箙多様体と量子展開環

東北大学理学部 中島　啓 (Hiraku Nakajima)

0. Introduction

論文 [Na] では、Ringel [Ri], Lusztig [Lu] の仕事に動機付けられて、Kac-Moody Lie 環の表現の幾何学的構成を行ないました。そこでは、Kronheimer と一緒に調べた単純特異点上のインスタントンのモジュライ空間を使いました。この仕事は、おおざっぱに言いますと、単純特異点上のインスタントンのモジュライ空間が、quiver の表現のモジュライ空間の余接空間に “大体” なっているというものです [1)] 。quiver とは、有限グラフの各辺に向きを入れたもののことですが、その表現とは、点の上にベクトル空間を置き、向きのついた辺に対応してベクトル空間の間の線型写像があたえられているというものです。もともとは、単純特異点に興味がありましたので、有限次元 Lie 環に対応する場合しか出てこなかったのですが、以下与えますように quiver の表現のモジュライ空間の余接空間自体は、任意の有限グラフに対して定義することができます。これを、quiver variety と名付けることにしました。東北大学で業績報告書を書く際に、英語は和訳に直すこというおたっしがありましたので、計算機室においてありました「研究社 新英和大辞典」で調べましたところ、quiver の和訳は「えびら」となっていました。そのときは漢字は分からなかったのですが、あとで国語辞典で調べたところ「箙」とありました。そこで以後、箙多様体と書かせていただくことにします。

さて今回は、量子展開環を構成することを目標にします。アファインヘッケ環は、Kazhdan-Lusztig [KL], Ginzburg, 谷崎さん [Ta] らによって、旗多様体の余接空間上で同変 K 理論を用いることによって構成されています。旗多様体の余接空間と箙多様体は非常に似かよった点を多くもちますので、同様にできるのではないかと期待しています。しかし、講演までに計算をすることができませんでしたので、今回は有限体上で話をすることによって “量子化” することにしました。これは、計算が一番楽だからです。

1. ヘッケ環の定義の復習

G を有限群 (別に有限でなくても、ちょっと工夫すればうまくいきますが簡単のため有限群といたします) とし、H をその部分群とします。左剰余類の空間 G/H の二つの直積 $G/H \times G/H$ に、G を diagonal に作用させます。このとき $F(G,H) = \{\, G/H \times G/H$ 上の G 不変な関数 $\}$ 上に、

積の構造を

$$(f*g)(x,z)=\sum_{y\in G/H} f(x,y)g(y,z)$$

によって定義いたします。$F(G,H)$ は環となります。特に、G として有限体 F_p 上の単純代数群、H としてその Borel 部分群を取ると、$F(G,H)$ は、Weyl 群に対応するヘッケ環 (のパラメータ q を $q=p$ に特殊化したもの) になることが岩堀先生によって示されています。このとき、G/H は旗多様体に他なりません。

2. 箙多様体の定義の復習

有限グラフが与えられたとし、それを固定します。点に $1,2,\ldots,n$ と番号を付けます。$n\times n$ の行列 (a_{kl}) を a_{kl} を頂点 k と頂点 l を結ぶ辺の本数として定義します。さらに次を仮定します。

(仮定) 全ての k に対して $a_{kk}=0$

すなわち、ある頂点とその頂点自身を結ぶような辺はありません。このとき、$\mathbf{C}=2\mathbf{I}-(a_{kl})$ は、対称な generalized Cartan matrix になります。(ここでは、対称なものしか扱いません。) よって、対応する Kac-Moody algebra、および量子展開環があります。逆に、対称な Kac-Moody algebra が与えられたとき、generalized Cartan matrix から有限グラフが構成されます。

さて、H を辺とその向きの集合とします。一つの辺に対し、二つの向きがありえますが、$h\in H$ に対して、向きを逆にしたものを $\overline{h}$ であらわすことにします。また、h の出発点を $\mathrm{out}(h)$、到着点を $\mathrm{in}(h)$ であらわします。

有限グラフの向きとは、H の部分集合 Ω であって、$\Omega\cup\overline{\Omega}=H$, $\Omega\cap\overline{\Omega}=\emptyset$ であるもののことと定義します。そのような向きが与えられたとし、これも固定します。$\varepsilon\colon H\to\pm1$ を $h\in\Omega$ のとき、$\varepsilon(h)=1$, $\varepsilon(\overline{h})=-1$ として与えます。

