

群の従順作用とその応用

小沢 登高*

太田 崇啓†

木田 良才‡

0 はじめに

小沢 登高氏の京都大学における集中講義 (2005/10/24~10/28) の太田, 木田のノートをまとめ, 小沢氏が加筆, 修正したものです. 太田が 2, 3 節を, 木田が 1, 4, 5 節を担当しました.

1 Introduction (1 日目)

1.1 離散群とその作用の従順性

Γ を離散群 (以後, 離散群と言ったら, 離散かつ可算個の元から成る群のことを指す.) とする. このとき, Γ の ($\mathbb{C}$ 上の) 群環

$$\mathbb{C}\Gamma = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i s_i : \alpha_i \in \mathbb{C}, s_i \in \Gamma, n \in \mathbb{N} \right\}$$

が定義できる. Hilbert 空間 H に対し, $\mathbb{B}(H)$ で H 上の有界線型作用素全体を表すとする. $\mathbb{C}\Gamma$ の H 上の表現とは, $\mathbb{C}\Gamma$ から $\mathbb{B}(H)$ への $*$ -準同型であるということができる.

離散群 Γ に対し, 次のような 2 つの自然な表現が与えられる:

- (i) 全ての $\mathbb{C}\Gamma$ の表現を直和して得られる表現 $\pi_{\text{univ}}: \mathbb{C}\Gamma \rightarrow \mathbb{B}(H_{\text{univ}})$. この表現は universal 表現と呼ばれる.
- (ii) 次に与えられる, Hilbert 空間 $\ell_2\Gamma$ 上の表現 $\lambda: \mathbb{C}\Gamma \rightarrow \mathbb{B}(\ell_2\Gamma)$:

$$\lambda(s)\delta_t = \delta_{st}, \quad s, t \in \Gamma.$$

ここで, $\delta_t \in \ell_2\Gamma$ は, $t \in \Gamma$ 上の定義関数を表すとする. この表現は, (左) 正則表現と呼ばれる.

*東京大学大学院数理科学研究科, E-mail address: narutaka@ms.u-tokyo.ac.jp

†京都大学大学院理学研究科, E-mail address: ohta@math.kyoto-u.ac.jp

‡京都大学大学院理学研究科, E-mail address: kida@math.kyoto-u.ac.jp

群環 $\pi(C\Gamma)$, $\lambda(C\Gamma)$ の $\mathbb{B}(H_{\text{univ}})$, $\mathbb{B}(\ell_2\Gamma)$ におけるノルム閉包をとることによって得られる C^* -環をそれぞれ $C^*\Gamma$, $C_r^*\Gamma$ と記す. それぞれ, Γ に対する universal C^* -環, reduced C^* -環という. $C^*\Gamma$ から $C_r^*\Gamma$ へ自然な全射準同型があることに注意せよ.

例 1.1. Γ が可換群のとき, Fourier 変換 $\ell_2\Gamma \simeq L^2\hat{\Gamma}$ を考えることで, 同型

$$C^*\Gamma \simeq C_r^*\Gamma \simeq C(\hat{\Gamma})$$

が得られる. ここで, $\hat{\Gamma}$ は Γ の既約表現全体から成るコンパクト位相空間を表すとし, $C(\hat{\Gamma})$ は $\mathbb{C}$ に値をもつ $\hat{\Gamma}$ 上の連続関数全体から成る C^* -環を表すとする.

離散群 Γ に対し,

$$\text{Prob}\Gamma = \{\mu \in \ell_1\Gamma : \text{任意の } s \in \Gamma \text{ に対し } \mu(s) \geq 0 \text{ であって } \|\mu\|_1 = 1\}$$

と記す. この空間に各点収束の位相を入れる. この空間には次のようにして, 自然な Γ の作用が備わっている:

$$(s\mu)(t) = \mu(s^{-1}t), \quad s, t \in \Gamma.$$

定義 1.1. 離散群 Γ が従順 (amenable) であるとは, $\text{Prob}\Gamma$ の列 $\{\mu_n\}_n$ で, 次を満たすものがとれるときをいう: 任意の $s \in \Gamma$ に対し,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|s\mu_n - \mu_n\| = 0.$$

定理 1.1. 離散群 Γ に対し, 次の 3 条件は同値:

- (i) Γ は amenable である;
- (ii) Γ 上の有限加法的な確率測度 μ で次の左不変性を満たすものが存在する:
任意の Γ の部分集合 A と $s \in \Gamma$ に対し,

$$\mu(sA) = \mu(A)$$

が成り立つ;

- (iii) $C^*\Gamma$ から $C_r^*\Gamma$ へ自然な全射準同型が単射 (ゆえに同型) となる.

他にも多くの同値な条件が知られている. 上の定理の (iii) において, 自然でない同型が $C^*\Gamma$ と $C_r^*\Gamma$ の間に存在するとき, 条件 (i), (ii) が得られるかどうかについては不明.

Amenable 群の例を挙げよう.

- (i) 有限群.

(ii) 群 Γ が劣指数増大度 (subexponential growth) をもつとは, Γ の有限生成系 $S = S^{-1} = \{s^{-1} \in \Gamma : s \in S\}$ で,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |S^n|^{1/n} = 1$$

を満たすものとれるときをいう. ここで, $n \in \mathbb{N}$ に対し,

$$S^n = \{s_1 \cdots s_n \in \Gamma : s_1, \dots, s_n \in S\}$$

と記すとする.

命題 1.2. 劣指数増大度をもつ群は amenable である. もっと一般に, 離散群 Γ に対し, 次のような Γ の有限部分集合の列 $\{e\} = E_0 \subseteq E_1 \subseteq E_2 \cdots$ がとれるとき, Γ は amenable である: 任意の $n, m \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\bigcup E_n = \Gamma, \quad E_n^{-1} = E_n, \quad E_n E_m \subseteq E_{nm}$$

を満たし, さらに

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |E_n|^{1/n} = 1$$

を満たす.

証明. $s \in \Gamma$ を任意にとる. $s \in E_k$ とすると, $n \geq k$ となる任意の n に対し, $E_{n-k} \subseteq sE_n \cap E_n$ が成り立つ. よって,

$$1 \geq \frac{|sE_n \cap E_n|}{|E_n|} \geq \frac{|E_{n-k}|}{|E_n|}$$

となる. 一般に, 正の実数からなる数列 $\{a_n\}_n$ に対し,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n^{1/n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n^{1/n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

が成り立つことと, 条件

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |E_n|^{1/n} = 1$$

から, $n \rightarrow \infty$ で右辺が 1 に収束することがわかる. ゆえに, $\mu_n \in \text{Prob}\Gamma$ を E_n 上の一様分布な確率測度とすれば, 列 $\{\mu_n\}$ が 定義 1.1 の性質を満たすことがわかる. $\square$

劣指数増大度をもつ群としては, 可換群や可解群が挙げられる.

定理 1.3. (i) Amenable 群の部分群は amenable である.

(ii) 離散群の完全列

$$1 \rightarrow \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2 \rightarrow \Gamma_3 \rightarrow 1$$

に対し, Γ_1 と Γ_3 が amenable ならば, Γ_2 も amenable である.

- (iii) Amenable 群の商群は amenable である.
- (iv) Amenable 群の帰納的極限は amenable である.

命題 1.4. 2 つの文字 a, b で生成される自由群 $\mathbb{F}_2$ は amenable でない.

証明. $\mathbb{F}_2$ の部分集合 A^+, A^-, B^+, B^- を次のように定義する:

$$\begin{aligned} A^+ &= a \text{ で始まる既約語全体,} \\ A^- &= a^{-1} \text{ で始まる既約語全体,} \\ B^+ &= (b \text{ で始まる既約語全体}) \setminus \{b, b^2, b^3, \dots\}, \\ B^- &= (b^{-1} \text{ で始まる既約語全体}) \cup \{e, b, b^2, \dots\}. \end{aligned}$$

このとき,

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_2 &= A^+ \sqcup A^- \sqcup B^+ \sqcup B^- \\ &= a^{-1}A^+ \sqcup A^- \\ &= b^{-1}B^+ \sqcup B^-. \end{aligned}$$

もし, $\mathbb{F}_2$ が amenable であるとする, $\mathbb{F}_2$ 上の左不変かつ有限加法的となる確率測度 μ が存在する. このとき,

$$\begin{aligned} 1 &= \mu(\mathbb{F}_2) = \mu(A^+) + \mu(A^-) + \mu(B^+) + \mu(B^-) \\ &= \mu(a^{-1}A^+) + \mu(A^-) + \mu(b^{-1}B^+) + \mu(B^-) \\ &= \mu(\mathbb{F}_2) + \mu(\mathbb{F}_2) = 2. \end{aligned}$$

これは矛盾である. □

次に, 離散群の作用の amenability を定義する. 離散群 Γ と局所コンパクト空間 X に対し, 準同型 $\Gamma \rightarrow \text{Homeo}(X)$ が備わっているとき, X は Γ -空間であるという.

定義 1.2. 離散群 Γ と局所コンパクト Γ -空間 X が与えられているとき, X が (Γ -空間として) amenable であるとは, 次を満たす連続写像の列

$$\mu_n: X \ni x \mapsto \mu_n^x \in \text{Prob}\Gamma$$

が存在するときをいう: 任意の $\Gamma \times X$ のコンパクト部分集合 K に対し, 数列 $\{\|s\mu_n^x - \mu_n^{sx}\|_1\}$ は K 上一様に 0 に収束する.

このとき, groupoid $\Gamma \ltimes X$ が amenable という言い方もする.

例 1.2. $\partial\mathbb{F}_2$ を $\mathbb{F}_2$ の無限遠境界とする. このとき, $\mathbb{F}_2 \ltimes \partial\mathbb{F}_2$ は amenable.

定義 1.3. 離散群 Γ が exact であるとは, amenable なコンパクト Γ -空間が存在するときをいう.

ほとんどの自然な離散群は exact であることが確かめられている. 例えば, amenable 群, (Gromov の意味での) 双曲群, 線型群などは全て exact である.

1.2 Baum-Connes 予想

この小節では, 与えられた離散群の exactness を証明することによって得られる, 幾何学的結果を述べる.

M を滑らかな閉多様体, D を M 上の楕円型偏微分作用素とする. このとき, Fredholm 指数 $\text{Ind} D \in \mathbb{Z}$ が定まる. この指数をもっと多くの情報をもつものとして捕えることを考える.

定義 1.4. A を C^* -環とし, X を局所コンパクト空間とする. X 上の A -ベクトル束とは, X 上の $\mathbb{C}$ -ベクトル束で各ファイバーが有限生成かつ射影的な A -加群であって, さらに, 座標変換が A -線型にとれるものをいう.

M を滑らかな閉多様体とし, 準同型 $\pi_1(M) \rightarrow \Gamma$ が与えられているとする. このとき, 自然な写像

$$\mathcal{E} = \widetilde{M} \times_{\pi_1(M)} C^*\Gamma \rightarrow M$$

は $C^*\Gamma$ -ベクトル束を定める.

D を M 上の楕円型偏微分作用素とする. D_Γ を $\mathcal{E}$ の切断の集合上に作用する自然な持ち上げとする. このとき, $\ker D_\Gamma$ と $\text{coker} D_\Gamma$ は $C^*\Gamma$ -加群となる. さらに, よい条件が備われば, この 2 つの $C^*\Gamma$ -加群は有限生成かつ射影的となり,

$$\text{Ind}_\Gamma D = [\ker D_\Gamma] - [\text{coker} D_\Gamma] \in K_0(C^*\Gamma)$$

が定義できる. Trivial 表現により誘導される準同型

$$K_0(C^*\Gamma) \rightarrow K_0(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{Z}$$

による $\text{Ind}_\Gamma D$ の像は, はじめに述べた Fredholm 指数に一致する.

特別な楕円型偏微分作用素として, 符号作用素と Dirac 作用素がある. これらの指数に関して, 次のような定理がある:

定理 1.5 (Kasparov). 向き付け可能な滑らかな閉多様体上の符号作用素 D に対する $\text{Ind}_\Gamma D$ は, 向き付けられたホモトピーに対して不変である.

定理 1.6 (Rosenberg). 滑らかな閉 spin 多様体が正のスカラー曲率をもてば, その上の Dirac 作用素 D に対する $\text{Ind}_\Gamma D$ は 0 である.

離散群 Γ に対し, $E\Gamma \rightarrow B\Gamma$ を Γ の分類空間とその普遍被覆空間とする. このとき, $\mathcal{E} = E\Gamma \times_\Gamma C^*\Gamma$ とおくと, 自然な写像 $\mathcal{E} \rightarrow B\Gamma$ は $C^*\Gamma$ ベクトル束の構造をもつ.

