一次分数変換です. 以下, 詳しい計算は省略しますが, 基本的には全て複素数の計算に慣れていればチェックできますので, 各自やってみましょう.

ポアンカレ円板の点 (X,Y) を $z=X+iY$ によって複素数と対応させます. 曲線 $(X(t),Y(t))$ が与えられたとき, $z(t)=X(t)+iY(t)$ を考えると,

$$L(c)=2\int_a^b \frac{|z'(t)|}{1-|z(t)|^2}dt$$

と表わされます.

複素数 a, b で $|a|^2 - |b|^2 = 1$ を満たすものについて写像

$$z \mapsto \frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}$$

を考えます. (ここで, $\overline{\ }$ は共役複素数を表わします.)

定理 4.2 は次の命題から従います.

命題 4.3 (1) 上の変換は, ポアンカレ円板をそれ自身に写す.

(2) 上の変換で曲線の長さは保たれる.

(3) a, b を適当に取れば, ポアンカレ円板のどんな点も原点 0 に写せる.

(4) 上の変換で原点を通る直線は, 原点を通る直線または境界の円周 $x^2+y^2=1$ と垂直に交わる円に写る.

証明. (1) まず, 分母が 0 にならないことをチェックする. もしも分母が 0, すなわち $\overline{b}z+\overline{a}=0$ になったとすると

$$|z|^2 = \left|-\frac{\overline{a}}{\overline{b}}\right|^2 = \frac{|a|^2}{|b|^2} = \frac{|b|^2+1}{|b|^2} > 1$$

となる. ところが, もともと z は半径 1 の円板の内部にあったから $|z|<1$ であり, 上の式と矛盾する.

次に, $\frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}$ の大きさを調べる.

$$1 - \left|\frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}\right|^2 = (\text{途中計算略}) = \frac{1}{|\overline{b}z+\overline{a}|^2}(1-|z|^2)$$

である. もともと, $1-|z|^2>0$ であるから, $1-\left|\frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}\right|^2>0$ である. 従ってポアンカレ円板は, ポアンカレ円板に写される.

(2) 曲線 $(X(t), Y(t))$ にたいして上のように $z(t) = X(t)+iY(t)$ とおく. さらに, $w(t) = \dfrac{az(t)+b}{\overline{b}z(t)+\overline{a}}$ とおく. すると

$$w'(t) = \left(\frac{az(t)+b}{\overline{b}z(t)+\overline{a}}\right)' = (\text{途中計算略}) = \frac{z'(t)}{(\overline{b}z(t)+\overline{a})^2}$$

となる. また,

$$1-|w(t)|^2 = 1 - \left|\frac{az(t)+b}{\overline{b}z(t)+\overline{a}}\right|^2 = (\text{上の計算と同様}) = \frac{1-|z(t)|^2}{|\overline{b}z(t)+\overline{a}|^2}$$

となる. 従って

$$\frac{|w'(t)|}{1-|w(t)|^2}=\frac{|z'(t)|}{1-|z(t)|^2}$$

が成り立つ. よって, 曲線の長さは上の変換で不変である.

(3) 最初に与えられた点に対応する複素数を z とする. このとき a, b を

$$a=\frac{1}{\sqrt{1-|z|^2}},\qquad b=-\frac{z}{\sqrt{1-|z|^2}}$$

によって定める. すると,

$$az+b=\frac{z}{\sqrt{1-|z|^2}}-\frac{z}{\sqrt{1-|z|^2}}=0$$

であり,

$$|a|^2-|b|^2=\frac{1}{1-|z|^2}-\frac{|z|^2}{1-|z|^2}=1$$

を満たす. よって, この a, b を用いて上の変換を考えれば, z は原点に写される.

