フィールズ賞で語る現在数学・関数解析（DIRECTOR'S CUT）

小沢 登高（おざわ なるたか）

1. 始めに

古来解析学では微・積分方程式を研究対象にしてきたが，20 世紀初頭に始まった関数解析は，それらを個別の関数に関して考察するのではなく，適切な条件を満たす関数たちのなす関数空間の上の（適切な意味で連続な）線形作用素として見ることにより抽象的，統一的な研究を行うことを目指したものであった．研究の枠組みとなる構造を積極的に導入して研究し，その系として自然に与えられた個別の数学的対象を扱うといった現代的な数学スタイルは，公理的集合論と相まって当時の数学者に浸透しつつあった．なお公理的集合論そのものは，解析学においてカントール (1845-1918) が三角級数の一意性問題を研究している際に $[0,1]$ 区間が可算でないことに気付いたことに端を発している．

三角級数の一意性定理（カントール 1870〜72）

> $E \subset [0,1]$ を可算閉集合[1]とする．このとき，級数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(2\pi\sqrt{-1}nt)$ が各 $t \in [0,1] \setminus E$ について収束し，さらにその値が 0 ならば，係数 c_n は全て 0 である．

興味深いことに，カントールの連続体仮説の独立性を証明して 1966 年にフィールズ賞を受賞した**ポール・コーエン** (1934-2007) も三角級数の一意性問題をトピックに博士号研究を行っている．コーエンは三角級数と関数解析（抽象調和解析，バナッハ環論）を専門としてキャリアを始めており，そこで既に剛腕プロブレムソルバーとして名を挙げていたが，大変な野心家でもあった彼は偉大な業績を求めて偉大な未解決問題（即ちヒルベルトの第一問題=連続体仮説）の存在する集合論に専門を移したのであった．コーエンと同じ年にフィールズ賞を受賞したのは，**マイケル・アティヤ** (1929-)，**アレクサンドル・グロタンディーク** (1928-2014)，それに**スティーヴン・スメイル** (1930-) であるが，アティヤの主要業績のひとつである指数定理にもその定式化に関数解析は欠かすことのできない役割を果たしている．このことは関数解析が解析学全般において使われるごく基本的な道具となっていることを考えれば驚くに値しない．しかし本稿では内容を絞って「関数解析」をごく狭い意味に取り，抽象的な関数解析それ自体の研究についてのみ取り扱うことにする．グロタンディークがフィールズ賞を受賞した主な理由は代数幾何学における革命的業績なのであろうが，彼もまたキャリアの前半では関数解析で活躍し，そこで位相ベクトル空間のテンソル積と写像空間の双対性に関する壮大なプログラムを立ち上げていたのであった．それについて語る前に，グロタンディークの博士論文研究を指導し，彼のプログラムに動機を与えた**ローラン・シュワルツ** (1915-2002，フィールズ賞 1950) の業績について触れようと思う．そののちに**ジャン・ブルガン** (1954-，フィー

[1] E が空集合のときはリーマンの定理 (1854) としても知られるが，リーマンの証明には不備があった．

ルズ賞 1994) と**ティモシー・ガワーズ** (1963-，フィールズ賞 1998) について述べることにする．なお作用素環論は，**アラン・コンヌ** (1947-，フィールズ賞 1982) と**ヴォーン・ジョーンズ** (1952-，フィールズ賞 1990) のふたりのフィールズ賞受賞者を擁する抽象関数解析の主要な一分野であるが，本稿とは別の記事（第 20 回）で扱われることになっている．

閑話:関数解析という用語について

“関数解析”[2]という用語は “functional analysis” の訳語であるが，“functional” を “function” の形容詞型と考えて訳したものと考えられる．一方で “functional” には**汎関数**という意味もある．汎関数とは関数に対して数値を返す写像[3]のことで，例えば，積分

$$I(f) = \int_0^1 f(t)\,dt$$

は $[0,1]$ 上の可積分関数のなす関数空間の上の汎関数である．さらに線形（$I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g)$）であるので，線形汎関数である．応用上，非線形な汎関数も重要であるが，本稿では線形なもののみを取り扱うことにする．“functional” という用語は微分方程式論における関数解析的手法の草分けであるアダマール（1865–1963）が変分法の教科書（仏語，1910）において導入したものである．この事実に鑑みるに，“functional analysis” の原意は汎関数をテーマとした解析学といったものであったと推測される．