$B\Gamma$ としてコンパクトなものととれると仮定すると,

$$[\mathcal{E}] \in K_0(C(B\Gamma, C^*\Gamma))$$

を定めることができる. この $[\mathcal{E}]$ をかけることによって得られる準同型

$$\mu: K_*(B\Gamma) \rightarrow K_*(C^*\Gamma)$$

を assembly map という. または, この準同型と $K_*(C^*\Gamma) \rightarrow K_*(C_r^*\Gamma)$ との合成

$$\mu: K_*(B\Gamma) \rightarrow K_*(C_r^*\Gamma)$$

も assembly map と呼ばれる.

予想 1.1 ((強い意味での) Novikov 予想). μ は rationally injective である.

この予想が正しければ, 次の Novikov 予想が従う: $[D] \in K_*(B\Gamma) \otimes \mathbb{Q}$ は向き付けられたホモトピーに対して不変である.

予想 1.2 (ねじれない離散群 Γ に対する Baum-Connes 予想). μ は同型である.

定義 1.5. Γ -空間 X が proper であるとは, X の各点 x に対し, それを含む開集合 U とある位相空間 Y と Γ の有限部分群 Λ があって, U と $\Gamma \times_\Lambda Y$ が Γ -同変で同一視できるときをいう.

注意 1.1. X が局所コンパクトのときには, 上で定義した properness は, Γ の作用に関する通常の properness, つまり, 任意の X のコンパクト部分集合 K に対し, $s \in \Gamma$ で $sK \cap K \neq \emptyset$ となるものは有限個となることと同値である.

定理 1.7. 任意の離散群 Γ に対し, proper な Γ -空間 $\mathcal{E}\Gamma$ で次を満たすものが存在する: 任意の proper な Γ -空間 X に対し, Γ 同変連続写像 $f: X \rightarrow \mathcal{E}\Gamma$ が Γ -同変ホモトピーを除いて唯一存在する.

例 1.3. $\mathcal{E}\Gamma$ の例を挙げる:

- (i) Γ が有限群のとき, $\mathcal{E}\Gamma$ として 1 点集合がとれる.
- (ii) Γ がねじれの元をもたないとき, $\mathcal{E}\Gamma$ は $E\Gamma$ と同一視できる.
- (iii) Γ が樹木 T に proper に作用しているとき, $\mathcal{E}\Gamma$ として T がとれる.
- (iv) Γ が 連結半単純 Lie 群 G の格子 (lattice) のとき, $\mathcal{E}\Gamma$ として G/K がとれる. ここで, K は G の極大コンパクト部分群を指す.

この $\mathcal{E}\Gamma$ に対し, Γ -同変 K -ホモロジー $K_*^\Gamma(\mathcal{E}\Gamma)$ が定義でき, さらに, assembly map

$$\mu: K_*^\Gamma(\mathcal{E}\Gamma) \rightarrow K_*(C_r^*\Gamma)$$

が定義できる.

予想 1.3 (Baum-Connes 予想). μ は同型である.

命題 1.8. 離散群 Γ に対し, Baum-Connes 予想が正しければ, 強い意味での Novikov 予想も正しい.

証明. Γ -同変連続写像 $E\Gamma \rightarrow \mathcal{E}\Gamma$ が存在することに注意せよ. このとき, 準同型 $K_*^\Gamma(E\Gamma) \rightarrow K_*^\Gamma(\mathcal{E}\Gamma)$ は rationally injective となる. よって, Γ に対して Baum-Connes 予想が正しければ,

$$K_*(B\Gamma) = K_*^\Gamma(E\Gamma) \rightarrow K_*^\Gamma(\mathcal{E}\Gamma) \rightarrow K_*(C_r^*\Gamma)$$

は rationally injective となる. $\square$

定理 1.9 (Higson-Kasparov, '97). Haagerup property をもつ離散群に対して Baum-Connes 予想は正しい. 特に, amenable 群に対して Baum-Connes 予想は正しい.

Tu はこの定理を次のように, 離散群の amenable な作用に関する結果に一般化した:

定理 1.10 (Tu). 離散群 Γ と Γ -空間 X に対して, $\Gamma \ltimes X$ が amenable ならば, assembly map

$$\mu: K_*^\Gamma(\mathcal{E}\Gamma, C(X)) \rightarrow K_*(C_r^*(\Gamma \ltimes X))$$

は同型となる.

この定理を用いると次の系を得ることができる:

系 1.11. Exact 群に対して, 予想 1.3 における μ は単射である.

2 Amenable な作用の例 (2 日目)

2.1 Amenable 性

定義 2.1. X をコンパクト Γ -空間とする. X が amenable であるとは, 連続写像 $\mu_n: X \ni x \rightarrow \mu_n^x \in \text{Prob}\Gamma$ で任意の $s \in \Gamma$ に対し

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} \|s\mu_n^x - \mu_n^{sx}\| = 0$$

が成り立つものが存在するときをいう.

注意 2.1. 上の定義では μ_n をある有限部分集合 $F_n \subseteq \Gamma$ に対し $\text{supp } \mu_n^x \subseteq F_n$ を満たすようにとれる. 実際, 与えられた $\epsilon > 0$, 測度 μ と任意の有限部分集合 $F \subseteq \Gamma$ と任意の $x \in X$ に対し

$$U_F = \{x \in X : \mu^x(F) > 1 - \epsilon\}$$

とおくと, $\{U_F\}_F$ は X の有向開被覆であり, X はコンパクトだからある有限部分集合 $F \subseteq \Gamma$ により $U_F = X$ となる. 従って F の補集合上測度 0 となるように μ_n をとりなおせばよい.

注意 2.2. X を amenable Γ -空間とする. X に Γ -不変な確率測度 m が存在するならば, Γ は amenable である. 実際, そのような m と $\mu_n: X \rightarrow \text{Prob } \Gamma$ に対し,

$$\int_X \mu_n^x dm(x)$$

は Γ 上の近似的不変確率測度になる.

注意 2.3. X が amenable Γ -空間, Y が Γ -空間でかつ Y から X への Γ -不変な連続写像が存在するならば, 写像の合成により Y も amenable であることがわかる.

定義 2.2. 群 Γ が exact であるとは, コンパクトな amenable Γ -空間が存在するときをいう. これは以下の各条件と同値である.

- Stone-Cech コンパクト化 $\beta\Gamma$ が amenable Γ -空間になる.
- Γ の任意の有限部分集合 E と $\epsilon > 0$ に対し, 連続写像 $\mu: \Gamma \rightarrow \text{Prob } \Gamma$ で $\max_{s \in E} \sup_{t \in \Gamma} \|s\mu^t - \mu^{st}\| < \epsilon$ なるものが存在する.

例 2.1. 自由群 $\mathbb{F}_2 = \langle a, b \rangle$ に対し, その境界 $\partial\mathbb{F}_2$ は片側無限に続く既約語の集合であり, $\{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}^{\mathbb{N}}$ の部分集合とみなせる. $\partial\mathbb{F}_2$ は積位相に関してコンパクトとなる. $\Delta\mathbb{F}_2 = \mathbb{F}_2 \cup \partial\mathbb{F}_2$ には自然な位相が入り, その位相により $\Delta\mathbb{F}_2$ はコンパクトである. $\mathbb{F}_2$ は $\Delta\mathbb{F}_2$ 上自然に作用することに注意せよ.

命題 2.1. $\partial\mathbb{F}_2$ は amenable $\mathbb{F}_2$ -空間である.

証明. $n \in \mathbb{N}$ と片側無限の既約語 $x = x_1x_2\cdots$, $x_i \in \{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$ に対し

$$\mu_n^x = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{x(k)},$$

ただし $x(k) = x_1 \cdots x_k \in \mathbb{F}_2$ と定義すると,

$$\|s\mu_n^x - \mu_n^{sx}\| < \frac{|s|}{n}$$

となり $n \rightarrow \infty$ のとき左辺は $x \in X$ に関して一様に 0 に収束する. □

群 Γ が集合 K に作用しているとき, $a \in K$ に対しその固定化群を Γ^a とかくことにする.

命題 2.2. X をコンパクト Γ -空間とし, K を可算な離散 Γ -空間とする. 任意の有限部分集合 $E \subseteq \Gamma$ と $\epsilon > 0$ に対して, Borel 写像 $\zeta: X \rightarrow \text{Prob } K$ (すなわち, 任意の $x \in K$ に対し $X \ni x \mapsto \zeta^x(a) \in \mathbb{R}$ が Borel) で

$$\max_{s \in E} \sup_{x \in X} \|s\zeta^x - \zeta^{sx}\| < \epsilon$$

をみたすものが存在すると仮定する. このとき, コンパクト Γ -空間 Y が任意の $a \in K$ に対し Γ^a -空間として amenable ならば, $X \times Y$ は amenable Γ -空間である.

証明. ζ を近似することで ζ は連続としてよい. 与えられた $E \subseteq \Gamma$ と $\epsilon > 0$ に対し, 仮定から連続写像 $\zeta: X \rightarrow \text{Prob } K$ と有限部分集合 $F \subseteq K$ で

- $\max_{s \in E} \sup_{x \in X} \|s\zeta^x - \zeta^{sx}\| < \epsilon,$
- $\text{supp } \zeta^x \subseteq F$

をみたすものがとれる. $K = \bigsqcup_{v \in V} \Gamma v$, $V \subseteq K$ を K の Γ による軌道分割とし, $v: K \rightarrow V$ を射影, $\sigma: K \rightarrow \Gamma$ を引き戻しとする.

$$E^v := \{\sigma(sa)^{-1}s\sigma(a) \in \Gamma : s \in E, a \in \Gamma v \cap F\} \subseteq \Gamma^v$$

とおくと, Y は amenable Γ^v -空間で E^v は有限集合であるから, 連続写像 $\nu_v: Y \rightarrow \text{Prob } \Gamma^v$ で

$$\max_{s \in E^v} \sup_{y \in Y} \|s\nu_v^y - \nu_v^{sy}\| < \epsilon$$

をみたすものがある. そこで $x \in X$, $y \in Y$ に対し

$$\mu^{x,y} = \sum_{a \in K} \zeta^x(a) \sigma(a) \nu_{v(a)}^{\sigma(a)^{-1}y}$$

とおくと, $s \in E$ に対し

$$\begin{aligned} s\mu^{x,y} &= \sum_{a \in K} \zeta^x(a) s\sigma(a) \nu_{v(a)}^{\sigma(a)^{-1}y} \\ &\approx_\epsilon \sum_{a \in K} \zeta^x(a) \sigma(sa) \nu_{v(a)}^{\sigma(sa)^{-1}sy} \\ &\approx_\epsilon \sum_{a \in K} \zeta^{sx}(sa) \sigma(sa) \nu_{v(sa)}^{\sigma(sa)^{-1}sy} \\ &= \mu^{sx,sy} \end{aligned}$$

ここで, $a \approx_\epsilon b$ は $\|a - b\| < \epsilon$ を表す. □

注意 2.4. 群 Γ の部分群 Λ が exact ならば, $\beta\Gamma$ は amenable Λ -空間である.

証明. Λ -同変写像 $\Gamma \rightarrow \Lambda$ をひとつ選ぶ. すると自然に Λ -同変写像 $\beta\Gamma \rightarrow \beta\Lambda$ が得られる. $\square$

系 2.3. 群の exact 性は群の拡張の操作に関して保たれる.

証明. 完全列

$$\{e\} \rightarrow \Lambda \rightarrow \Gamma \rightarrow \Gamma/\Lambda \rightarrow \{e\}$$

で Λ と Γ/Λ が exact なものを取り, 命題 2.2 で $X = \beta(\Gamma/\Lambda)$, $K = \Gamma/\Lambda$, $Y = \beta\Gamma$ とすると任意の $a \in \Gamma/\Lambda$ に対し $\Gamma^a = \Lambda$ であるから注意 2.4 により命題の仮定がみたされ $X \times Y$ は amenable Γ -空間である. $\square$

定理 2.4. G を局所コンパクト群, $P \leq G$ を閉 amenable 群で G/P がコンパクトであると仮定する. $\Gamma \leq G$ が離散部分群ならば G/P は amenable Γ -空間である.