(4) $w=\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}$ とおくと,

$$z=\frac{\bar{a}w-b}{-\bar{b}w+a}$$

がなりたつ. z が原点を通る直線を動くと, ある複素数 $\alpha\neq 0$ があって, $z=\alpha t$ (t は実数) と書ける. 従って $\overline{z/\alpha}=z/\alpha$ となる. 従って

$$\overline{\left(\frac{\bar{a}w-b}{\alpha(-\bar{b}w+a)}\right)}=\frac{\bar{a}w-b}{\alpha(-\bar{b}w+a)}$$

すなわち

$$\alpha(a\overline{w}-\bar{b})(-\bar{b}w+a)=\overline{\alpha}(-b\overline{w}+\overline{a})(\overline{a}w-b)$$

が成り立つ. これを整理すれば

$$\left|w-\frac{\overline{\alpha}b^2-\alpha a^2}{\overline{\alpha}\overline{a}b-\alpha a\bar{b}}\right|^2=\left|\frac{\overline{\alpha}b^2-\alpha a^2}{\overline{\alpha}\overline{a}b-\alpha a\bar{b}}\right|^2-1$$

となって円を表わす. ただし $\overline{\alpha a}b-\alpha a\bar{b}=0$ のときは原点を通る直線になる. $x^2+y^2=1$ と垂直に交わることは, 上の変換が角度を保つことから従う. 角度を保つことの証明は省略. (複素正則関数は, 角度を保つことからの帰結である.) □

5　球面の正確な地図を書く

球面に戻り, 次の問題を考えます.

問題 5.1 7ページで考えた変数変換よりもうまい変数変換 $(x, y, z) \to (X, Y)$ を取れば, 曲線の長さが

$$L(c) = \int_a^b \sqrt{X'(t)^2 + Y'(t)^2} dt \tag{5.2}$$

となるようにできるのではないだろうか？あるいは球面全体では無理でも, 球面の一部だけならばどうか？

もしこれができれば, 最短線は直線で表わされることになります. 地球を球面と考えれば, これは理想的に正確な地図です. 地球上の二点間の距離が, その地図上では正確に地図上の二点間の距離で表わされています.

例えば, 球面でなくて円柱面 (横の面のことです) であったとしたらその様な変数変換は可能です. 実際, 円柱の回りに紙を貼ることが出来ますが, 円柱上のの点を紙の点に対応させるのがその様な変数変換です. 特に円柱上の二点を結ぶ最短線を簡単に求めることが出来ます.

今, 作られている地図にはいろいろな図法がありますが, どんな図法にせよ, なにかしらの歪みがどこかに現れます. これは, 上の問題が否定的であることの帰結なのですが, それではどうして上の問題は否定的なのでしょうか？

実はそれは, 球面と平面では曲率が違うから, と微分幾何学では説明されます. ここでは, 曲率の定義を述べるだけの時間がありませんが, 曲率のアイデアを用いて, 上の問題が否定的であることを説明してみましょう.

1. まず球面の三角形を球面の上の三点をそれぞれの間を大円で結んだものと定義します.
2. もしも上の問題のような変換 $(x, y, z) \to (X, Y)$ が存在すれば, 球面の三角形は, 平面上の通常の三角形に写されます. これは, 最短線が最短線に写されること, (5.2) では最短線が直線であることから分かります.
3. 上の問題のような変換であれば, 各頂点において二辺の間の成す角度は保たれます.
4. 球面上では, 三角形の内角の和はつねに π よりも大きく, 平面上では三角形の内角の和はつねに π に等しい. よって上の 2,3 に矛盾するので, 問題のような変換は存在しません.

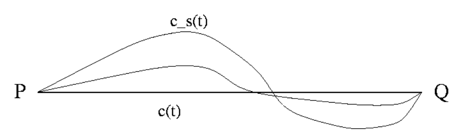
球面上では, 三角形の内角の和はつねに π よりも大きいことの証明は演習問題としておきましょう. 具体的に書いていろいろな球面の三角形で確かめてみましょう.

同様の問題は, ポアンカレ円板のときにも考えられます. この場合も答えは否定的で, この場合はポアンカレ円板の三角形の内角の和がつねに π よりも小さいことから分かります.