以下、定義体は有限体 F_p にします。

各頂点 k の上にベクトル空間の pair (V_k,W_k) をおき、

$$\mathbf{M}\overset{\text{def.}}{=}\left(\bigoplus_{h\in H}\mathrm{Hom}(V_{\mathrm{out}(h)},V_{\mathrm{in}(h)})\right)\oplus\left(\bigoplus_{m}\mathrm{Hom}(W_m,V_m)\oplus\mathrm{Hom}(V_m,W_m)\right)$$

と定義します。このとき、$\mathbf{M}$ の点の上の直交分解における各成分を B_h, i_m, j_m であらわすことにします。ベクトル空間 V_k と W_k を固定していることを強調したいときには、次元 $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ を

$$\mathbf{v}=(\dim V_1,\ldots,\dim V_n)^t,\quad \mathbf{w}=(\dim W_1,\ldots,\dim W_n)^t$$

によって定めて、$\mathbf{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})$ などと書くことにします。

さて、$\mu_{\mathbb{C}}\colon \mathbf{M} \to \bigoplus_k \mathrm{End}(V_k)$ を

$$\mu_{\mathbb{C}}(B,i,j) = \left(\sum_{h\in H: k=\mathrm{in}(h)} \varepsilon(h) B_h B_{\overline{h}} + i_k j_k \right)_k \in \bigoplus_k \mathrm{End}(V_k)$$

によって定義します。添え字の $\mathbb{C}$ は複素数を意味するものではありません。単なる飾りです[2)]。$\mathbf{M}$ と $\bigoplus_k \mathrm{End}(V_k)$ には、$\prod_k \mathrm{GL}(V_k)$ が自然に作用しますが、上の写像 $\mu_{\mathbb{C}}$ は同変になります。よって $\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0)$ には、$\prod_k \mathrm{GL}(V_k)$ が作用します。

定義. $(B_h, i_m, j_m) \in \mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0)$ が**安定**であるとは、次を満すような部分空間の族 (S_k) が 0 だけしかないときを言います。

$$B_h(S_{\mathrm{out}(h)}) \subset S_{\mathrm{in}(h)} \quad \text{for all } h \in H$$

$$j_k(S_k) = 0 \quad \text{for all } k$$

これは、$\prod_k \mathrm{GL}(V_k)$ 不変な概念であることに注意してください。

(B_h, i_m, j_m) が安定なとき、$\prod_k \mathrm{GL}(V_k)$ 作用の stabilizer が自明になることが証明できます。そこで、

$$\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w}) \overset{\text{def.}}{=} \{(B_h, i_m, j_m) \in \mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0) \mid (B_h, i_m, j_m) \text{ は安定である。}\} / \prod_k \mathrm{GL}(V_k)$$

と定義します。これを箙多様体といいます。もともとの有限グラフがディンキン型のときに、対応する単純特異点の極小特異点解消を考えると、その上のベクトル束のモジュライ空間が $\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})$ となることが、[KN] で示されています。そこでは二つの証明を与えましたが、代数的な証明は $\overline{F_p}$ 上でもそのまま適用できる (と思います。細かいチェックはしていません。)

上の定義を、$\overline{F_p}$ で与えたものを $\overline{\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})}$ とすると、フロベニウス写像の固定点がもとの $\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})$ になることを証明することができます。

3. 箙多様体上の関数の convolution 積

さて、$\mathbf{w}$ はずっと固定することにします。f を $\mathfrak{M}(\mathbf{v}_1,\mathbf{w}) \times \mathfrak{M}(\mathbf{v}_2,\mathbf{w})$ 上の (複素数値) 関数、g を $\mathfrak{M}(\mathbf{v}_2,\mathbf{w}) \times \mathfrak{M}(\mathbf{v}_3,\mathbf{w})$ 上の関数としたときに、

$$(f * g)(x,z) = \sum_{y \in \mathfrak{M}(\mathbf{v}_2,\mathbf{w})} f(x,y) g(y,z)$$

によって $f*g$ という $\mathfrak{M}(\mathbf{v}_1,\mathbf{w})\times\mathfrak{M}(\mathbf{v}_3,\mathbf{w})$ 上の関数を定義します。$\bigcup_{\mathbf{v}}\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})\times\bigcup_{\mathbf{v}}\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})$ 上の関数 f で、任意の x, y について、$f(x,*)$, $f(*,y)$ が有限個の点を除き 0 になるものの全体を $U(\mathbf{w})$ と定義すると、$*$ によって $U(\mathbf{w})$ は環になります。最初に与えたヘッケ環の定義とよく似ていることが分かると思います。違いは、考えている空間が連結でないこと (次元さえ一定ではない) です。