2. 位相ベクトル空間

既に述べたように関数解析では個々の関数ではなく,「適切な条件」を満たす関数たちのなす関数空間（とその上の作用素）を主な研究対象としている．関数空間には「適切な条件」により自然に位相が定まり位相ベクトル空間[4]となる．位相ベクトル空間のなかでも最も単純かつ重要なものは**バナッハ空間**である．バナッハ空間とはノルム位相で完備なベクトル空間[5]のことであり，ベクトル空間 X 上のノルムとは関数 $\|\cdot\|\colon X \to \mathbb{R}$ で以下の 3 条件を満たすものをいう：

- 任意の $x \in X$ に対して $\|x\| \geq 0$．さらに $x \neq 0$ なら $\|x\| \neq 0$;
- 任意の $x \in X$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して，$\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$;
- 任意の $x, y \in X$ に対して，三角不等式 $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ が成り立つ．

ノルムはベクトルの長さを抽象化した概念で，ベクトル x と y の間の距離を $\|x-y\|$ と定めることでベクトル空間 X に位相を定める．解析学的に意味のあることを行うためには，ベクトル空間がこのノルム位相について完備であること，つまりバナッハ空間であることが望ましい．バナッハ空間の主な例として，

[2]位相を使った解析学ということで “位相解析” と呼ばれていたこともある．また “関数” は本来は “函数” と書くが，この問題には立ち入らないことにする．

[3]現代数学では写像と関数の用語の違いは曖昧である．つまり関数として想起される写像は関数と呼ばれている．特に数に値を取る写像は定義域が何であれ関数と呼ばれるのが普通である．更に本稿では線形写像のことを作用素と呼ぶことにする．

[4]本稿では位相ベクトル空間と言ったら局所凸位相を持ち適当な意味で完備なものであることにする．他にも文章の流れを保つため，必要な仮定をこまごまと述べず正確性を犠牲にしていることがある．

[5]ベクトル空間の定義は省略する．係数体は実数体と複素数体のどちらでもよいが，本稿では実数体 $\mathbb{R}$ とする．

- d 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$(あるいは ℓ_2^d)
  $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^d |x_i|^2}$, $x = (x_1, \ldots, x_d)^T$
- $c_0 = \{(x_n)_{n=1}^\infty : x_n \in \mathbb{R}, \lim_n |x_n| = 0\}$
  $\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|$, $x = (x_n)_{n=1}^\infty$
- $\ell_p = \{(x_n)_{n=1}^\infty : x_n \in \mathbb{R}, \|x\|_p < \infty\}$
  $\|x\|_p = (\sum_n |x_n|^p)^{1/p}$, $x = (x_n)_{n=1}^\infty$

などが挙げられる．なかでもヒルベルト空間 ℓ_2 はとりわけ重要である．他にも L^p 空間，バナッハ空間 X 上の連続双対空間[6] X'，連続線形作用素全体のなすバナッハ空間 $B(X)$ などがある．バナッハでない位相ベクトル空間の重要な例としては，$\mathbb{R}$ 上のテスト関数のなす空間 $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ が挙げられる．テスト関数とは有界な台を持ち無限回連続微分可能な関数のことである．$\mathcal{D}(\mathbb{R})$ 内の列 f_n が f に収束するのは，f_n の台の和集合が有界閉集合に含まれ，各 $m = 0, 1, 2, \ldots$ に対して偏微分 $f_n^{(m)}$ が $f^{(m)}$ に一様収束するときである．より一般に，開集合 $U \subset \mathbb{R}^k$ に対して $\mathcal{D}(U)$ が同様に定義される．

3. シュワルツ超関数

関数解析では微・積分変換等を関数空間上の作用素として捉えるのであったが，シュワルツのアイディアはそれをさらに推し進め，個々の関数自体を関数空間上の汎関数と見なす主客転倒 (!) によって，関数を再定義するというものである．正確には,（シュワルツの）超関数は先に定義された $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ 上の連続線形汎関数として定義され，超関数のなすベクトル空間（つまり $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ の連続双対空間）は $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ と書かかれる．$S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ の $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ における値は $S(\phi)$ の代わりに $\langle S, \phi \rangle$ と書く．このとき，$\mathbb{R}$ 上の局所可積分関数 f は

$$\langle f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\phi(t)\,dt,\ \ \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \tag{1}$$