6　変分法入門

ここでは, 再び平面上の二点を結ぶ長さが最短の曲線の問題に戻ります. 高校の微分では, 関数の最大最小を調べるのに導関数が 0 になるところを探すことを学びます. 同じ方法を今の場合に考えるのが'変分'です.

c を二点 P, Q を結ぶ長さが最短の曲線とします. 既にこれが直線であることを知っていますが, 取り敢えずそれを忘れることにします. c を少し動かすことを考えます. それは, パラメータ $s \in (-1, 1)$ を持った曲線の族 $c_s \colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ であり, $c_0(t) = c(t)$ となり, どんな $s \in (-1, 1)$ にたいしても $c_s(a) = P$, $c_s(b) = Q$ となっているもののことです. さらに, $C(s, t) = c_s(t)$ で二変数関数 C を定めたときに, C は全微分可能 (特に s に関しても微分可能) とします.



座標を用いて $c(t) = (x(t), y(t))$, $c_s(t) = (x_s(t), y_s(t))$ と表わします. 各 c_s の長さは,

$$L(c_s) = \int_a^b \sqrt{x_s'(t)^2 + y_s'(t)^2}\,dt$$

で与えられます. 変数が二個出てくるので, どちらの変数に関する微分か注意しましょう. 以下, t に関する微分は $'$ で表わし, s に関する微分は d/ds で表わすことにします. 最初の仮定から c は長さが最短ですから,

$$\left.\frac{d}{ds}L(c_s)\right|_{s=0} = 0$$

が成り立ちます. 左辺を計算しましょう. 以下簡単のために $\sqrt{x_s'(t)^2 + y_s'(t)^2} \neq 0$ と仮定します.

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{ds}L(c_s)\bigg|_{s=0} \\
&= \int_a^b \frac{d}{ds}\sqrt{x_s'(t)^2 + y_s'(t)^2}\bigg|_{s=0} dt \\
&= \int_a^b \frac{\frac{dx_s'(t)}{ds}\Big|_{s=0} x_s'(t) + \frac{dy_s'(t)}{ds}\Big|_{s=0} y_s'(t)}{\sqrt{x_s'(t)^2 + y_s'(t)^2}}\, dt \\
&= \int_a^b \left(\frac{\frac{dx_s(t)}{ds}\Big|_{s=0} x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}\right)' - \frac{dx_s(t)}{ds}\bigg|_{s=0}\left(\frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}\right)' \\
&\qquad + \left(\frac{\frac{dy_s(t)}{ds}\Big|_{s=0} y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}\right)' - \frac{dy_s(t)}{ds}\bigg|_{s=0}\left(\frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}\right)' dt \\
&= -\int_a^b \frac{dx_s(t)}{ds}\bigg|_{s=0}\left(\frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}\right)' + \frac{dy_s(t)}{ds}\bigg|_{s=0}\left(\frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}\right)' dt
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

となります.

今までは, c_s は固定された曲線の族でしたが, これをいろいろと代えることを考えます. 証明したいことは, 上の条件を満たすどんな曲線の族 c_s に対しても $\frac{d}{ds}L(c_s)\big|_{s=0} = 0$ となるならば, c は直線であることです.

まず, はじめに次に注意します.

命題 6.2 a と b で 0 となるどんな関数 $u(t), v(t)$ に対しても, 曲線の族 c_s であって, $c_s(t) = (x_s(t), y_s(t))$ と書いたときに

$$
\frac{dx_s(t)}{ds}\bigg|_{s=0} = u(t), \qquad \frac{dy_s(t)}{ds}\bigg|_{s=0} = v(t)
$$

となるものが存在する.

証明. 与えられた $u(t), v(t)$ に対し,

$$
x_s(t) = x(t) + su(t), \qquad y_s(t) = y(t) + sv(t)
$$

で, 族 $c_s(t) = (x_s(t), y_s(t))$ を定める. $s = 0$ のときは最初に与えられた曲線 $c(t) = (x(t), y(t))$ に一致し, また, $x_s(a) = x(a) + su(a) = x(a)$, $y_s(a) = y(a) + sv(a) = y(a)$, $x_s(b) = x(b) + su(b) = x(b)$, $y_s(b) = y(b) + sv(b) = y(b)$ であるから, $c_s(a) = P$, $c_s(b) = Q$ と端の点は固定されている. また,

$$
\frac{dx_s(t)}{ds}\bigg|_{s=0} = u(t), \qquad \frac{dy_s(t)}{ds}\bigg|_{s=0} = v(t)
$$

