

群 von Neumann 環の分類

小沢 登高

von Neumann は離散群 Γ の複素群環 $\mathbb{C}\Gamma$ を適当な位相のもとで完備化することによって群 von Neumann 環 $\mathcal{L}\Gamma$ を構成し、その分類問題を提起した。(具体的には、 Γ 上の二乗可加算な複素函数全体のなす Hilbert 空間 $\ell_2\Gamma$ を考え、そのうえの畳み込み積で与えられる有界作用素全体が $\mathcal{L}\Gamma$ である。) 群 Γ が可換の場合には、Fourier 変換により、群 von Neumann 環 $\mathcal{L}\Gamma$ は双対群 $\hat{\Gamma}$ 上の本質的有界函数全体のなす函数環 $L^\infty(\hat{\Gamma}, \mu)$ と同型になる。(これらは、可算性の仮定の下、全て von Neumann 環として同型である。) 従って、標語的には非可換群 von Neumann 環は「非可換測度空間」上の函数環として捉えることができる。これは量子群の研究にも通底している。分類問題における最初の非自明な結果は、1943 年の Murray-von Neumann による、無限対称群 S_∞ と自由群 F_r の群 von Neumann 環の非同型である。これを拡張する形で、1967 年に羽毛田-富山及び境が、群の従順性を群 von Neumann 環の性質で特徴付けることに成功している。無限対称群 S_∞ は従順であるが、(階数 2 以上の) 自由群 F_r は従順でない。従順群に対する分類問題は 1974 年に Connes が完全決着しており、この場合も可換のとき同様(可算性の仮定の下)「中心を無視すれば」全て von Neumann 環として同型であるという著しい結果が得られている。従順群は無限対称群や全ての可解群を含む大きなクラスであるが、自由群や Gromov の意味での(非初等的な)双曲群を含めた様々な幾何学的群、高階数 Lie 群の格子などの剛性を持つ群は従順でない。これらの群 von Neumann 環の分類は至難であり、特に階数の異なる自由群 von Neumann 環が互いに同型か否かという問題は、von Neumann 以来この分野の最重要未解決問題とされている。この方面では Voiculescu により創始された自由確率論により、多くの重要な結果が得られている。一般の分類問題は近年、Popa が剛性を持つ群に対する分類問題で突破口を開き大きな前進を見せている。私は幾何学的群に対する分類問題を研究し、次のような結果を得た。

- (1) Γ が双曲群で Λ が非従順群なら、 $\mathcal{L}(\Lambda \times \mathbb{Z})$ は $\mathcal{L}\Gamma$ に埋め込めない。
- (2) (Popa と共著) Γ_i ($1 \leq i \leq m$) が双曲群、 Λ_j ($1 \leq j \leq n$) が非従順群で、 $m < n$ なら、 $\mathcal{L}(\prod_{j=1}^n \Lambda_j)$ は $\mathcal{L}(\prod_{i=1}^m \Gamma_i)$ に埋め込めない。
- (3) n 重自由積 $\mathcal{L}(F_\infty * (F_\infty \times S_\infty)^{*n})$ は異なる n について互いに同型ではない。
(Dykema の定理によれば、 $\mathcal{L}(F_\infty * (F_\infty \times \mathbb{Z})^{*n})$ は全て同型である。)

これらの結果及び証明に用いられた技術には、エルゴード理論における軌道同型の分類問題への応用がある。von Neumann 環の分類理論と軌道同型の分類理論は共に von Neumann を父とする兄弟分野であり、お互いの間に幾つもの応用がある。この軌道同型の分類理論でも、Gaboriau, Furman, Monod-Shalom などが近年目覚ましい成果を挙げており、両分野合わせて現在ホットなトピックとなっている。