で定義される超関数と見なせる．部分積分公式

$$\int_{\mathbb{R}} f'\phi\,dt = -\int_{\mathbb{R}} f\phi'\,dt \tag{2}$$

をもとに超関数 $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ の微分 $S' \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ は

$$\langle S', \phi \rangle = -\langle S, \phi' \rangle \tag{3}$$

で定義される．このようにして，例えばディラック関数 δ のようなものが

$$\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0) \tag{4}$$

で定義される超関数として数学的にきちんと定式化できるのである．また，$t > 0$ で 1，$t < 0$ で 0 となるヘヴィサイド関数の微分がディラック関数になること等，それまで物理学や工学においてアドホックに使われてきた計算法に数学的な裏付けを与えることにもなった．超関数論は現在では微分方程式論を始め様々な数学で基礎理論として使われている．シュワルツはこの功績によりフィールズ賞を受賞した．超関数の理論はシュワ

[6]位相ベクトル空間 X から係数体 $\mathbb{R}$ への連続線形写像のことを連続線形汎関数と呼ぶ．連続線形汎関数全体のなす位相ベクトル空間を連続双対空間と呼ぶ．

ルツ以前から既に漠然と存在していたとも言えるが[7]，正しい概念と定義を特定したことの重要性は極めて大きい．この正しい概念と定義が与えられれば理論は自然と展開してゆくという研究スタイルはグロタンディークにも受け継がれている．

4. 積分変換と核定理

シュワルツは超関数と位相ベクトル空間に関して洗練された理論を展開したが，とりわけ目を引くのが積分変換に関する**核定理** (1950) である．フーリエ変換を始め積分変換は関数解析における主要な研究対象であるが，積分変換とは適当な関数 $K(t,x)$ により

$$(Tf)(x) = \int K(t,x)f(t)\,dt \tag{5}$$

として定義される作用素 $T\colon X \to Y$ のことである．ここで，X と Y はそれぞれ $U \subset \mathbb{R}^k$ 及び $V \subset \mathbb{R}^l$ 上の適当な関数のなす関数空間である．関数 $K(t,x)$ は積分変換 T の核と呼ばれる．積分変換はその具体的な表示ゆえ，作用素のなかでも扱いやすいものと考えられている．積分変換を超関数論の枠組みで捉えなおすと，

$$\langle T\phi, \psi\rangle = \langle K, \phi\otimes\psi\rangle \tag{6}$$

となる．ここで，$\phi \in \mathcal{D}(U)$ と $\psi \in \mathcal{D}(V)$ に対し，$\phi\otimes\psi$ は $(\phi\otimes\psi)(t,x) = \phi(t)\psi(x)$ で定義される $U \times V$ 上のテスト関数である．

シュワルツの核定理

各超関数 $K \in \mathcal{D}'(U\times V)$ は関係式 (6) により連続線形作用素 $T\colon \mathcal{D}(U) \to \mathcal{D}'(V)$ を定める．逆に任意の連続線形作用素 T は適当な核超関数 K により上のように書かれる．

通常考える範囲では $\mathcal{D}(U) \subset X$ 及び $Y \subset \mathcal{D}'(V)$ が成り立つので，任意の連続線形作用素 $T\colon X \to Y$ は，$\mathcal{D}(U)$ から $\mathcal{D}'(V)$ への連続線形作用素とも見なせ，核超関数により「具体的に」書き下せることになる．これは実用上大変便利である．一般に，位相ベクトル空間 X から連続双対空間 Y' への線形作用素 $T\colon X \to Y'$ に対して，テンソル積ベクトル空間 $X\otimes Y$ 上の線形汎関数 ξ を関係式

$$\langle \xi, x\otimes y\rangle = \langle Tx, y\rangle \tag{7}$$

により定めることができる．(またその逆も同様である．) このとき，T が連続であることと，ξ が x 及び y のそれぞれについて連続であることが同値である．従って，核定理の要点は，テンソル積ベクトル空間 $\mathcal{D}(U)\otimes\mathcal{D}(V)$ に変数ごとの収束で定まる位相が $\mathcal{D}(U\times V)$ から定まる位相と同値であることにあることが分かる．シュワルツはデュドネ (1906-1992) との共著論文 (1949) において，テスト関数の空間 $\mathcal{D}(U)$ を抽象化した位相ベクトル空間である LF 空間及びその双対空間に関する研究を行っているが，その論文は核定理がどの程度まで一般的な状況で示せるかをテーマとする未解決問題１４題で締めくくられていた．