証明. $\sigma: G/P \rightarrow G$ を正則 Borel 切断とし, $Y \subseteq G$ を Borel Γ -基本領域 (すなわち, $G = \bigsqcup_{s \in \Gamma} sY$) とする. まず写像

$$\text{Prob } G \ni \tilde{\mu} \mapsto (\tilde{\mu}(sY))_{s \in \Gamma} \in \text{Prob } \Gamma$$

は Γ -不変であることに注意する. 有限部分集合 $E \subseteq \Gamma$ と $\epsilon > 0$ が与えられたとき, $\tilde{E} = \{\sigma(sx)^{-1}s\sigma(x) \in P : x \in G/P, s \in E\}$ とおく. P は amenable であるから, $\nu \in \text{Prob } P$ で任意の $g \in \tilde{E}$ に対し $\|g\nu - \nu\| < \epsilon$ をみたすものがとれる. $\tilde{\mu}^x = \sigma(x)\nu \in \text{Prob } P \subseteq \text{Prob } G$ とおくと $s \in E$ ならば

$$\begin{aligned} \|s\tilde{\mu}^x - \tilde{\mu}^{sx}\| &= \|\sigma(sx)^{-1}s\sigma(x)\nu - \nu\| \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

となり, G/P が amenable Γ -空間であることが分かる. $\square$

例 2.2. 特殊線型群 $G = SL_n(\mathbb{R})$ は岩澤分解

$$G = KAN$$

をもつ. ここで K は直交群 $SO(n)$ を, A は対角行列全体を, N は対角成分が 1 であるような上半三角行列全体をあらわす. $P = AN$ とおくとこれは極大可解部分群で G/P はコンパクトである. 同じ議論が K をコンパクト部分群, A を可換群, N をべき単部分群としたときの分解 $G = KAN$ に適用できる.

2.2 可算樹木上の作用

可算樹木 T 上の群作用を考える. 例としては融合自由積 $\Gamma = \Gamma_1 *_\Lambda \Gamma_2$ に対する Bass-Serre 樹木 T がある. これは T の頂点集合を $\Gamma/\Gamma_1 \sqcup \Gamma/\Gamma_2$ とし, $s\Gamma_1 \cap t\Gamma_2 \neq \emptyset$ ならば, $s\Gamma_1$ と $t\Gamma_2$ に対応する頂点を辺で結ぶことで得られる樹木である. Γ は T に左からの積で作用している.

一般に, T を可算樹木とし, $\Delta T = T \cup \partial T$ とおく. ΔT の 2 点 x, y を結ぶ最短の道を $[x, y]$ とかくことにする. $x \in \Delta T$ と有限部分集合 $F \subseteq T$ に対し

$$M(x, F) = \{y \in \Delta T : [x, y] \cap F \subseteq \{x\}\}$$

と定義すると, これらが点 x の開近傍となるように ΔT 上に Hausdorff 位相を入れることができる. また定義からこの位相で T は ΔT の稠密な部分集合である. この位相は T 上に制限しても T の距離位相とは一般には一致しないことに注意せよ.

また, 有限個の辺の集合 I に対しても同様に

$$P(x, I) = \{y \in \Delta T : \langle x, y \rangle \cap I = \emptyset\}$$

と定義する. ここで $\langle x, y \rangle$ は $[x, y]$ 上にある辺の集合である. これから決まる ΔT 上の位相も上のものと同じ位相を定めることが簡単にわかる.

定理 2.5 ([Bo]). ΔT はコンパクト空間である.

証明. まず $A \subseteq T$ が有限集合ならば $\Delta T = \bigcup_{a \in A} M(a, A)$ であることに注意する. $T = \bigcup_n A_n$ なる T の有限部分集合の増大列 $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ をとり, $\mathcal{U}$ を ΔT の開被覆とする. ある $n \in \mathbb{N}$ が任意の $a \in A_n$ に対し $U \in \mathcal{U}$ で $M(a, A_n) \subseteq U$ なものがあるようにとれることをいえばよい.

そのような n はないと仮定する. つまり各 n に対し点 $a_n \in A_n$ で任意の $U \in \mathcal{U}$ に対しても $M(a_n, A_n) \not\subseteq U$ とならないものがあると仮定する. もし点 a_n たちがすべて等しいならば仮定に反することを示すのは簡単であるから, a_n たちはすべて異なる点としてよい.

一点 $x_0 \in T$ を固定する. 各 n に対し $\alpha_n = [x_0, a_n]$ とおく. すると有限個の辺の集合 I でそれぞれ x_0 から始まりかつ $P(x_0, I) \subseteq U$ なものがとれる. 部分列をとることで I の各辺の終点が $\bigcap_n A_n$ の点であるとしてよい.

もし $I \cap \alpha_n = \emptyset$ ならば $M(a_n, A_n) \subseteq P(x_0, I)$ となることを示す. $b \in M(a_n, A_n)$ とすると $[a_n, b] \cap A_n = \{a_n\}$ である. よって道 $[b, x_0]$ と I は共通の辺を持たないから $b \in P(x_0, I)$ がいえる. しかし $M(a_n, A_n) \subseteq P(x_0, I) \subseteq U$ は仮定に反するから結局 $I \cap \alpha_n \neq \emptyset$ である.

加えて I は有限集合だから部分列をとって各道 α_n の x_0 から始まる辺は共通であるとしてよく, その終点を x_1 とおく. a_n たちは異なる点だから上の議論で x_0 を x_1 で置き換えて同じことをして, これを繰り返すと無限の道

α とその極限 $y \in \Delta T$ で各道 α_n は x_0 から始まる最初の n 個の辺が α のそれと共通であるようなものがとれる。

$y \in V \in \mathcal{U}$ であるとする。有限個の頂点 $B \in T$ で $M(y, B) \subseteq V$ なものをとる。このとき B の各点と x_0 の距離が高々 $n-1$ かつ $B \subseteq A_n$ であるような n がとれる。すると $b \in M(a_n, A_n)$ ならば道 $[b, y]$ は B の点を通らないので $M(a_n, A_n) \subseteq M(y, B) \subseteq V$ がいえるが、これは矛盾であるので定理が示された。 $\square$

補題 2.6. $\text{Aut}(T)$ -同変な Borel 写像の列 $\zeta_n: T \times \Delta T \rightarrow \text{Prob } T$ で任意の $x, x' \in T$ に対し

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in \Delta T} \|\zeta_n(x, z) - \zeta_n(x', z)\| = 0$$

をみたすものが存在する。

証明. $n \in \mathbb{N}$ を与え、 $x \in T$, $z \in \Delta T$ とすると、 x と z を結ぶ最短の道 $a_0 a_1 a_2 \cdots a_d$ が唯一存在する。ここで $d = d(x, z)$ とする。 $\zeta_n(x, z) \in \text{Prob}(T)$ を

$$\zeta_n(x, z) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{a_0 \cdots a_k}$$

で定義する。ただし $k > d$ のときは $a_0 \cdots a_k$ の代わりに $a_0 \cdots a_d$ を用いる。このとき ζ_n は Borel で $x, x' \in T$ ならば

$$\sup_{z \in \Delta T} \|\zeta_n(x, z) - \zeta_n(x', z)\| \leq \frac{d(x, x')}{n}$$

である。 $\square$

定理 2.7. T が可算樹木で、 Γ が T に等長に作用しているならば、近似的 Γ -不変写像 $\zeta_n: \Delta T \rightarrow \text{Prob } T$ が存在する。

証明. 原点 $x_0 \in T$ を固定する。 $z \in \Delta T$ が与えられたとき、補題 2.6 の $\zeta_n(x_0, z)$ を用いて $\zeta_n^z = \zeta_n(x_0, z)$ と定義すると、 $s \in \Gamma$ に対し n が十分大ならば z に関して一様に

$$\begin{aligned} s\zeta_n^z &= s\zeta_n(x_0, z) \\ &= \zeta_n(sx_0, sz) \\ &\approx \zeta_n(x_0, sz) \\ &= \zeta_n^{sz} \end{aligned}$$

となる。 $\square$

系 2.8. T が可算樹木で, Γ が T に等長に作用しているとする. 全ての頂点のイソトロピー群が exact ならば Γ は exact である. 特に, exact 性は融合自由積の下で保存される.

証明. 定理 2.7 より, 近似的 Γ -同変写像 $\zeta_n: \Delta T \rightarrow \text{Prob } T$ が存在する. すると有限部分集合 $E \subseteq \Gamma$ と $\epsilon > 0$ に対し, n を十分大きくとると

$$\max_{s \in E} \sup_{z \in \Delta T} \|s\zeta_n^z - \zeta_n^{sz}\| < \epsilon$$

が満たされる. また仮定から $x \in T$ ならばイソトロピー群 Γ^x は $\beta\Gamma$ -amenable なので, 命題 2.2 から $\Delta T \times \beta\Gamma$ は Γ -amenable である.

次に, Γ_1, Γ_2 が exact と仮定し, 融合自由積 $\Gamma = \Gamma_1 *_\Lambda \Gamma_2$ をとる. このとき, Bass-Serre 樹木 $T = \Gamma/\Gamma_1 \sqcup \Gamma/\Gamma_2$ の頂点 x に対するイソトロピー群 Γ^x は Γ_1 または Γ_2 に共役なので exact となり, 定理の前半から Γ も exact である. $\square$

3 スペクトルによる特徴づけ (3 日目)

3.1 測度 amenable

この節では, Γ は可算離散群, X をコンパクト Γ -空間とする. m を X 上の Γ -準不変確率測度とする. ここで, 測度 m が Γ -準不変であるとは, 任意の $s \in \Gamma$ と m -零集合 B に対し $m(sB) = 0$ をみたすことをいう. このとき, (X, m) を Γ -測度空間という. $s \in \Gamma$ が与えられたとき, $\left(\frac{ds}{dm}\right)(x)$ を Radon-Nikodym 微分とする. これは以下のように特徴づけられる: 任意の $\xi \in L_1(X, m)$ に対し,

$$\int_X \xi(sm) \left(\frac{ds}{dm}\right)(x) dm(x) = \int_X \xi(x) dm(x).$$

このとき, ユニタリ表現 $\pi_m: \Gamma \rightarrow \mathbb{B}(L_2(X, m))$ が

$$(\pi_m(s)\xi)(x) = \left\{ \left(\frac{ds^{-1}}{dm}\right)(x) \right\}^{\frac{1}{2}} \xi(s^{-1}x)$$

によって定義される.

X 上の関数 f と $s \in \Gamma$ に対し $\alpha_s(f)(x) = f(s^{-1}x)$, $x \in X$ と定義する. コンパクト空間 X が amenable Γ -空間であるためには, 正值連続関数族 $\{f_t^n\}_{t \in \Gamma, n \in \mathbb{N}} \subseteq C(X)$ で, 次の 3 条件を満たすものの存在が必要十分である.

- 任意の $n \in \mathbb{N}$ と $x \in X$ に対し, $\{t \in \Gamma: f_t^n(x) \neq 0\}$ は有限集合である.
- 任意の $n \in \mathbb{N}$ と $x \in X$ に対し, $\sum_{t \in \Gamma} f_t^n(x) = 1$ が成り立つ.

- Γ の任意の有限部分集合 E に対し,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{s \in E, x \in X} \sum_{t \in \Gamma} |\alpha_s(f_t^n)(x) - f_{st}^n(x)| = 0$$

が成り立つ.

定義 3.1. Γ -測度空間 (X, m) が amenable であるとは, 有向集合 I と正值関数族 $\{f_t^{(i)}\}_{t \in \Gamma, i \in I} \subseteq L_\infty(X, m)$ で次の 3 条件を満たすものが存在するときをいう:

- 任意の $i \in I$ と $x \in X$ に対し, $\{t \in \Gamma : f_t^{(i)}(x) \neq 0\}$ は有限集合である.
- 任意の $i \in I$ と $x \in X$ に対し, $\sum_{t \in \Gamma} f_t^{(i)}(x) = 1$ が成り立つ.
- 任意の $s \in \Gamma$ に対し $L_\infty(X, m)$ の $*$ -弱位相で

$$\lim_{i \in I} \sum_{t \in \Gamma} |\alpha_s(f_t^{(i)}) - f_{st}^{(i)}| = 0.$$

ただし, 1 つ目の条件は外してもよい.

定義 3.2. $\pi_i: \Gamma \rightarrow \mathbb{B}(H_i)$ ($i = 1, 2$) を群の表現とする. 写像

$$\pi_2(\mathbb{C}\Gamma) \rightarrow \pi_1(\mathbb{C}\Gamma), \pi_2(s) \mapsto \pi_1(s), s \in \Gamma$$

が $\mathbb{B}(H_1)$ と $\mathbb{B}(H_2)$ におけるノルム位相に関して連続なとき, π_1 は π_2 に弱包含されているといい, $\pi_1 \preceq \pi_2$ とかく.

