

離散群と関数解析

小沢 登高

私の最近の研究対象である von Neumann 環の分類の話題は以前この欄において紹介したので、ここでは群論における (関数) 解析的アプローチについて述べたい。特に (私が直接関係しているわけではないのだが)、Baum–Connes 予想について解説する。群は離散であってもなくてもよいのだが、簡単のため離散とする。解析的アプローチとは、端的に言えば、群 Γ の複素群環 $\mathbb{C}\Gamma$ に関する問題を、 $\mathbb{C}\Gamma$ を適当な位相で完備化した位相環 (Banach 環) 内において、解析的テクニックを援用して取り扱うことである。位相環の例として、絶対総和可能列のなす環 $\ell_1\Gamma$ が最も簡単ではあるが、より良い性質を持つ例に $\mathbb{C}\Gamma$ を Hilbert 空間 $\ell_2\Gamma$ 上の畳み込み作用素として表現して得られる作用素環がある。考える位相によって C^* 環 $C_r^*\Gamma$ と von Neumann 環 $\mathcal{L}\Gamma$ の二種類あり、群 Γ が可換なときはそれぞれ、Pontrjagin 双対 $\widehat{\Gamma}$ 上の連続関数環 $C(\widehat{\Gamma})$ 及び、Lebesgue 空間 $L^\infty(\widehat{\Gamma}, \mu)$ に対応する。

いま、 M を滑らかな閉多様体、 D を M 上の楕円型偏微分作用素とする。このとき Fredholm 指数 $\text{Ind } D$ が考えられるが、より多くの情報を捉える「指数」として次のようなものを考えることができる。準同型 $\pi_1(M) \rightarrow \Gamma$ をひとつ固定し (例えば $\Gamma = \pi_1(M)$)、 $C_r^*\Gamma$ -ベクトル束 $\mathcal{E} = \widehat{M} \times_{\pi_1(M)} C_r^*\Gamma \rightarrow M$ を考える。楕円型偏微分作用素 D は $\mathcal{E}$ の切断の間の作用素 D_Γ に持ち上がり、 $\ker D_\Gamma$ と $\text{coker } D_\Gamma$ は $C_r^*\Gamma$ -加群となる。適当な処理を施すと、これらはともに有限生成かつ射影的となるので、 Γ -指数 $\text{Ind}_\Gamma D = [\ker D_\Gamma] - [\text{coker } D_\Gamma] \in K_0(C_r^*\Gamma)$ を定義することができる (Mishchenko, Kasparov)。実は、 C^* 環としていわゆる全群 C^* 環 $C^*\Gamma$ を取る方が一般的であるが、ここでは差異は無視することにする。 Γ として単位群 1 を取ったものが、通常の Fredholm 指数 $\text{Ind } D$ である。($K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$ であることに注意。) また、 $\text{Ind}_\Gamma D$ の跡を取ることで、 $\text{Ind } D$ を得ることができる。 C^* 環の K 理論は、ホモトピー不変性などの良い性質を持つものの、大抵の場合、計算が困難である。 Γ -指数 $\text{Ind}_\Gamma D$ が良い性質を持つことの証左として以下の二定理が挙げられる。

定理 (Kasparov 1983). 向き付け可能な閉多様体上の符号作用素 D の Γ -指数 $\text{Ind}_\Gamma D$ は、向き付けられたホモトピーに対して不変である。

定理 (Rosenberg 1983). 閉スピン多様体が正のスカラー曲率計量を持てば、その多様体上の Dirac 作用素の Γ -指数 $\text{Ind}_\Gamma D$ は 0 である。

一般に Γ -指数が 0 でないことを判定するのはとても難しい。もし判定できなかったり、常に 0 になるというのであれば上の定理は無意味ということになるが、そうでないことを保証するのが強 Novikov 予想である。 $E\Gamma \rightarrow B\Gamma$ を群 Γ の分類空間とその普遍被覆空間とする。ここで、 $B\Gamma$ はコンパクトであると仮定する。このとき、 $\mathcal{E} = E\Gamma \times_\Gamma C_r^*\Gamma$ とおくと、 $\mathcal{E}$ は $B\Gamma$ 上の $C_r^*\Gamma$ -ベクトル束であって、 $[\mathcal{E}] \in K_0(C(B\Gamma, C_r^*\Gamma))$ を定める。この $[\mathcal{E}]$ を掛けることによって得られる準同型写像 $\mu: K_*(B\Gamma) \rightarrow K_*(C_r^*\Gamma)$ は組み立て写像と呼ばれる。この μ が有理的に単射であることを主張するのが強 Novikov 予想である。さらに適当な意味で (例えば Γ が振