---

[7] 実はソ連のソボレフが数年早く類似の理論を考案していたが，戦争などのために西側には伝わらなかったようである．

5. テンソル積と近似性質

博士論文研究を行うためナンシー大学のシュワルツとデュドネのもとを訪れたグロタンディークに，デュドネは出版されたばかりの上記共著論文を与え，末尾の問題を考えてみるよう勧めた．大学教育を終えたばかりの相手に対する無理難題であるが，数十頁からなる奇矯な独自研究の草稿を抱えてやってきた若者に対するショック療法だったと思われる．しかしショックを受けることになったのはシュワルツとデュドネの方であった．数週間後に再び現れたグロタンディークは１４題の未解決問題の半分を解いてしまっていたのである！彼は続く博士論文研究で，位相ベクトル空間のテンソル積ベクトル空間 $X \otimes Y$ にいかに位相を入れるかを考察し，自然に定まる位相として最強のもの π と最弱のもの ε のふたつを見出している．これらの位相で完備化した位相ベクトル空間をそれぞれ $X \otimes_\pi Y$，$X \otimes_\varepsilon Y$ と書く．$X \otimes_\pi Y$ は変数ごとに連続な任意の双線形写像 $B\colon X \times Y \to Z$ が $X \otimes_\pi Y$ 上連続となるように定義され，$X \otimes_\epsilon Y$ は任意の $\xi \in X'$ と $\eta \in Y'$ に対し $\xi \otimes \eta$ が $X \otimes_\epsilon Y$ 上連続となるように定義される．このとき，自然に定義される連続な「埋め込み」

$$X \otimes_\pi Y \to X \otimes_\varepsilon Y \tag{8}$$

が存在するが，双方とも $X \otimes Y$ の完備化として定義されているため，この「埋め込み」が単射であるか否かは明らかでない．グロタンディークはこの「埋め込み」が任意の Y に対して単射となることと X が**近似性質**を持つことが同値であることを示した．ここで X が近似性質を持つとは，恒等作用素 I_X が有限階数の作用素でコンパクト集合上一様近似できるときをいう．例えば，ℓ_p は

$$T_n x = (x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots) \tag{9}$$

という有限階数作用素の列 T_n で I_X を近似できるので，近似性質を持つ．より一般に（シャウダー）基底を持つ位相ベクトル空間は近似性質を持つ．$(e_n)_n$ が X の基底であるとは任意の $x \in X$ が

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \tag{10}$$

と収束級数として一意に書けるときをいう．任意の位相ベクトル空間（バナッハ空間）に基底が存在するか否かはバナッハ (1892-1945) の**基底問題**として知られ，彼の書いた関数解析における最初の成書である「線形作用素の理論」(仏語訳 1932) にも挙げられている最重要未解決問題であった．グロタンディークは任意の位相ベクトル空間が近似性質を持つ否かを決定しようと努力したが果たせず，代わりにこの問題がバナッハの基底問題並びに，スコティッシュ･ブックの問題 153 と同値であることを示している．スコティッシュ･ブックは関数解析関連の未解決問題を集めたもので，バナッハが所属していたポーランド（当時）･ルヴフ大学近くのスコティッシュ･カフェに集っていた数学者たち（バナッハ，ボルスク，クラトウスキ，シュタインハウス，ウラム等の錚々たる顔ぶれである）の議論をカフェに置いておいたノートに書きつけたものである．それぞれの問題には出題者により懸賞が掛けられており，マズール (1905-1981) による $[0,1] \times [0,1]$ 上の連続関数に関する問題 153 には生きたガチョウが掛けられていた．