定理 3.1 ([AD3]). Γ -測度空間 (X, m) に対し, 以下の (i)-(iii) は同値である:

- (i) (X, m) は amenable Γ -測度空間である;
- (ii) 正の Γ -同変条件付き期待値 $M: L_\infty(\Gamma \times X) \rightarrow L_\infty(X)$ が存在する;
- (iii) $\pi_m \preceq \lambda$ かつ Γ -同変条件付き期待値 $T: L_\infty(X \times X) \rightarrow L_\infty(X)$ が存在する.

ここで, Γ は $L_\infty(\Gamma \times X)$ と $L_\infty(X \times X)$ にそれぞれ対角に作用している.

証明のスケッチ. (iii) $\Rightarrow$ (ii) の証明は [AD3] を見よ.

(i) $\Rightarrow$ (ii): $\{f_t^{(i)}\}_{t \in \Gamma, i \in I}$ を $L_\infty(X, \ell_1\Gamma)$ の元と見たときの $*$ -弱極限が求める条件付き期待値である.

(ii) $\Rightarrow$ (i): 条件付き期待値 M に対し $L_\infty(X, \ell_1\Gamma)$ の正な元のネット $\{g_i\}$ で $g_i \geq 0$, $\sum_{t \in \Gamma} g_i(t, \cdot) = 1$ かつその $*$ -弱極限が M となるものをとる. $L_\infty(X, \ell_1\Gamma)$ の $\mathbb{B}(L_\infty(\Gamma \times X), L_\infty(X))$ への埋め込みを $g \mapsto m_g$ とすると, $\varphi \in L_\infty(\Gamma \times X)$, $f \in L_1(\Gamma)$, $h \in L_1(X)$ ならば

$$\lim_i \langle m_{g_i}(f * \varphi) - f * m_{g_i}(\varphi), h \rangle = 0,$$

すなわち

$$\lim_i \int h(x) \sum_{s,t \in \Gamma} f(s) \varphi(s^{-1}t, s^{-1}x) [g_i(s^{-1}t, s^{-1}x) - g_i(t, x)] dm(x) = 0.$$

$s_0 \in \Gamma$ を固定し, $f = \delta_{s_0} \in \ell_1 \Gamma$ とおき, $\varphi \in L_\infty(\Gamma \times X)$ を任意の $(t, x) \in \Gamma \times X$ に対し

$$\varphi(t, x)(g_i(t, x) - g_i(s_0 t, s_0 x)) = |g_i(t, x) - g_i(s_0 t, s_0 x)|$$

なるものとする. $f_t^{(i)}(x) = g_i(t, x)$ とおくと, 任意の $x \in X$ に対し

$$\begin{aligned} & \sum_{s,t \in \Gamma} f(s) \varphi(s^{-1}t, s^{-1}x) [g_i(s^{-1}t, s^{-1}x) - g_i(t, x)] \\ &= \sum_{t \in \Gamma} \phi(s_0^{-1}t, s_0^{-1}x) [g_i(s_0^{-1}t, s_0^{-1}x) - g_i(t, x)] \\ &= \sum_{t \in \Gamma} |g_i(s_0^{-1}t, s_0^{-1}x) - g_i(t, x)| \\ &= \sum_{t \in \Gamma} |g_i(t, s_0^{-1}x) - g_i(s_0 t, x)| \\ &= \sum_{t \in \Gamma} |\alpha_{s_0}(f_t^{(i)})(x) - f_{s_0 t}^{(i)}(x)|. \end{aligned}$$

ゆえに, 任意の $h \in L_1(X)$ に対し,

$$\lim_i \int h(x) \sum_{t \in \Gamma} |\alpha_{s_0}(f_t^{(i)})(x) - f_{s_0 t}^{(i)}(x)| dm(x) = 0$$

となるから, (X, m) が amenable Γ -測度空間になることがわかる.

(i)&(ii) $\Rightarrow$ (iii): Γ のユニタリ表現 π_m に対し $\lambda \otimes \pi_m \simeq \prod_{\dim \pi_m} \lambda$ であるから, 任意の $f \in L_1(\Gamma)$ に対し $\|\pi_m(f)\| \leq \|\lambda \otimes \pi_m(f)\|$ を示せば, $\pi_m \preceq \lambda$ がわかる. Amenable の定義から正値関数族 $\{g_t^{(i)}\}_{t \in \Gamma, i \in I} \subseteq L_\infty(X, m)$ をとり, $v \in L_2(X)$ とする. $v_i(s, x) = (g_s^{(i)}(x))^{\frac{1}{2}} v(x) \in L_2(\Gamma \times X)$ とすると $\|v_i\|_2 = \|v\|_2$ である. さらに,

$$\lim_i \langle v_i, \lambda \otimes \pi_m(f) v_i \rangle = \langle v, \pi_m(f) v \rangle$$

なので, $\|\pi_m(f)\| \leq \|\lambda \otimes \pi_m(f)\|$ が示される.

次に条件付き期待値を構成する. $L_\infty(X)$ を $L_\infty(X \times X)$ の部分環とみなし, $E: L_\infty(X \times X) \rightarrow L_\infty(X)$ をノルムが 1 の射影とする. $\Phi: L_\infty(X \times X) \rightarrow L_\infty(\Gamma \times X)$ を $\Phi(\varphi)(s, x) = (sE(s^{-1}\varphi))(x)$ によって定義すると $\varphi \in L_\infty(X)$ ならば $\Phi(\varphi) = \varphi$ かつ Φ は Γ -同変である. (ii) から条件付き期待値 $M: L_\infty(\Gamma \times X) \rightarrow L_\infty(X)$ をとると, $T = M \circ \Phi$ が求める条件付き期待値となる. $\square$

定理 3.2 ([AD1]). コンパクト Γ -空間 X が amenable であることと, X 上の任意の Γ -準不変確率測度 m に対し (X, m) が amenable であることは同値である.

注意 3.1 ([AD3]). m を $SL(3, \mathbb{R})/SL(2, \mathbb{R})$ 上の Lebesgue 測度とすると, $(SL(3, \mathbb{R})/SL(2, \mathbb{R}), m)$ は自然に $SL(3, \mathbb{Z})$ -測度空間となる. この $SL(3, \mathbb{Z})$ -測度空間は amenable ではないが $\pi_m \prec \lambda$ であることが示される.

3.2 $(\Gamma \ltimes X)$ - C^* -環

X をコンパクト Γ -空間とする.

定義 3.3. A を単位元をもつ C^* -環とする. A が $(\Gamma \ltimes X)$ - C^* -環であるとは, $C(X)$ が A の中心 $Z(A)$ に含まれていて, Γ から $\text{Aut}(A)$ への準同型 α で $\alpha_s(fa) = \alpha_s(f)\alpha_s(a)$ が任意の $s \in \Gamma, f \in C(X), a \in A$ に対し成り立つときをいう.

例 3.1. $A = C(X)$ は $(\Gamma \ltimes X)$ - C^* -環である.

Γ から A へのコンパクトな台をもつ連続写像の空間を

$$C_c(\Gamma, A) = \left\{ \sum_{s \in P} sa_s : a_s \in A, P \subseteq \Gamma, |P| < \infty \right\}$$

とかく. この空間内での積は以下のように定義される.

$$\left(\sum_s sa_s \right) \cdot \left(\sum_t tb_t \right) = \sum_{s,t} st\alpha_t^{-1}(a_s)b_t.$$

従って $sas^{-1} = \alpha_s(a)$ がわかる. $C_c(\Gamma, A)$ の元の共役は

$$\left(\sum_s sa_s \right)^* = \sum_s a_s^* s^{-1} = \sum_s s^{-1} \alpha(a_s^*)$$

で定義される. ユニタリ表現 $\pi: \Gamma \rightarrow \mathbb{B}(H)$ と $*$ -表現 $\sigma: A \rightarrow \mathbb{B}(H)$ の組で任意の $s \in \Gamma, a \in A$ に対し

$$\pi(s)\sigma(a)\pi(s)^{-1} = \sigma(\alpha_s(a))$$

をみたすものを考えると, 演算の定義から $C_c(\Gamma, A)$ のどんな $*$ -表現もこの表現の組 (π, σ) に分解されることがわかる.

3.3 正則表現

$A \subseteq \mathbb{B}(H)$ を C^* -環としたとき, Γ と A の表現をそれぞれ

$$\begin{aligned}\lambda \otimes 1: \Gamma &\rightarrow \mathbb{B}(\ell_2 \Gamma \otimes H), \\ \sigma: A &\rightarrow \mathbb{B}(\ell_2 \Gamma \otimes H), \quad a \mapsto \text{SOT-} \sum_{t \in \Gamma} e_{tt} \otimes \alpha_t^{-1}(a),\end{aligned}$$

(ただし, e_{st} は δ_t を δ_s にうつし, $r \neq s$ ならば δ_t を 0 にうつすものである) で定義すると, $C_c(\Gamma, A)$ の $\mathbb{B}(\ell_2 \Gamma \otimes H)$ への表現が自然にできる. これを $C_c(\Gamma, A)$ の正則表現といい, $C_c(\Gamma, A)$ の $\mathbb{B}(\ell_2 \Gamma \otimes H)$ でのノルム閉包を $C_r^*(\Gamma, A)$ と表す.

定理 3.3 ([AD2]). コンパクト Γ -空間 X に対し, 以下は同値:

- (i) $\Gamma \ltimes X$ は amenable;
- (ii) $C^*(\Gamma, A) = C_r^*(\Gamma, A)$ が任意の $(\Gamma \ltimes X)$ - C^* -環 A に対して成り立つ;
- (iii) 任意の核型 C^* -環 A に対し, $C_r^*(\Gamma, A)$ は核型.

証明. (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) のみ示す.

(i) $\Rightarrow$ (ii): 正值連続関数族 $\{f_t^n\}_{t \in \Gamma, n \in \mathbb{N}} \subseteq C(X)$ で, 任意の $x \in X$ に対し

$$\sum_{t \in \Gamma} f_t^n(x) = 1$$

かつ任意の有限部分集合 $E \subseteq \Gamma$ に対し,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{s \in E, x \in X} \sum_{t \in \Gamma} |\alpha_s(f_t^n)(x) - f_{st}^n(x)| = 0$$

が成り立つものをとる. 有限部分集合 $F \subseteq \Gamma$ を固定し, 圧縮

$$\mathbb{B}(\ell_2 \Gamma) \otimes_{\min} \mathbb{B}(H) \rightarrow \mathbb{B}(\ell_2 F) \otimes_{\min} \mathbb{B}(H)$$

から誘導される $*$ -準同型

$$\begin{aligned}\varphi: C_r^*(\Gamma, A) &\rightarrow \mathbb{B}(\ell_2 F) \otimes_{\min} A, \\ (\lambda \otimes 1)(s)\sigma(a) &\mapsto \sum_{t \in F \cap s^{-1}F} e_{st,t} \otimes \alpha_t^{-1}(a)\end{aligned}$$

と $*$ -準同型

$$\begin{aligned}\psi_n: \mathbb{B}(\ell_2 F) \odot A &\rightarrow C_c(\Gamma, A), \\ \sum_t e_{s,t} \otimes a_{s,t} &\mapsto \sum_t (f_s^n)^{\frac{1}{2}} s a_{s,t} t^{-1} (f_t^n)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

を考える。このとき,

$$\begin{aligned}\psi_n \circ \varphi((\lambda \otimes 1)(s)\sigma(a)) &= \sum_{t \in F \cap s^{-1}F} (f_{st}^n)^{\frac{1}{2}} s t \alpha_t^{-1}(a) t^{-1} (f_t^n)^{\frac{1}{2}} \\ &= s a \sum_{t \in F \cap s^{-1}F} \alpha_{s^{-1}}((f_{st}^n)^{\frac{1}{2}}) (f_t^n)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

が成り立つ。 n と F を大きくすると $\sum_{t \in F \cap s^{-1}F} \alpha_{s^{-1}}((f_{st}^n)^{\frac{1}{2}}) (f_t^n)^{\frac{1}{2}} \in C(X)$ は 1 に収束する。 $\mathbb{B}(\ell_2 F)$ が有限次元, ゆえに核型であることを用いると (ii) がわかる。