も成り立っている．よって，命題が証明された． □

特に，(6.1) で，

$$\left.\frac{dx_s(t)}{ds}\right|_{s=0} = u(t), \qquad \left.\frac{dy_s(t)}{ds}\right|_{s=0} = 0$$

と，

$$\left.\frac{dx_s(t)}{ds}\right|_{s=0} = 0, \qquad \left.\frac{dy_s(t)}{ds}\right|_{s=0} = v(t)$$

を考えることによって，

$$\int_a^b u(t)\left(\frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}\right)' dt = 0, \qquad \int_a^b v(t)\left(\frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}\right)' dt = 0 \tag{6.3}$$

が a と b で 0 となるどんな関数 $u(t)$, $v(t)$ に対しても成り立ちます．

命題 6.4 (変分法の基本原理) 閉区間 $[a,b]$ で定義された連続関数 $f(t)$ があり，端の点 a, b で 0 となるどんな関数 $u(t)$ についても

$$\int_a^b f(t)u(t)\,dt = 0$$

が成り立つと仮定する．このとき $f(t) = 0$ である．

証明. $f(t) = 0$ でないと仮定して矛盾を言う．ある点 t_0 で $f(t_0) > 0$ または $f(t_0) < 0$ である．$f(t_0) > 0$ とする．$f(t_0) < 0$ のときも同様に矛盾が導かれる．f は連続であるから，ある t_0 を含む区間 (a', b') で $f(t) > 0$ となる．そこで，(a', b') の外で 0 で，(a', b') の中で正である関数 $u(t)$ を取ってくる．すると，u は端の点で 0 であり，

$$\int_a^b f(t)u(t)\,dt = \int_{a'}^{b'} f(t)u(t)\,dt > 0$$

である．これは最初の仮定に矛盾する． □

上の命題と (6.3) を組み合わせると，

$$\left(\frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}\right)' = 0, \qquad \left(\frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}\right)' = 0$$

が成り立ちます．

そこで新しい変数 r を

$$r = \int_a^t \sqrt{x'(\tau)^2 + y'(\tau)^2}\, d\tau$$

で定めます. (弧長パラメータと呼ばれます.) すると,

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$$

が成り立ち, 従って,

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dr^2} &= \frac{1}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \left(\frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \right)' = 0, \\
\frac{d^2y}{dr^2} &= \frac{1}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \left(\frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \right)' = 0
\end{aligned}$$

となりますので, x, y が r について一次関数であることになります. よって x, y の軌跡は直線になります. めでたく, 示したいことが証明されました.

7　極小曲面

次に, 曲線の代わりに曲面を考え, 長さを最短にする代わりに面積を最短にすることを考えます.

簡単のために, ここでは一般の曲面ではなく, 二変数関数 $f(x,y)$ のグラフになっているものを考えます.

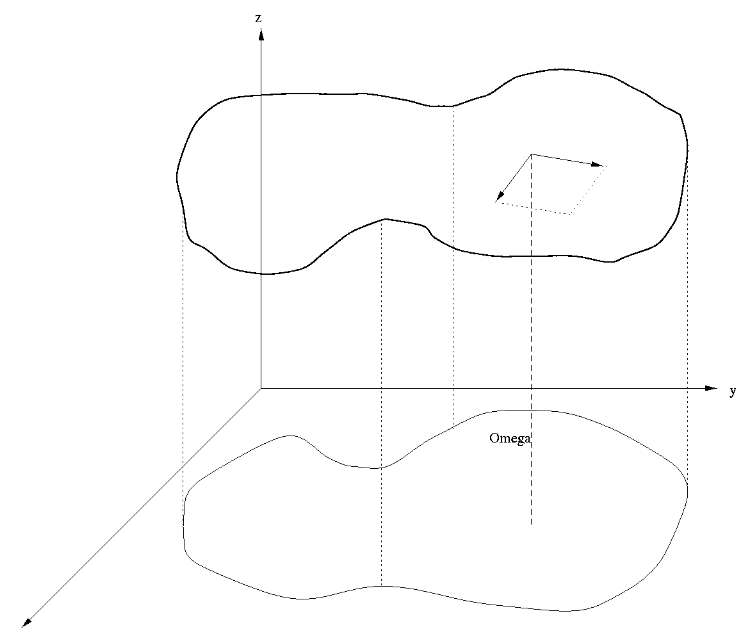
Ω を $\mathbb{R}^2$ の中の領域とし (境界は滑らかとします), f を Ω で定義された微分可能な関数で偏導関数が連続なものとします (Ω の境界までこの条件を満たしながら拡張されているとします). このとき, f のグラフ $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in \Omega, z = f(x,y)\}$ の面積を