スコティッシュ・ブック問題 153（マズール，1936 年 11 月 6 日）・変形

連続関数 $f\colon [0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$ が条件

$$\forall x,z \quad \int_0^1 f(x,y)f(y,z)\,dy = 0 \tag{11}$$

を満たすなら $\int_0^1 f(x,x)\,dx = 0$ となるか？

この問題は 1972 年にスウェーデンの数学者エンフロ (1944-) が近似性質を持たないバナッハ空間を構成することにより否定的に解決され，エンフロは出題者のマズールから懸賞の生きたガチョウを受け取った．エンフロのバナッハ空間は極めて人工的なものであったが，その後，「古典的バナッハ空間」[8]である $B(\ell_2)$ も近似性質を持たないことが示されている (チャンコウスキ 1981)．古典的バナッハ空間に対する近似性質の有無は 80 年代に後述のバナッハ空間 H^∞ の場合を除いて全て解決しているが，H^∞ の近似性質問題はブルガンやピーター・ジョーンズ，ピジエらの猛攻に耐え，難攻不落の未解決問題との評判を確立し現在に至る．

グロタンディークの博士論文のもうひとつのテーマが近似性質を強めた**核型性**である．位相ベクトル空間 X が核型であるとは，任意の Y に対して (8) の写像が同型となるときをいう．核型の条件は極めて強く，例えばバナッハ空間は有限次元でない限り核型にならない．しかし驚くべきことに，自然に現れるその他の位相ベクトル空間はしばしば核型となるのである．特にテスト関数の空間 $\mathcal{D}(U)$ は核型であり，シュワルツの核定理はこの事実とグロタンディークの理論から容易に従う．

グロタンディークの関数解析における貢献は他にもダンフォード=ペティスの性質，バナッハ空間のテンソル積 $X\otimes Y$ に入る１４種類の自然な位相と関係式 (7) により定まる X から Y' への作用素の空間との関係，それに現在グロタンディーク不等式として知られる「テンソル積の計量理論における基本定理」などがあるが，そのテーマは一貫して，バナッハ空間 X が与えられたとして，X の内在的な性質と X と他のバナッハ空間の間の作用素のふるまいとの関係をテンソル積を通じて調べることにあった．このグロタンディーク・プログラムは竹崎正道などにより形を変えて作用素環論にも導入され，そこで華々しい成功を収めることになるのだがそれはまた別の話である．

6. バナッハ空間の内部構造

エンフロによって否定的に解かれることになる基底問題はグロタンディークが代数幾何学に転進した後も関数解析研究の中心であり続けた．今後バナッハ空間と言ったら，特に断りのない限り，無限次元のものを指し，部分空間と言ったら部分バナッハ空間，つまり無限次元閉部分空間を指すことにする．任意のバナッハ空間は基底を持つ部分空間を含むという事実はバナッハの本でも扱われている基本定理だが，「基底」を「無条件基底」に置き換えても同じことが成り立つであろうか？この問題は**無条件基底問題**として知られる．また，任意のバナッハ空間はどの程度良い性質を持つ部分空間を含むであろうか？ここで，基底 $(e_n)_n$ が無条件基底であるとは，収束級数 (10) が無条件収束する（つまり足し算の順番を入れ替えても収束する）ときをいう．c_0 や ℓ_p の標準基底は無条件基底である．無条件基底を持たないバナッハ空間の代表例として L^1 が挙げられ

[8]「古典的」の意味は時代によって変わるが，良く知られた自然なバナッハ空間程度の意味である．

る．無条件基底 $(e_n)_n$ を持つバナッハ空間 X の任意の部分空間 Y は，無条件基底を持つ部分空間 Z を含む．実際，有限部分集合 $E, F \subset \mathbb{N}$ に対して $\max E < \min F$ となるとき $E < F$ と書くことにして，自然数の有限部分集合の列 $E_1 < E_2 < \cdots$ と Y 内の単位ベクトルの列 $f_1, f_2, \ldots$ を帰納的に

$$\|f_n - \sum_{i \in E_n} \alpha_i e_i\| < \varepsilon_n \tag{12}$$

となるように取れる．このとき，$\varepsilon_n > 0$ を充分に速く 0 に収束するように取れば，$(f_n)_n$ はそれ自身が張る部分空間 Z の無条件基底となる．またこの証明から，c_0 あるいは ℓ_p の任意の部分空間は c_0 あるいは ℓ_p に同型な部分空間を含むことが分かる．では，任意のバナッハ空間は c_0 あるいは ℓ_p に同型な部分空間を含むであろうか？古典的バナッハ空間については全てそうである．さらに無条件基底を持ち非反射的なバナッハ空間についてもそうであるというのがジェームズの定理 (1950) である．この問題は 1973 年に，当時レニングラード大学の博士課程学生であったチレルソン (1950-) により劇的に解決された．反例となる**チレルソン空間** T は数列空間