(ii) $\Rightarrow$ (iii): 核型 C^* -環 A と任意の C^* -環 B に対し,

$$\begin{aligned}C_r^*(\Gamma, A) \otimes_{\min} B &= C_r^*(\Gamma, A \otimes_{\min} B) \\ &= C^*(\Gamma, A \otimes_{\min} B) \\ &= C^*(\Gamma, A \otimes_{\max} B) \\ &= C^*(\Gamma, A) \otimes_{\max} B \\ &= C_r^*(\Gamma, A) \otimes_{\max} B\end{aligned}$$

ゆえ, $C_r^*(\Gamma, A)$ は核型である。 $\square$

3.4 両側加群

定義 3.4. 群 Γ に対し, 表現 $\pi_1: \Gamma \rightarrow \mathbb{B}(H)$ 及び $\pi_2: \Gamma \rightarrow \mathbb{B}(K)$ と, 反表現 $\tau_1: \Gamma \rightarrow \mathbb{B}(H)$ 及び $\tau_2: \Gamma \rightarrow \mathbb{B}(K)$ が与えられているとする。さらに任意の $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ に対し

$$\pi_1(\gamma_1)\tau_1(\gamma_2) = \tau_1(\gamma_2)\pi_1(\gamma_1)$$

$$\pi_2(\gamma_1)\tau_2(\gamma_2) = \tau_2(\gamma_2)\pi_2(\gamma_1)$$

が成り立つと仮定する。写像 $\sigma_1: \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{B}(H)$ と $\sigma_2: \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{B}(K)$ を

$$\sigma_1(\gamma_1, \gamma_2) = \pi_1(\gamma_1)\tau_1(\gamma_2)$$

$$\sigma_2(\gamma_1, \gamma_2) = \pi_2(\gamma_1)\tau_2(\gamma_2)$$

で定義したとき, 任意の $f \in \ell_1(\Gamma \times \Gamma)$ に対し $\|\sigma_1(f)\| \leq \|\sigma_2(f)\|$ ならば $\pi_1 H_{\tau_1} \precsim \pi_2 K_{\tau_2}$ とかく。

命題 3.4. Γ -測度空間 (X, m) が amenable ならば, 表現

$$\lambda \otimes \pi_m: \Gamma \rightarrow \mathbb{B}(\ell_2 \Gamma \otimes L_2(X, m))$$

と反表現

$$\rho \otimes 1: \Gamma \rightarrow \mathbb{B}(\ell_2 \Gamma \otimes L_2(X, m))$$

に関して

$$\lambda \otimes \pi_m \ell_2 \Gamma \otimes L_2(X, m)_{\rho \otimes 1} \preceq \lambda \otimes 1 \ell_2 \Gamma \otimes \ell_2 \Gamma_{1 \otimes \rho},$$

すなわち $\mathcal{L}\Gamma \otimes_{\min} \mathcal{R}\Gamma \subseteq \mathbb{B}(\ell_2 \Gamma \otimes L_2(X, m))$ が成り立つ.

証明. $\lambda \otimes \pi_m(\Gamma)$ と $\mathbb{C}1 \otimes L_\infty(X, m)$ で生成される von Neumann 環は amenable で $\rho \otimes 1$ と可換であるから $\mathcal{L}\Gamma \otimes_{\min} \mathcal{R}\Gamma$ を含む. $\square$

問題 3.1. $\pi: \Gamma \rightarrow \mathbb{B}(H)$ をユニタリ表現とする.

$$\lambda \otimes \pi \ell_2 \Gamma \otimes H_{\rho \otimes 1} \preceq \lambda \otimes 1 \ell_2 \Gamma \otimes \ell_2 \Gamma_{1 \otimes \rho}$$

となるのはどんなときか?

命題 3.5. Γ が exact と仮定するならば, 問題 3.1 の状況が起こるのは $\pi \preceq \lambda$ のときかつそのときに限る.

証明. $\pi \preceq \lambda$ を仮定する. Γ の表現 π に対し $*$ -準同型 $\theta_\pi: C_\lambda^*(\Gamma) \otimes C_\rho^*(\Gamma) \rightarrow \mathbb{B}(\ell_2 \Gamma \otimes L_2(X, m))$ を

$$\theta_\pi(\lambda(s) \otimes \rho(t)) = (\lambda \otimes \pi)(s)(\rho \otimes 1)(t)$$

で定義すると λ からできる θ_λ が $\Gamma \times \Gamma$ の表現 $\lambda \otimes \rho$ にユニタリ同値なので $\theta_\pi = (id_{\mathbb{B}(\ell_2 \Gamma)} \otimes \pi) \circ \theta_\lambda$ も連続である. Γ は exact であるから property C により $\mathcal{L}\Gamma \otimes_{\min} \mathcal{R}\Gamma$ 上の両正規な $*$ -準同型 $\tilde{\theta}_\pi$ に拡張される. $\lambda \otimes \pi$ と $\rho \otimes 1$ は $\lambda \otimes 1$ にユニタリ同値であるから, $*$ -準同型 $\tilde{\theta}_\pi$ は $\mathcal{L}\Gamma \otimes_{\min} \mathcal{R}\Gamma$ を通る.

逆に問題 3.1 の状況が起こっていると仮定すると上の θ_π は連続であり, これを $\Gamma \times \Gamma$ の対角部分 Γ に制限し, さらに θ_π の範囲を $\mathbb{C}\delta_e \otimes H$ 上に制限すると, 表現 π が $C_r^*(\Gamma)$ から $\mathbb{B}(H)$ への連続な表現とみることができから $\pi \preceq \lambda$ であることがわかる. $\square$

補題 3.6. $\mathcal{M} = \mathcal{L}\Gamma$ とし, ${}_M K_M$ を任意の $\mathcal{M}$ - $\mathcal{M}$ 両側加群とする. $\mathcal{M}$ の K 上の反表現を $\rho: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{B}(K)$ とかく. 0 でない両側加群写像 $T: K \rightarrow \ell_2 \Gamma \otimes \ell_2 \Gamma$ が存在するための必要十分条件は, 0 でない $\mathcal{M}$ -線型な完全有界写像 $S: \ell_2 \Gamma \rightarrow \mathbb{B}(K) \cap \rho(\mathbb{C}\Gamma)'$ が存在することである. ここで, S が完全有界であるとは, $\ell_2 \Gamma$ の任意の正規直交基底 $\{\xi_i\}$ に対し, $\sum_i S(\xi_i)S(\xi_i)^* < \infty$ となることをいう.

証明. 0 でない ρ_Γ -右加群写像 $\sigma: \ell_2 \Gamma \rightarrow K$ をひとつとる. T^* と S の間の関係を各正規直交基底 $\{\xi_i \otimes \eta_i\}$ に対し

$$T^* \left(\sum_i \xi_i \otimes \eta_i \right) = \sum_i S(\xi_i) \sigma(\eta_i)$$

なるようにとればよい. $\square$

3.5 有界コホモロジー

定義 3.5. 表現 $\pi: \Gamma \rightarrow \mathbb{B}(H)$ に対する有界コホモロジーを以下のように定義する. 鎖複体

$$\mathbb{B}(H) \xrightarrow{d_1} \mathbb{B}(H \otimes H) \xrightarrow{d_2} \mathbb{B}(H^{\otimes 3}) \xrightarrow{d_3} \dots$$

を

$$\begin{aligned} d_n(x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_n) = & 1 \otimes x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_n \\ & - x_1 \otimes 1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_n \\ & + \dots \\ & + (-1)^{n+1} x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_n \otimes 1 \end{aligned}$$

で定義し, これからさらに鎖複体

$$\text{CB}^\Gamma(\ell_2\Gamma, \mathbb{B}(H)) \xrightarrow{d_1} \text{CB}^\Gamma(\ell_2\Gamma, \mathbb{B}(H \otimes H)) \xrightarrow{d_2} \text{CB}^\Gamma(\ell_2\Gamma, \mathbb{B}(H^{\otimes 3})) \xrightarrow{d_3} \dots$$

ができる. ここで $\text{CB}^\Gamma(\ell_2\Gamma, \mathbb{B}(H^{\otimes n}))$ は $\ell_2\Gamma$ から $\mathbb{B}(H^{\otimes n})$ への Γ -同変完全有界写像の空間を表す. この鎖複体に関するコホモロジー $H^n(\Gamma, \pi, \ell_2\Gamma) = \ker(d_{n+1})/\text{im}(d_n)$ を π に対する有界コホモロジーと呼ぶ.

定理 3.7 ([MS]). (i) Γ が $\mathbb{F}_2$ (またはもっと一般に非初等的双曲群) ならば, $H^2(\Gamma, \lambda, \ell_2\Gamma) \neq \{0\}$ である.

(ii) Γ_1, Γ_2 を無限群とし, $\Gamma = \Gamma_1 * \Gamma_2$ とすると $H^2(\Gamma, \lambda, \ell_2\Gamma) \neq \{0\}$ である.

定理 3.8. $\mathcal{M} = \mathcal{L}\Gamma$ とし, H を左 $\mathcal{M}$ -加群とする. $K = \ell_2\Gamma \otimes H$ を $\mathcal{M}$ - $\mathcal{M}$ 両側加群とみなす. $H^2(\Gamma, \lambda, \ell_2\Gamma) \neq \{0\}$ を仮定する. もし ${}_{\mathcal{M}}K_{\mathcal{M}} \precsim {}_{\mathcal{M}}L_2\mathcal{M} \otimes L_2\mathcal{M}_{\mathcal{M}}$ ならば, 0 でない両側加群写像

$$T: {}_{\mathcal{M}}K \otimes_{\mathcal{M}} K \otimes_{\mathcal{M}} K_{\mathcal{M}} \rightarrow {}_{\mathcal{M}}L_2\mathcal{M} \otimes L_2\mathcal{M}_{\mathcal{M}}$$

が存在する.

証明. $H^2(\Gamma, \lambda, \ell_2\Gamma) \neq \{0\}$ から, 0 でない写像 $T \in \text{CB}^\Gamma(\ell_2\Gamma, \mathbb{B}(H^{\otimes 3}))$ が存在する. $S: \ell_2\Gamma \rightarrow \mathbb{B}(\ell_2\Gamma \otimes H^{\otimes 3})$ を

$$S(\delta_s) = \sum_t e_{st,t} \otimes T(\delta_t)$$

で定義すると

$$\|S\|_{cb} = \left\| \sum_s S(\delta_s) S(\delta_s)^* \right\| = \|1 \otimes \sum_t T(\delta_t) T(\delta_t)^*\| = \|T\|_{cb} < \infty$$

かつ

$$\text{Ad}(\rho \otimes \pi^{\otimes 3}(x))(S(\delta_s)) = \sum_t e_{stx^{-1}, tx^{-1}} \otimes T(\delta_{tx^{-1}}) = S(\delta_s)$$

なので $S(\delta_s) \in (\rho \otimes \pi^{\otimes 3})(\mathbb{C}\Gamma)'$ である. よって補題 3.6 から, 0 でない両側加群写像 $T: {}_{\mathcal{M}}K \otimes_{\mathcal{M}} K \otimes_{\mathcal{M}} K_{\mathcal{M}} \rightarrow {}_{\mathcal{M}}L_2\mathcal{M} \otimes L_2\mathcal{M}_{\mathcal{M}}$ の存在がいえる. $\square$

予想 3.1. $\mathcal{M} = \mathcal{LF}_2$ とし, ${}_M K_M$ を任意の M - M 両側加群とする. もし ${}_M K_M \lesssim {}_M L_2 M \otimes L_2 M_M$ ならば, 0 でない両側加群写像

$$T: {}_M K \otimes_M K \otimes_M K_M \rightarrow {}_M L_2 M \otimes L_2 M_M$$

が存在する.

命題 3.9. 予想 3.1 が成り立つならば, $\mathcal{M}$ は Cartan 部分代数を持たない.

証明. $\langle M, A \rangle$ を部分環 $A \subseteq M$ の Jones による基本的構成とする, すなわち,

$$\langle M, A \rangle = \{M, e_A\}'' = \overline{Me_A M}^{\text{ultraweak}} = \rho(A)' \subseteq \mathbb{B}(L^2 M),$$

である. ここで e_A は $L^2 M$ から $L^2 A \subseteq L^2 M$ 上への直交射影であり, ρ は M の $L^2 M$ 上への右作用である. Von Neumann 環 $\langle M, A \rangle$ は I_∞ 型でありかつ半有限トレース Tr で

$$\text{Tr}\left(\sum_{i=1}^n x_i e_A y_i\right) = \tau_M\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)$$

を満たすものをもつ. 基本的構成 $\langle M, A \rangle$ は単射的なので, $K = L^2 \langle M, A \rangle$ は M - M 両側加群で coarse 両側加群に弱包含されている.