$$A(\text{graph } f) = \int_\Omega \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$$

によって定義します. 二つの空間ベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

で張られる平行四辺形の面積が $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$ です.



今まで我々が考えてきた問題の ‘高次元’ 版は, 次の問題です.

問題 7.1 Ω の境界上で定義された関数 f_0 を取り, 固定する. Ω で定義された上のような関数で, Ω の境界で f_0 に一致し, グラフの面積 $A(\mathrm{graph}\, f)$ を最小にするようなものを求めよ.

しかし, 一般にはこの問題は解を持つとは限りません. 実は, Ω として凸なものを考えると, 必ず解があることが知られています. しかし, 解の具体的な形を与えることは未だ出来ておりません. ここでは, 変分法を用いて f がある偏微分方程式を満たすことを証明します.

Ω 上で定義された関数 u で (微分可能性の条件は f と同様とする) Ω の境界では 0 となっているものを取ってきます. このとき, 実数 s を取り, f の代わりに $f+su$ を考えます. この関数は境界で, f_0 に一致します. 面積は,

$$A(\mathrm{graph}(f+su)) = \int_\Omega \sqrt{1+\left(\frac{\partial(f+su)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial(f+su)}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$$

となります. もしも, f が上の問題の答えであるとすると,

$$\left.\frac{d}{ds}A(\mathrm{graph}(f+su))\right|_{s=0} = 0$$

が成り立ちます. 左辺を計算してみましょう. これは, 平面の曲線のときとほとんど同じ計算です.

$$\begin{aligned}
&\left.\frac{d}{ds}A(\mathrm{graph}(f+su))\right|_{s=0} \\
&= \int_\Omega \left.\frac{d}{ds}\sqrt{1+\left(\frac{\partial(f+su)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial(f+su)}{\partial y}\right)^2}\right|_{s=0} dxdy \\
&= \int_\Omega \frac{\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}\, dxdy \\
&= \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}\right) \\
&\qquad -u\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}\right)\right\} dxdy \\
&= -\int_\Omega u\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}\right)\right\} dxdy
\end{aligned}$$

です.

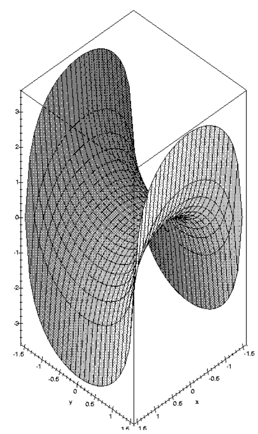
先の変分法の基本原理と同様の命題が二次元でも成り立ちますので, f は,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}\right)=0$$

を満たします. これが, 極小曲面の方程式です.

解の例を一つ上げましょう. Scherk 曲面と呼ばれている曲面です.

$$f(x,y)=\log\left(\frac{\cos x}{\cos y}\right)$$



参考文献

極小ネットワーク

E.N. Gilbert and H.O. Pollak, Steiner minimal trees, SIAM J. Appl. Math., **16** (1968), 1–29.
(これは, 研究論文である.)

双曲幾何学

小林昭七, ユークリッド幾何から現代幾何へ, 日本評論社, 1990

深谷賢治, 岩波講座現代数学への入門「双曲幾何」, 岩波書店, 1996

変分法

深谷賢治, 岩波講座現代数学への入門「解析力学と微分形式」, 岩波書店, 1996

極小曲面

小林昭七, 曲線と曲面の微分幾何 (改訂版), 裳華房, 1995