$$\{(x_n)_n : \exists N \text{ s.t. } n \geq N \Rightarrow x_n = 0\} \tag{13}$$

にノルム $\|\cdot\|_{\mathrm{T}}$ を定義して完備化したものだが，コーエンが連続体仮説の独立性を示すために開発した強制法に着想を得た彼は，ノルムを一括ではなく反復的に定義することを考えた．近年では

$$\|x\|_{\mathrm{T}} = \|x\|_\infty \vee \max_{n, E_i} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \|x_{|E_i}\|_{\mathrm{T}} \tag{14}$$

と定義されている．ここで max は $n \in \mathbb{N}$ 及び $n \leq E_1 < \cdots < E_n$ に関して取られる．一見，$\|\cdot\|_{\mathrm{T}}$ の定義に $\|\cdot\|_{\mathrm{T}}$ が使われていて正しく定義されていないようにも映るが，少し考えれば分かるように，有限回の反復操作で $\|x\|_{\mathrm{T}}$ を計算できる．なんという斬新な方法であろうか！それまでに知られていたどのようなバナッハ空間とも似ても似つかぬ．特に，T は無条件基底を持ち反射的であるが，c_0 や ℓ_p に同型な部分空間を含まない．この構成法は数々の変形，改良を経てバナッハ空間論における未解決問題を次々と解決してゆくことになるが，それが百花繚乱の様相を呈するのは 90 年代のことである．それについて述べる前に 80 年代のブルガンの業績に触れることにする．

7. バナッハ空間論の計量的側面

ベルギー出身のブルガンは恐ろしく広い視野に桁外れのパワー&テクニックを兼ね備えた超人的な数学者で，解析学諸分野の中心的な課題に次々と道筋をつけてきた．それも多くの場合に単に難問を解決するだけでなく，まさに道を切り開くといったやり方で，複数の分野の数学を組み合わせ，離れた分野間の繋がりを発見することによって，それまで手の付けようがなかった問題を攻略してきたのである．ブルガンの業績はバナッハ空間論，高次元凸体の幾何学，各種積分変換の研究，偏微分方程式論，組合わせ論，整数論と多岐に渡り途方もないが，本稿では初期のバナッハ空間論における業績に絞って触れることにする．彼の最初期の重要な業績は，開円盤 $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 上の有界正則関数のなすバナッハ空間 H^∞ に関するものであった．H^∞ 及びその高次元類似に対し，ブルガンはバナッハ空間としての性質を系統的に調べ上げ，それらがダンフォー

ド=ペティスの性質を持つグロタンディーク空間であること等，ある側面では L^∞ と近く，また別の側面では遠いといったことを示した．ここではその後より顕著になるブルガンの調和解析への深い造詣が見て取れるが，技術的な話になるのでこれ以上は立ち入らない．

バナッハ空間は定義の簡明さゆえに解析学諸分野のあらゆるところに現れ応用も広いが，一般論はバナッハの時代にほぼ完成している．それゆえバナッハ空間論の主な動機は，よく知られたバナッハ空間の性質を詳細に調べることと，珍しい性質を持ったバナッハ空間を見つけることのふたつとなった．新たなバナッハ空間の構成法は大雑把に言って，(a) 既知のバナッハ空間の適当な部分空間として実現する，(b) 有限次元バナッハ空間を積み上げて作る，(c) チレルソン風に数列空間に特殊なノルムを定義して作る，の 3 種類（の組合せ）である．このうち特に (b) では有限次元バナッハ空間の計量的研究が必要となる．そのようなわけで 70 年代から 80 年代に掛けて「バナッハ空間の幾何学」という潮流が生まれ，そうした研究が盛んになっていった．中でもブルガンが興味を持ったのは，n 点からなる距離空間 X が与えられたとき，その相対的位置関係をユークリッド空間内でどの程度実現できるか？という問題である．距離空間の間の写像 $f\colon X \to Y$ に対して歪みを

$$\sup_{x,x'} \frac{d_Y(f(x),f(x'))}{d_X(x,x')} \cdot \sup_{y,y'} \frac{d_X(y,y')}{d_Y(f(y),f(y'))} \tag{15}$$