部分環 A が M の Cartan 部分代数であると仮定する. Popa の定理から, M のユニタリの列 $1 = u_0, u_1, u_2, \dots$ で

- (i) $u_i^* A u_i = A$,
- (ii) $\text{span}\{u_i A\}$ は M の極弱位相で稠密,
- (iii) $u_i A$ たちはトレース状態 τ_M に関して互いに直交する,

なものが存在する. ゆえに,

$$\begin{aligned} K \otimes_M K \otimes_M K &= \overline{Me_A Me_A Me_A M}^{\|\cdot\|_2} \\ &= \bigoplus_{i,j,k,l} u_i e_A u_j e_A u_k e_A u_l L^2 A \end{aligned}$$

がいえる. これより A - A 両側加群として $K \otimes_M K \otimes_M K$ は $\text{Ad}(u_i u_j u_k u_l)$ の形の自己同型 α らによって ${}_{\alpha(A)} L^2(A)_A$ たちの直和に分解される. ゆえに, $K \otimes_M K \otimes_M K$ は coarse 両側加群 $L^2 A \otimes L^2 A$ の 0 でない部分両側加群を含まない.

ここで予想 3.1 が成り立つとして 0 でない 両側加群

$$T: {}_M K \otimes_M K \otimes_M K_M \rightarrow {}_M L^2 M \otimes L^2 M_M$$

が存在すると仮定する. $T^* = U|T^*|$ を極分解とすると U は ${}_M L^2 M \otimes L^2 M_M$ の $K \otimes_M K \otimes_M K$ への 0 でない部分等長作用素である. U の ${}_A L^2 A \otimes L^2 A_A$ への制限は 0 ではないから, これは矛盾である. $\square$

定義 3.6. Γ -空間 X 上の確率測度 m が 2 重エルゴード的であるとは, 可測集合 $A \subseteq X \times X$ が任意の $s \in \Gamma$ に対して $sA = A$ をみたすなら $m^{\otimes 2}(A) = 0$ または 1 となることをいう.

定理 3.10 ([Oz1]). m を $\partial\mathbb{F}_2$ 上の準不変 2 重エルゴード的測度とする. 正写像 $\varphi: C(\partial\mathbb{F}_2) \rightarrow L_\infty(\partial\mathbb{F}_2, m)$ がユニタルかつ $\mathbb{F}_2$ -同変ならば, $\varphi = id$ である.

証明. $\mathcal{M}(\partial\mathbb{F}_2)$ を $\partial\mathbb{F}_2$ 上の有限 Borel 測度全体の空間とし, $\mathcal{M}_{\geq 3}(\partial\mathbb{F}_2) \subseteq \mathcal{M}(\partial\mathbb{F}_2)$ を台が少なくとも 3 点を含むような測度の集合とする. $C(\partial\mathbb{F}_2)$ の稠密な $\mathbb{F}_2$ -不変 $*$ -部分代数 $\mathcal{C}$ で可算個の元で代数的に生成されるものをとる. すると φ の引き戻しで Γ -同変な Borel 写像

$$\varphi_*: \partial\mathbb{F}_2 \ni \xi \mapsto \varphi_*^\xi \in \mathcal{M}(\partial\mathbb{F}_2)$$

であって, m -a.e. $\xi \in \partial\mathbb{F}_2$ で任意の $f \in \mathcal{C}$ に対し

$$\int f(\eta) d\varphi_*^\xi(\eta) = \varphi(f)(\xi)$$

をみたすものがとれる. Γ -同変 Borel 写像

$$T: (\partial\mathbb{F}_2)^2 \rightarrow \mathcal{M}(\partial\mathbb{F}_2), (\xi, \eta) \mapsto \varphi_*^\xi + \delta_\xi + \delta_\eta$$

を考える. ここで δ_ξ は ξ 上の Dirac 測度である. $\mathcal{M}_{\geq 3}(\partial\mathbb{F}_2)$ は $\mathbb{F}_2$ -不変なので, $T^{-1}(\mathcal{M}_{\geq 3}(\partial\mathbb{F}_2))$ は $m^{\otimes 2}$ -零集合となる. 一方, $(\partial\mathbb{F}_2)^2$ の対角集合も $\mathbb{F}_2$ -不変なので $m^{\otimes 2}$ -零集合だから m -a.e. $\xi \in \partial\mathbb{F}_2$ で $\varphi_*^\xi = \delta_\xi$ が従い, これは $\varphi = id$ を意味する. $\square$

系 3.11. ${}_{\mathcal{L}\mathbb{F}_2}K_{{}_{\mathcal{L}\mathbb{F}_2}}$ を両側加群とする. もし ${}_{\mathcal{L}\mathbb{F}_2}K_{{}_{\mathcal{L}\mathbb{F}_2}} \lesssim {}_{\mathcal{L}\mathbb{F}_2}\ell_2\mathbb{F}_2 \otimes \ell_2\mathbb{F}_2 {}_{\mathcal{L}\mathbb{F}_2}$ ならば, ユニタルで完全等長かつ $\mathbb{F}_2$ -同変な写像 $\varphi: C(\partial\mathbb{F}_2) \rightarrow \mathbb{B}(K) \cap \rho(\mathbb{C}\mathbb{F}_2)'$ が存在する.

4 von Neumann 環の理論への応用 I (4 日目)

この節と次の節の内容については [Oz2] も参照せよ.

定義 4.1. Γ を離散群, $\mathcal{G}$ を Γ の部分群からなる空でない集合とする. このとき,

$$\{\chi_{s\Lambda t} : \Lambda \in \mathcal{G}, s, t \in \Gamma\}$$

で生成される $\ell_\infty\Gamma$ の閉イデアルを $c_0(\Gamma; \mathcal{G})$ と記す. ここで, $S \subseteq \Gamma$ に対し $\chi_S \in \ell_\infty\Gamma$ は S 上の定義関数を表すものとする.

$f \in \ell_\infty \Gamma$ と $t \in \Gamma$ に対し, $f^t \in \ell_\infty \Gamma$ を $f^t(s) = f(st^{-1})$, $s \in \Gamma$ と定義する. このとき,

$$A = \{f \in \ell_\infty \Gamma : \text{任意の } t \in \Gamma \text{ に対して } f - f^t \in c_0(\Gamma; \mathcal{G})\}$$

は単位元をもつ C^* -環になる. よって, コンパクト空間 $\Delta^{\mathcal{G}} \Gamma$ で A と $C(\Delta^{\mathcal{G}} \Gamma)$ が同型になるようなものが同相を除いて唯一存在する. A は $c_0 \Gamma$ を含むから $\Delta^{\mathcal{G}} \Gamma$ は Γ が左から連続に作用する Γ のコンパクト化である.

例 4.1. (i) $\mathcal{G} = \{\{e\}\}$ のとき, $c_0(\Gamma; \mathcal{G}) = c_0 \Gamma$ である. このとき $\Delta^{\mathcal{G}} \Gamma$ は Higson corona と呼ばれる.

(ii) $\Gamma \in \mathcal{G}$ のとき, $c_0(\Gamma; \mathcal{G}) = \ell_\infty \Gamma$ である. このとき $\Delta^{\mathcal{G}} \Gamma$ は Γ の Stone-Ćech のコンパクト化である.

今, コンパクト Γ -空間 X とその基点 $x_0 \in X$ が与えられているとする. $f \in C(X)$ に対し, $f_{x_0} \in \ell_\infty \Gamma$ を $f_{x_0}(s) = f(sx_0)$, $s \in \Gamma$ で定義する. このとき,

$$c_0 \Gamma \subseteq \{f_{x_0} \in \ell_\infty \Gamma : f \in C(X)\} + c_0 \Gamma \subseteq \ell_\infty \Gamma$$

であって, 真ん中の C^* -環を $C(\bar{\Gamma})$ と記すと, Γ のコンパクト化 $\bar{\Gamma}$ は次のように特徴付けられる: $\bar{\Gamma}$ は, $\Gamma \ni s \rightarrow sx_0 \in X$ が $\bar{\Gamma}$ 上の連続写像に拡張できるような最小の Γ のコンパクト化である.

そこで次のような性質を考える:

定義 4.2. 離散群 Γ のコンパクト空間 X 上の連続に作用しているとし, $\mathcal{G}$ を空でない Γ の部分群の集合, $x_0 \in X$ を基点とする.

- (i) Γ の列 $\{s_n\}$ が $\mathcal{G}$ に関して $s_n \rightarrow \infty$ であるとは, 任意の $\Lambda \in \mathcal{G}$ と $s, t \in \Gamma$ に対し, ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して $n \geq n_0$ ならば $s_n \notin s\Lambda t$ となることをいう.
- (ii) Γ の X 上の作用 (または, Γ -空間 X) が $\mathcal{G}$ に関して small at infinity であるとは, Γ の元の列 $\{s_n\}$ が $\mathcal{G}$ に関して $s_n \rightarrow \infty$ かつ, ある $z \in X$ が存在して $s_n x_0 \rightarrow z$ となるならば, 任意の $t \in \Gamma$ に対して $s_n t x_0 \rightarrow z$ を満たすことをいう.

命題 4.1. $\Delta^{\mathcal{G}} \Gamma$ は, Γ の左作用が連続に拡張できる Γ のコンパクト化で, その作用が $\mathcal{G}$ に関して small at infinity となる universal なものである. すなわち, 次が成立する:

- (i) Γ の $\Delta^{\mathcal{G}} \Gamma$ 上の作用は基点 $e \in \Gamma$ と $\mathcal{G}$ に関して small at infinity である.
- (ii) コンパクト Γ -空間 X が基点 $x_0 \in X$ と $\mathcal{G}$ に関して small at infinity ならば, $\Gamma \ni s \mapsto sx_0 \in X$ は $\Delta^{\mathcal{G}} \Gamma$ 上の連続写像に拡張可能である.

証明. $\{s_n\}$ を Γ の元の列で $\mathcal{G}$ に関して $s_n \rightarrow \infty$ かつ, ある $z \in \Delta^{\mathcal{G}}\Gamma$ が存在して $s_n e = s_n \rightarrow z$ となるものとする. 任意の $\Lambda \in \mathcal{G}$ と $a, b \in \Gamma$ に対し $\chi_{a\Lambda b} \in C(\Delta^{\mathcal{G}}\Gamma)$ だから,

$$\chi_{a\Lambda b}(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{a\Lambda b}(s_n) = 0$$

がわかる. よって, 任意の $f \in c_0(\Gamma; \mathcal{G})$ に対し, $f(z) = 0$. これより, 任意の $f \in C(\Delta^{\mathcal{G}}\Gamma)$ と $t \in \Gamma$ に対し, $f - f^t \in c_0(\Gamma; \mathcal{G})$ だから $f(z) = f^t(z)$. これは, $s_n t^{-1} \rightarrow z$ を意味する. これで (i) が証明できた.

次に (ii) を示す. (ii) の主張は, $f \in C(X)$ に対し $f_{x_0} \in \ell_{\infty}\Gamma$ を $f_{x_0}(s) = f(sx_0)$, $s \in \Gamma$ で定義したとき,

$$\{f_{x_0} \in \ell_{\infty}\Gamma : f \in C(X)\} + c_0\Gamma \subseteq C(\Delta^{\mathcal{G}}\Gamma)$$

であることと同値である. そこで, ある $f \in C(X)$ に対し $f_{x_0} \notin C(\Delta^{\mathcal{G}}\Gamma)$ と仮定して矛盾を導く.

このとき, ある $\varepsilon > 0$ と $t \in \Gamma$ が存在して,

$$A = \{s \in \Gamma : |f_{x_0}(s) - f_{x_0}^t(s)| \geq \varepsilon\}$$

が $a\Lambda b$ ($\Lambda \in \mathcal{G}$, $a, b \in \Gamma$) の形をした集合のどんな有限和にも含まれない. よって $z \in X$ と A の元の列 $\{s_n\}$ で $\mathcal{G}$ に関して $s_n \rightarrow \infty$ かつ, $s_n x_0 \rightarrow z$ となるものが存在する. ゆえに, Γ -空間 X が $\mathcal{G}$ に関して small at infinity であることを用いると,

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq |f_{x_0}(s_n) - f_{x_0}^t(s_n)| = |f(s_n x_0) - f(s_n t^{-1} x_0)| \\ &\longrightarrow |f(z) - f(z)| = 0. \end{aligned}$$

これは矛盾である. □

定義 4.3. 離散群 Γ の部分群からなる空でない集合 $\mathcal{G}$ が admissible であるとは, Γ の $\Delta^{\mathcal{G}}\Gamma$ 上の作用が amenable であるときをいう.