れない群のとき) μ が同型写像であることを主張するのが Baum–Connes 予想である。強 Novikov 予想が正しければ、次の Novikov 予想が従う: $[D] \in K_n(B\Gamma) \otimes \mathbb{Q}$ は向き付けられたホモトピーに対して不変である。強 Novikov 予想の帰結には他にも、安定的 Gromov–Lawson–Rosenberg 予想などの重要な予想がいくつか存在する。一方 Baum–Connes 予想からは、 Γ が振れない群のとき複素群環 $\mathbb{C}\Gamma$ は非自明な巾等元を持たないという Kaplansky 予想などが従う。

Baum–Connes 予想は長いこと夢のような話だと思われてきたが、90 年代後半に Higson–Kasparov によるブレイクスルーがあり、従順群に対して成り立つことが証明された。実は従順亜群についても亜群に対する Baum–Connes 予想が成り立つ。従順性は群の関数解析的な取り扱いにおいて最も重要な概念であり、数え切れないほど多くの特徴付けが存在するが、ここではひとつ述べるにとどめる。群 Γ が従順であるとは、 Γ 上の有限台を持つ半正定値関数の列で 1 に各点収束するものがあるときを言う。これは、 $\Gamma = \mathbb{Z}$ のときは、Fourier 解析における Fejér の定理から従う。実際、 f_n を $\mathbb{T}$ 上の Fejér 核とすると、 $\mathbb{Z}$ 上の関数 $\hat{f}_n(k) = (1 - k/n) \vee 0$ は正定値であって 1 に各点収束する。有限群や可解群はすべて従順であることが知られている。一方、非可換自由群を部分群として含む群は従順でない。こうした群も大切なので、従順群の概念を一般化した完全群(exact group) というものを考える。完全群は従順亜群に埋め込めるので、強 Novikov 予想が成り立つ。従ってどのような群が完全であるかを調べることは重要なことである。

私は完全群の特徴付けを発見することにより、有名な群の多くが完全であること、しかし完全でない群も存在することなどを示した。その後も与えられた群の完全性を適当な部分群の完全性に帰着する手法を開発したりと、完全群の研究を続けている。特に、樹木や性質のよい双曲グラフに作用する群の完全性は、固定化群の完全性に帰着できることが分かった。いろいろな人の研究によって現在では、従順群、自由群、線形群 (Guentner–Higson–Weinberger)、相対的双曲群 (小沢)、写像類群 (木田) などすべて完全であることが分かっている。

完全群は距離空間としても特徴付けられる。群 Γ が有限生成なら、生成系 S に関する語長 ℓ_S を $\ell_S(x) = \min\{n : x \in (S \cup S^{-1})^n\}$ で定義する。このとき $d_S(x, y) = \ell_S(x^{-1}y)$ は左不変な距離となる。一般に、勝手な左不変距離 d で任意の有界集合が有限集合となるようなものを考える。このような条件を満たす距離 d と d' は次の意味で同値である: $d(x_n, y_n) \rightarrow \infty \Leftrightarrow d'(x_n, y_n) \rightarrow \infty$ 。従って、各群 Γ に対して、距離空間 (Γ, d) の同値類がただひとつ定まる。Gromov はこのような距離空間の同値類を粗い距離空間と名付け、その研究を推進した。上記の同値条件は名前の通り非常に粗いと思われるかもしれないが、実は完全性を含め群 Γ のいろいろな性質が粗い距離空間 (Γ, d) に反映されるのである。粗い距離空間に対する指数理論 (作用素環を利用する) や、粗い幾何学も存在して、興味深い発展を遂げている。こうした視点に立った私の最近の結果として、群 $\Gamma = \langle S \rangle$ が双曲的ならば、半群 $\phi_t(x) = \exp(-t\ell_S(x))$ が $\mathbb{C}\Gamma \subset \mathcal{B}(\ell_2\Gamma)$ 上の乗数作用素 $f \mapsto \phi_t f$ として一様有界になるというものがある。この半群は双曲群上の調和解析において Fejér 核の代わりとなるもので、この定理は双曲群は従順ではないもののそれに準じる良い性質を持つことを意味している。