で定義する．sup は X の点 $x \neq x', y \neq y'$ に対して取られる．距離をちょうど定数倍する写像は歪み 1 であることに注意する．X を ℓ_2 に埋め込むのに必要な歪みの最小値を $c_2(X)$ と書く．

ブルガンの定理 (1985)

任意の n 点距離空間 X は $c_2(X) \leq C \log n$ を満たす．

ブルガン=フィジェール=ミルマンの定理 (1986)

任意の $\alpha > 1$ と任意の n 点距離空間 X に対して，X の $C(\alpha)^{-1} \log n$ 点からなるランダム部分集合は $c_2(Y) \leq \alpha$ を満たす．

ここで C や $C(\alpha)$ は X 及び n によらない定数である．これらの定理は同時期に示された次の定理と合わせて，関数解析のみならず計算機科学分野等で現在に至るまでよく使われている．

ジョンソン=リンデンシュトラウスの補題 (1986)

任意の $\alpha > 1$ と任意の n 点集合 $X \subset \ell_2$ に対して，$C(\alpha) \log n$ 次元のランダム部分空間への直交射影子 P を X に制限した写像 $P|_X$ の歪みは高々α である．

これらの定理は大雑把に言えば，$\mathbb{R}^N$ 内に表現されたデータ集合は,「疎」であることを仮定すれば，N よりもはるかに少ない位置における観測値から復元できる（つまりデータを余り損なわずに圧縮できる）ということを意味する．これらの定理には組合わせ最適化問題への応用もある．組合わせ最適化問題の多くはまともな時間内に解くことがで

きないため，最適解はあきらめて「多少の歪み」を許した近似解を多項式時間で探すことを考える．グラフの最疎カット問題は組合わせ最適化問題の最も基本的な例であり，例えば大きな問題を複数の小さい問題に分割し解決する際のアルゴリズムに使われるが，与えられたグラフに対する最疎カット問題はバナッハ空間 ℓ^1 への埋め込み全体の上の最適化問題と解釈することができる．これは NP 完全問題であるが，ℓ^1 の代わりに全ての距離空間を考えて問題を緩和すると，線形計画問題となり多項式時間で解決できる．任意のユークリッド空間は ℓ_1 にほぼ等距離で埋め込めるので上記のブルガンの定理により，最適解を $C\log n$ の歪みで近似する多項式時間のアルゴリズムを見つけることができる（リニアル=ロンドン=ラビノビッチ，1995）．距離空間全体を考える代わりに負型の距離空間を考えることにすると，この緩和問題は半正定値問題となるのでやはり多項式時間で解ける．そこで任意の n 点負型距離空間 X を ℓ_1 に埋め込むのに必要な歪みの最小値 $d_1(n)$ を求めることが期待されるようになった．ゴーマン及びリニアルは，これが n によらずに定数で抑えられると予想したが，これは否定的に解決された（コート[9]=ヴィシュノイ，2005）．ちなみに現時点での最良評価は

$$C^{-1}(\log n)^{\delta} \le d_1(n) \le C\sqrt{\log n}\log\log n \tag{16}$$

である（下がチーガー=クライナー=ナオール，2011．上がアローラ=リー=ナオール，2008）．（有限）距離空間のバナッハ空間への埋め込みは様々な設定のもと現在でもよく研究されているテーマである．

8. バナッハ空間論の新展開

ヒルベルト (1862-1943) は 1900 年の国際数学者会議において，（良い）問題が豊富にあることは分野の生命力の証で問題の枯渇は分野の停滞を意味すると述べ，有名な「２３の問題」を提示したが，バナッハ空間論も数々の著名未解決問題に導かれて発展してきた．バナッハの基底問題と無条件基底問題については既に述べたが，他にも次のようなものがある．バナッハ空間あるいは部分空間と言ったら無限次元のものを指すことにしたのを思い出してほしい．

- （超平面問題）任意のバナッハ空間 X は余次元 1 の部分空間と同型であるか？
- （シュレーダー=ベルンシュタイン問題）$X \cong Y_0 \subset Y$ 及び $Y \cong X_0 \subset X$ なら $X \cong Y$ か？
- （等質バナッハ空間問題）部分空間が全て互いに同型であるバナッハ空間はヒルベルト空間に限るか？
- （スカラー+コンパクト問題）X 上の任意の連続線形作用素が「αI_X+コンパクト作用素」の形をしているバナッハ空間 X は存在するか？
- （不変部分空間問題）X を与えられたバナッハ空間とする．X 上の任意の連続線形作用素は非自明な閉不変部分空間を持つか？