Γ 自身を含むような $\mathcal{G}$ が admissible であることと Γ が exact であることは同値である (例 4.1 (ii) を見よ).

命題 4.2. Γ を階数 2 の自由群とすると $\mathcal{G} = \{\{e\}\}$ は Γ の部分群の集合として admissible である.

この定理は, 次の命題と Γ はその境界 $\partial\Gamma$ 上 amenable に作用する (命題 2.1) という事実から従う:

命題 4.3. Γ を階数 2 の自由群とすると, Γ の $\Delta\Gamma = \Gamma \cup \partial\Gamma$ 上の作用は $\mathcal{G} = \{\{e\}\}$ に関して small at infinity である.

証明. $\{s_n\}$ を Γ の元の列で $\mathcal{G} = \{\{e\}\}$ に関して $s_n \rightarrow \infty$ かつ, ある $z \in \Delta\Gamma$ が存在して, $s_n \rightarrow z$ となるものとする. はじめの条件より $z \in \partial\Gamma$ である. 2 つ目の条件は次と同値であることに注意せよ: $z \in \partial\Gamma$ を Γ の通常の生成元 a, b に関する片側無限の既約語と同一視する. 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対し, $N_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \geq N_0$ ならば s_n の語の長さが N 以上であって, s_n の最初の N 文字と z の最初の N 文字が一致する.

任意の $t \in \Gamma$ に対し, $\{s_n t\}$ もこの条件を満たすことはすぐわかるから, これで命題が証明された. $\square$

命題 4.2, 4.3 は, 階数 2 の自由群から双曲群の部分群へ一般化できるというものを付け加えておく.

命題 4.4. $i = 1, 2$ に対し, Γ_i の部分群からなる空でない集合 $\mathcal{G}_i$ が admissible ならば, $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$ の部分群からなる集合

$$\mathcal{G} = \{\Gamma_1 \times \Lambda_2 : \Lambda_2 \in \mathcal{G}_2\} \cup \{\Lambda_1 \times \Gamma_2 : \Lambda_1 \in \mathcal{G}_1\}$$

は admissible である.

証明. $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$ が $\Delta^{\mathcal{G}_1}\Gamma_1 \times \Delta^{\mathcal{G}_2}\Gamma_2$ 上座標ごとに作用しているとする, この作用は amenable だから命題を証明するには $\Delta^{\mathcal{G}}\Gamma$ から $\Delta^{\mathcal{G}_1}\Gamma_1 \times \Delta^{\mathcal{G}_2}\Gamma_2$ への Γ -同変連続写像で, Γ 上恒等写像となるものの存在を示せば十分である.

$f \in C(\Delta^{\mathcal{G}_1}\Gamma_1)$, $g \in C(\Delta^{\mathcal{G}_2}\Gamma_2)$ とする. このとき, $t_1 \in \Gamma_1$, $t_2 \in \Gamma_2$ に対して

$$\begin{aligned} & (f \otimes g) - (f \otimes g)^{(t_1, t_2)} \\ &= (f - f^{t_1}) \otimes g + f^{t_1} \otimes (g - g^{t_2}) \\ &\in (c_0(\Gamma_1; \mathcal{G}_1) \otimes \ell_\infty \Gamma_2 + \ell_\infty \Gamma_1 \otimes c_0(\Gamma_2; \mathcal{G}_2)) \subseteq c_0(\Gamma; \mathcal{G}). \end{aligned}$$

ゆえに, $f \otimes g \in C(\Delta^{\mathcal{G}}\Gamma)$. 2 つの C^* -環 $C(\Delta^{\mathcal{G}_1}\Gamma_1 \times \Delta^{\mathcal{G}_2}\Gamma_2)$ と $C(\Delta^{\mathcal{G}_1}\Gamma_1) \otimes C(\Delta^{\mathcal{G}_2}\Gamma_2)$ は自然に同型ゆえ, これで証明できた. $\square$

定理 4.5. Λ を Γ_1, Γ_2 共通の自明な部分群とする. このとき $i = 1, 2$ に対し, Γ_i の部分群からなる空でない集合 $\mathcal{G}_i$ が admissible ならば, $\Gamma = \Gamma_1 *_\Lambda \Gamma_2$ の部分群からなる集合 $\{\Lambda\} \cup \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$ は admissible である.

証明のために, いくつかの補題を用意する. Γ は Bass-Serre 樹木と呼ばれる, 次で定義される樹木 T に作用していることを思い出そう: T の頂点集合は $\Gamma/\Gamma_1 \sqcup \Gamma/\Gamma_2$ であって, 辺の集合は Γ/Λ でラベル付けられる. 辺 $s\Lambda$ は 2 つの頂点 $s\Gamma_1$ と $s\Gamma_2$ を結ぶ.

$\Delta T = T \cup \partial T$ とおく. 次に出てくる補題 4.6 と補題 4.7 は Λ が一般の部分群の場合でも成り立つ.

補題 4.6. Γ の ΔT 上の作用は $\{\Lambda\}$ に関して small at infinity である.

証明. Γ の元の列 $\{s_n\}$ が $\{\Lambda\}$ に関して $s_n \rightarrow \infty$ であることと T の任意の辺 e と T の辺からなる有限集合 F をとったとき, 十分大きい全ての n に対し $s_n e \notin F$ となることは同値である. これは次のようにして示される.

ある辺 e と無限個の n に対し $s_n e = e'$ となる T の辺 e' が存在するとする. そのような n の 1 つを n_0 とすると, 無限個の n に対して $s_n^{-1} s_{n_0} e = e$ となる. e のラベルを $a\Lambda$, $a \in \Gamma$ とすると, これは $s_n^{-1} s_{n_0} \in a\Lambda a^{-1}$ を意味する. つまり, 無限個の n に対し $s_n \in s_{n_0} a\Lambda a^{-1}$ が成り立つ. これは $\{s_n\}$ が $\{\Lambda\}$ に関して $s_n \rightarrow \infty$ であることに反する. 逆の主張もこの証明の逆をたどれば示せる.

$x_0 \in T$ を基点とする. Γ の元の列 $\{s_n\}$ が $\{\Lambda\}$ に関して $s_n \rightarrow \infty$ かつ, $z \in \Delta T$ が存在して $s_n x_0 \rightarrow z$ を満たすとする. このとき, 任意の $x \in T$ に対し $s_n x \rightarrow z$ を示す. $d(x, x_0) = 1$ として証明すれば十分である.

F を T の有限部分集合とする. 十分大きい全ての n に対し

$$s_n x \in U(z, F) = \{y \in T : [y, z] \cap F \subseteq \{z\}\}$$

であることを示すには, F は z を含まないとしてよい.

まず $z \in T$ とする. 各 $f \in F$ に対し, 測地線 $[z, f]$ 上の頂点 z_f で $d(z, z_f) = 1$ となるものをとる. $F_z = \{f_z \in T : f \in F\}$ とおく. $s_n x_0 \rightarrow z$ ゆえ, ある $N_1 \in \mathbb{N}$ が存在して $n \geq N_1$ ならば $s_n x_0 \in U(z, F_z)$ かつ $s_n[x, x_0] \not\subseteq \{[f_z, z] : f \in F\}$ となる. $n \geq N_1$ のとき, $s_n x_0 \neq z$ ならば $d(s_n x, s_n x_0) = d(x, x_0) = 1$ ゆえ $s_n x \in U(z, F_z)$ がわかる. $s_n x_0 = z$ ならば $s_n[x, x_0] \not\subseteq \{[f_z, z] : f \in F\}$ より $s_n x \in U(z, F_z)$ がわかる. $U(z, F_z) \subseteq U(z, F)$ より, これで示せた.

次に $z \in \partial T$ とする. 各 $f \in F$ に対し, 測地線 $[z, f]$ 上の頂点 z_f で $d(f, z_f) = 1$ となるものをとる. $F_z = \{f_z \in T : f \in F\}$ とおく. $s_n x_0 \rightarrow z$ ゆえ, ある $N_2 \in \mathbb{N}$ が存在して $n \geq N_2$ ならば $s_n x_0 \in U(z, F_z)$ となるものが存在する. $n \geq N_2$ ならば $d(s_n x, s_n x_0) = 1$ かつ $s_n x_0 \in U(z, F_z)$ ゆえ $s_n x \in U(z, F)$ となる. $\square$

補題 4.7. 単位元を共有する $\ell_\infty \Gamma$ の C^* -部分環 $C(X)$ が次の性質をもつとする:

- (i) $C(X)$ は Γ の左作用に関して不変である.
- (ii) Γ -同変 $*$ -準同型 $C(\Delta T) \rightarrow C(X)$ が存在する. (すなわち, Γ -同変連続写像 $X \rightarrow \Delta T$ が存在する.)
- (iii) 各 $i = 1, 2$ に対し, X は Γ_i -空間として amenable である.

このとき, X は Γ -空間として amenable である.

証明. 命題 2.2 と (iii) の条件より Γ の $\Delta T \times X$ 上の対角作用は amenable である. また (ii) の条件より Γ -同変連続写像 $X \rightarrow \Delta T \times X$ が作れるから Γ の X 上の作用も amenable である. $\square$

補題 4.8. 各 $i = 1, 2$ に対して $\Delta^{\mathcal{G}}\Gamma$ は Γ_i -空間として amenable である.

証明. Γ の coset 分解 $\Gamma = \Gamma_1\mathcal{X}$ を次を満たすようにとる:

- (i) $e \in \mathcal{X}$.
- (ii) $x \in \mathcal{X} \setminus \{e\}$, $t \in \Gamma_1$ ならば, $xt^{-1} \in \mathcal{X}$.
- (iii) $x \in \mathcal{X}$, $t \in \Gamma_2$ ならば, $xt^{-1} \in \mathcal{X}$.

(例えば,

$$\begin{aligned}\mathcal{X} = & \{e\} \cup (\Gamma_2 \setminus \{e\}) \cup (\Gamma_2 \setminus \{e\}) \cdot (\Gamma_1 \setminus \{e\}) \\ & \cup (\Gamma_2 \setminus \{e\}) \cdot (\Gamma_1 \setminus \{e\}) \cdot (\Gamma_2 \setminus \{e\}) \cup \cdots\end{aligned}$$

ととればよい. Λ が一般のときは, このようなとり方はできない.) 写像 $\pi: \ell_{\infty}\Gamma_1 \rightarrow \ell_{\infty}\Gamma$ を

$$\pi(f)(sx) = f(s), \quad f \in \ell_{\infty}\Gamma_1, (s, x) \in \Gamma_1 \times \mathcal{X}$$

で定義する. このとき $\pi(C(\Delta^{\mathcal{G}_1}\Gamma_1))$ は Γ_1 の左作用に関して不変な $\ell_{\infty}\Gamma$ の C^* -部分環である. Γ_1 が $\Delta^{\mathcal{G}_1}\Gamma_1$ 上 amenable に作用すると仮定しているから, $\pi(C(\Delta^{\mathcal{G}_1}\Gamma_1)) \subseteq C(\Delta^{\mathcal{G}}\Gamma)$ であること, すなわち, Γ_1 -同変連続写像 $\Delta^{\mathcal{G}}\Gamma \rightarrow \Delta^{\mathcal{G}_1}\Gamma_1$ の存在を示せば Γ_1 の $\Delta^{\mathcal{G}}\Gamma$ 上の作用が amenable であることがわかる. そのためには, $f \in C(\Delta^{\mathcal{G}_1}\Gamma_1)$ と $t \in \Gamma$ に対し $\pi(f) - \pi(f)^t \in c_0(\Gamma; \mathcal{G})$ を示せばよい.

まず $t \in \Gamma_1$ とする. $s \in \Gamma_1$, $x \in \mathcal{X}$ に対し, $sx \in \Gamma_1$ ならば $x = e$ であって,

$$(\pi(f) - \pi(f)^t)(sx) = f(s) - \pi(f)(sxt^{-1}) = f(s) - f(st^{-1}) = (f - f^t)(s)$$

となる. $sx \notin \Gamma_1$ ならば, $x \neq e$ となり, 上の条件 (ii) より $xt^{-1} \in \mathcal{X}$ となる. よって

$$(\pi(f) - \pi(f)^t)(sx) = f(s) - \pi(f)(sxt^{-1}) = f(s) - f(s) = 0.$$

ゆえに $\pi(f) - \pi(f)^t \in \ell_{\infty}\Gamma$ は Γ_1 に台をもち, さらに $c_0(\Gamma_1; \mathcal{G}_1) \subseteq c_0(\Gamma; \mathcal{G})$ に属する.