さて、

$$\Delta(\mathbf{v},\mathbf{w}) \stackrel{\text{def.}}{=} (\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})\times\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w}) \text{ の対角線の特性関数})$$

と定義しましょう。f が $\mathfrak{M}(\mathbf{v}_1,\mathbf{w})\times\mathfrak{M}(\mathbf{v}_2,\mathbf{w})$ 上の関数とすると、

$$f*\Delta(\mathbf{v}_2,\mathbf{w}) = f = \Delta(\mathbf{v}_1,\mathbf{w})*f$$

が成り立ちます。

次に、e_k, f_k に対応する関数を構成します。第 k 成分のみ 1 で、他は 0 というベクトルを α_k で表わします。$(x,y)\in\mathfrak{M}(\mathbf{v}-\alpha_k,\mathbf{w})\times\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})$ であって、第 1 成分に対応するベクトル空間から第 2 成分に対応するベクトル空間へ injection があって、y をその image へ制限したものが、x にうつっているようなものの全体を $\mathfrak{P}_k(\mathbf{v},\mathbf{w})$ と定義します。(Hecke 対応と呼んでいるものです。) 射影を $p_1\colon\mathfrak{P}_k(\mathbf{v},\mathbf{w})\to\mathfrak{M}(\mathbf{v}-\alpha_k,\mathbf{w})$, $p_2\colon\mathfrak{P}_k(\mathbf{v},\mathbf{w})\to\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})$ とします。このとき、

$$e_k(x) \stackrel{\text{def.}}{=} p^{\dim p_2^{-1}(p_2(x))/2}$$

によって、$\mathfrak{P}_k(\mathbf{v},\mathbf{w})$ 上の関数を定義し、これを $\mathfrak{P}_k(\mathbf{v},\mathbf{w})$ の外では 0 として $\mathfrak{M}(\mathbf{v}-\alpha_k,\mathbf{w})\times\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})$ に拡張します。一方、f_k は、

$$f_k(x) \stackrel{\text{def.}}{=} p^{\dim p_1^{-1}(p_1(x))/2}$$

で定義し、今度は因子の順番を逆にして、$\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})\times\mathfrak{M}(\mathbf{v}-\alpha_k,\mathbf{w})$ 上の関数とします。このとき、

$$(e_k*f_l-f_l*e_k)*\Delta(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \delta_{kl}[\,(\mathbf{w}-\mathbf{C}\mathbf{v}) \text{ の第 } k \text{ 成分}]_{q=\sqrt{p}}\Delta(\mathbf{v},\mathbf{w})$$

が成り立ちます。ここで、$[m]$ は q-integer $\frac{q^m-q^{-m}}{q-q^{-1}}$ で、$[m]_{q=\sqrt{p}}$ は、それを $q=\sqrt{p}$ と置いたものです。

また、quantum Serre relation も、$q=\sqrt{p}$ と置いて成立します。

すなわち、quantized enveloping algebra を modify したもの (Cartan の部分を $\Delta(\mathbf{v},\mathbf{w})$ のように 1 次元の algebras の直和に換える) から、$U(\mathbf{w})$ への algebra homomorphism ができます。

脚注

1) この仕事については、1989 年の研究集会「幾何にあらわれる変分問題について」の予稿集に解説を書かせていただきました。

2) 最初に複素数体上で定義したときに、$\mu_{\mathbb{C}}$ の他に、$\mu_{\mathbb{R}}$ というものも導入してしまったのでこういう記号になってしまいました。もともとの定義については、1992 の表現論シンポジウムの原稿を参照してください。

文献

[KL] D. Kazhdan and G. Lusztig, Proof of Deligne-Langlands conjecture for Hecke algebras, Invent. Math. **87** (1987), 153–215.

[KN] P.B. Kronheimer and H. Nakajima, Yang-Mills instantons on ALE gravitational instantons, Math. Ann. **288** (1990), 263–307.

[Lu] G. Lusztig, Quivers, perverse sheaves, and quantized enveloping algebras, J. Amer. Math. Soc. **4** (1991), 365–421.

[Na] H. Nakajima, Instantons on ALE spaces, quiver varieties, and Kac Moody algebras, preprint.

[Ri] C.M. Ringel, Hall algebras and quantum groups, Invent. Math. **101** (1990), 583–592.

[Ta] T. Tanisaki, Hodge modules, equivariant K-theory and Hecke algebras, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **23** (1987), 841–879.