これらバナッハ以来の未解決問題を短期間にいくつも解決してフィールズ賞を受賞したのがケンブリッジ大学のガワーズである．その進撃の速さは誰の予想をも上回るものであった[10]．組合せ論の著名研究者であるボロバシュの弟子である彼は，チレルソンの構

[9]ネヴァンリンナ賞 2014

[10]第一線で活躍した数学者はもちろんガワーズ以外にも複数いるが，本稿の性質上，彼らの物語は大幅に省略した．

成法と（無限）ラムゼー理論などの組合せ論から力を引き出してバナッハ空間論に革命を起こした後，ボロバシュ同様，組合せ論へと転向していった．ガワーズの構成したバナッハ空間には，$X \not\cong X \oplus X$ しかし $X \cong X \oplus X \oplus X$ となるものや，$X \not\cong X \oplus \mathbb{R}$ しかし $X \cong X \oplus \mathbb{R}^2$ となるものがある (1994-96)．これらは最初のふたつの問題に対する反例となる．彼はまた次の定理により 3 番目の問題を肯定的に解決した．

ガワーズの択一定理 (1996)

任意のバナッハ空間は，無条件基底をもつ部分空間を含むか，遺伝的分解不可能なバナッハ空間を含むかのどちらかである．

90 年代にもなって一般のバナッハ空間に対して成り立つ定理が発見されたことは極めて驚きである．バナッハ空間が分解不可能であるとは，ふたつのバナッハ空間の直和に同型とならないときをいう．さらに全ての部分空間が分解不可能であるとき遺伝的分解不可能であるという．例えば無条件基底を持つバナッハ空間は基底の分割により分解可能である．定理の証明は，与えられたバナッハ空間を舞台に良い部分列を探す「探索者」とそれを遠い部分空間に隠す「隠匿者」の間の交互進行ゲームを考え，必勝法の有無によって択一の分岐を見るという独創的なものである．とは言え温故知新とはよく言ったもので，いかなる独創性も過去に源流をたどることが出来るのであり，無限集合（位相空間）を舞台にして完全情報ゲームを行うというアイディア自体はバナッハ=マズール・ゲーム（スコティッシュ・ブック問題 43）まで遡ることが出来るのである．等質バナッハ空間は分解可能なので，択一定理により等質バナッハ空間問題は無条件基底を持つ場合に帰着されるが，この場合は既に別の研究者により肯定的に解決されていた．遺伝的分解不可能なバナッハ空間は無条件基底問題の反例となるが，そのような例は 1993 年にガワーズとモーレイにより構成されている．スカラー+コンパクト問題もこの勢いですぐに解けると思われたが，大きな障害にぶつかり，肯定的解決は 2011 年まで待たされることとなった（アルギロス=ヘイドン）．興味深いことに，解決に必要だった新材料はブルガンが駆け出しの頃に指導教員であったデルバーン[11]と考案した構成法であった．アルギロス=ヘイドン空間は不変部分空間問題が肯定的に解決することが判明した初めてのバナッハ空間でもある．なお不変部分空間問題は ℓ_1 で否定的に解決することが知られているが（リード 1984），最重要なヒルベルト空間 ℓ_2 の場合は現在に至るまで未解決である．

9. 終わりに

バナッハ空間論はガワーズによる革命とその後の勢いでほとんどの著名未解決問題を解決してしまったが，その過程で匹敵する新たな問題が提示されることはなく，ヒルベルトが予言した停滞状態に入って既に十年以上たつ．この後，復活はあるのだろうか．ブルガンは深刻な健康状態にあるにもかかわらず快進撃を続け，最近も共同研究で，整数論における「ヴィノグラードフ平均値主予想」を全くの調和解析的手法で解決し，数学界に衝撃を与えた．このことは来年の国際数学者会議でも話題を集めることになるのだろうか．

[11]彼はブルガンを送り出した後，数理ファイナンスに転向し大成功を収める．数理ファイナンスではバナッハ空間のベクトルに値を取るマルチンゲールを基本的ツールとして使うが，そうしたものの収束可能性等の問題はバナッハ空間の幾何学と切っても切り離せない関係にある．