次に $t \in \Gamma_2$ とする. $s \in \Gamma_1$, $x \in \mathcal{X}$ をとる. 上の条件 (iii) より $xt^{-1} \in \mathcal{X}$ だから

$$(\pi(f) - \pi(f)^t)(sx) = f(s) - \pi(f)(sxt^{-1}) = f(s) - f(s) = 0$$

となり, $\pi(f) - \pi(f)^t = 0$.

また一般に $t_1, \dots, t_n \in \Gamma$ と $g \in \ell_{\infty}\Gamma$ に対し,

$$g - g^{t_1 \cdots t_n} = (g - g^{t_1})^{t_2 \cdots t_n} + (g - g^{t_2})^{t_3 \cdots t_n} + \cdots + (g - g^{t_n})$$

であって, $h \in c_0(\Gamma; \mathcal{G})$, $t \in \Gamma$ に対し $h^t \in c_0(\Gamma; \mathcal{G})$ である. よって $t \in \Gamma$ に対し $\pi(f) - \pi(f)^t \in c_0(\Gamma; \mathcal{G})$ がわかる. $\square$

定理 4.5 の証明. 補題 4.6 と $\Delta^G \Gamma$ の universality (命題 4.1) より, Γ -同変連続写像 $\Delta^G \Gamma \rightarrow \Delta T$ が存在する. 補題 4.7, 4.8 より $\Delta^G \Gamma$ が Γ -空間として amenable であることがわかる. $\square$

問題 4.1. $\Gamma = SL(n, \mathbb{Z})$ のとき, P を $SL(n, \mathbb{R})$ の極大可解部分群とすると, Γ の $SL(n, \mathbb{R})/P$ 上の作用は amenable となることは例 2.2 で見た. そこで Γ の部分群からなる空でない集合 $\mathcal{G}$ で, この作用が $\mathcal{G}$ に関して small at infinity となるようなものを見つけよ.

この節の残りで, 次の節で使う記号の準備をする.

Γ を離散群とし, その表現

$$\lambda: \Gamma \rightarrow \mathbb{B}(\ell_2 \Gamma), \quad \rho: \Gamma \rightarrow \mathbb{B}(\ell_2 \Gamma)$$

を $\lambda(s)\delta_t = \delta_{st}$, $\rho(s)\delta_t = \delta_{ts^{-1}}$, $s, t \in \Gamma$ と定義する. $C_\lambda^* \Gamma$, $C_\rho^* \Gamma$ をそれぞれ $\lambda(\mathbb{C}\Gamma)$, $\rho(\mathbb{C}\Gamma)$ のノルム位相による閉包とする.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\Gamma &= \lambda(\mathbb{C}\Gamma)'' \\ &= \{\lambda(f) \in \mathbb{B}(\ell_2 \Gamma) : f \in \ell_2 \Gamma, \|\lambda(f)\| < \infty\} \\ \mathcal{R}\Gamma &= \rho(\mathbb{C}\Gamma)'' \\ &= \{\rho(f) \in \mathbb{B}(\ell_2 \Gamma) : f \in \ell_2 \Gamma, \|\rho(f)\| < \infty\} \end{aligned}$$

と記す. $\mathcal{L}\Gamma$ 上の tracial state τ を

$$\tau(a) = \langle a\delta_e, \delta_e \rangle, \quad a \in \mathcal{L}\Gamma$$

で定義する.

$$J: \ell_2 \Gamma \rightarrow \ell_2 \Gamma, \quad J(f)(t) = \overline{f(t^{-1})}, \quad f \in \ell_2 \Gamma, \quad t \in \Gamma$$

は共役な等長作用素であって $J^2 = 1$ を満たす. 次の補題は容易に証明できる:

補題 4.9. (i) $a \in \mathcal{L}\Gamma$ に対し $JaJ \in (\mathcal{L}\Gamma)'$.

(ii) $x \in (\mathcal{L}\Gamma)'$ に対し $Jx\delta_e = x^*\delta_e$.

(iii) $(\mathcal{L}\Gamma)' = J(\mathcal{L}\Gamma)J = \mathcal{R}\Gamma$.

5 von Neumann 環の理論への応用 II (5 日目)

この節では, 次の定理の証明を目標とする:

定理 5.1. Γ を離散群, $\mathcal{G}$ を Γ の部分群からなる空でない, admissible な集合とする. $\mathcal{Q}$ は, $\mathcal{Q}' \cap \mathcal{L}\Gamma$ が単射的でない部分環となる, $\mathcal{L}\Gamma$ の単射的部分環とする. このとき, ある $\Lambda \in \mathcal{G}$ が存在して, $\mathcal{Q}$ の 0 でないある ‘piece’ は $\mathcal{L}\Lambda$ の部分環に共役となる.

5.3 節の最後で, 結論の正確な定式化をする.

5.1 単射的 von Neumann 環

$\mathcal{M}$ を von Neumann 環, τ を $\mathcal{M}$ 上の忠実なトレース状態とする. $\mathcal{P}$ を $\mathcal{M}$ の von Neumann 部分環とする. このとき τ を用いて, Hilbert 空間の組 $L_2\mathcal{P} \subseteq L_2\mathcal{M}$ ができる. $E \in \mathbb{B}(L_2\mathcal{M})$ を $L_2\mathcal{P}$ 上への直交射影とする. このとき, $\mathcal{P} \subseteq L_2\mathcal{P}$, $\mathcal{M} \subseteq L_2\mathcal{M}$ であって, E による $\mathcal{M}$ の像は $\mathcal{P}$ に含まれる. さらに, $E: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{P}$ は $\tau \circ E = \tau$ を満たす, 完全正 (completely positive または cp) な射影であることもわかる.

補題 5.2. $\tilde{E}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{P}$ が, τ を保存する条件付き期待値ならば, $\tilde{E} = E$ である.

ここで, cp 写像 $\tilde{E}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{P}$ が条件付き期待値であるとは, $\Phi|_{\mathcal{P}} = id_{\mathcal{P}}$ かつ, 任意の $a, b \in \mathcal{P}$ と $x \in \mathcal{M}$ に対して $\Phi(axb) = a\Phi(x)b$ が成り立つときをいう. このとき, $\tilde{E}$ は $\mathcal{M}$ の $\mathcal{P}$ 上への条件付き期待値であるという.

証明. $a \in \mathcal{M}$, $b \in \mathcal{P}$ に対して,

$$\tau(\tilde{E}(a)b) = \tau(\tilde{E}(ab)) = \tau(ab)$$

ゆえ, $\tilde{E}(a) - a$ は $L_2\mathcal{P}$ の直交補空間に属する. よって, 任意の $a \in \mathcal{M}$ に対して

$$\tilde{E}(a) - E(a) = E(\tilde{E}(a) - a) = 0$$

が成り立つ. □

定義 5.1. $\mathcal{M}$ を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の von Neumann 環, つまり, $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{B}(\mathcal{H})$ とする. このとき $\mathcal{M}$ が単射的 (injective) であるとは, 条件付き期待値 $\Phi: \mathbb{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{M}$ が存在するときをいう.

一般に, Banach 空間 C が次を満たすとき, C は単射的であるという: A を Banach 空間, B を A の閉部分空間, $\varphi: B \rightarrow C$ を有界線型写像としたとき, 有界線型写像 $\tilde{\varphi}: A \rightarrow C$ で φ の拡張となっているものが存在する.

上の von Neumann 環の単射性の定義は, 次の定理に由来する:

定理 5.3 (Arveson). A を C^* -環, B を A の C^* -部分環, $\varphi: B \rightarrow \mathbb{B}(\mathcal{H})$ を cp 写像とする. このとき, cp 写像 $\tilde{\varphi}: A \rightarrow \mathbb{B}(\mathcal{H})$ で φ の拡張となっているものが存在する.

実際, $B \subseteq A$ を C^* -環の組, $\mathcal{M}(\subseteq \mathbb{B}(\mathcal{H}))$ を単射的 von Neumann 環, $\varphi: B \rightarrow \mathcal{M}$ を cp 写像としたとき, 上の定理から φ と埋め込み $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{B}(\mathcal{H})$ の合成が A から $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ への cp 写像へ拡張される. さらに, その拡張と条件付き期待値 $\mathbb{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{M}$ を合成すると φ の拡張 $B \rightarrow \mathcal{M}$ が得られる.

補題 5.4. A を単位元をもつ C^* -環, $\varphi: A \rightarrow \mathbb{B}(\mathcal{H})$ を単位元を保存する cp 写像 (unital completely positive または ucp 写像) とする. このとき $a, b \in A$ に対し,

$$\|\varphi(a^*b) - \varphi(a)^*\varphi(b)\| \leq \|\varphi(a^*a) - \varphi(a)^*\varphi(a)\|^{1/2} \|\varphi(b^*b) - \varphi(b)^*\varphi(b)\|^{1/2}$$

が成り立つ.

証明. Stinespring の定理 [W, Corollary 1.7] より, Hilbert 空間 $\mathcal{K}$ と A の表現 $\pi: A \rightarrow \mathbb{B}(\mathcal{K})$ と等長作用素 $V: H \rightarrow \mathcal{K}$ があって, 任意の $a \in A$ に対し

$$\varphi(a) = V^*\pi(a)V$$

が成り立つ. $a, b \in A$ に対し,

$$\|\varphi(a^*b) - \varphi(a)^*\varphi(b)\| = \|V^*\pi(a)^*(1 - VV^*)\pi(b)V\|$$

であって, さらに

$$\begin{aligned} \|V^*\pi(a)^*(1 - VV^*)^{1/2}\| &= \|V^*\pi(a)^*(1 - VV^*)\pi(a)V\|^{1/2} \\ &= \|\varphi(a^*a) - \varphi(a)^*\varphi(a)\|^{1/2} \end{aligned}$$

であることから補題の不等式がわかる. □

系 5.5. A を単位元をもつ C^* -環, $\varphi: A \rightarrow \mathbb{B}(\mathcal{H})$ を ucp 写像とする. B を A の C^* -部分環とする. このとき, 任意の $a, b \in B$ に対し $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ が成り立つならば, φ は B -線型, つまり, 任意の $a \in A$ と $b \in B$ に対し $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$, $\varphi(ba) = \varphi(b)\varphi(a)$ が成り立つ.

定理 5.6. 離散群 Γ に対し, 次の条件は全て同値:

- (i) Γ は amenable である;
- (ii) 次の $*$ -準同型

$$\mathcal{L}\Gamma \odot \mathcal{R}\Gamma \ni \sum a_k \otimes x_k \mapsto \sum a_k x_k \in \mathbb{B}(\ell_2\Gamma)$$

は $\otimes_{\min}$ に関して連続である (つまり, $\mathcal{L}\Gamma \odot \mathcal{R}\Gamma$ を $\mathbb{B}(\ell_2\Gamma \otimes \ell_2\Gamma)$ のノルム部分環と見たとき, 上の $*$ -準同型が連続となる);

- (iii) $\mathcal{L}\Gamma$ は単射的である;
- (iv) $\mathcal{L}\Gamma$ は超有限 (hyperfinite) である.

ここで, $\odot$ は代数的テンソル積を表すとする.

証明. 3 条件 (i), (ii), (iii) の同値性のみ示す. まず (i) から (ii) を導く. これは Γ が amenable のとき, 任意の Γ の表現は左正則表現 λ に弱く含まれる.

また, 一般に左正則表現と右正則表現 ρ はユニタリ同値である. $\Gamma \times \Gamma$ の左正則表現が

$$\lambda \otimes \lambda: \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{B}(\ell_2 \Gamma \otimes \ell_2 \Gamma)$$

にユニタリ同値だから, 表現

$$\lambda \otimes \rho: \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{B}(\ell_2 \Gamma \otimes \ell_2 \Gamma)$$

も左正則表現にユニタリ同値になる. $\Gamma \times \Gamma$ は amenable だから, 表現

$$\lambda \times \rho: \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{B}(\ell_2 \Gamma)$$

は $\lambda \otimes \rho$ に弱く含まれる. このことから (ii) がわかる.

次に (ii) から (iii) を導く. $*$ -準同型

$$\mathcal{L}\Gamma \otimes_{\min} \mathcal{R}\Gamma \rightarrow \mathbb{B}(\ell_2 \Gamma)$$

があって, 埋め込み $\mathcal{L}\Gamma \otimes_{\min} \mathcal{R}\Gamma \subseteq \mathbb{B}(\ell_2 \Gamma) \otimes_{\min} \mathcal{R}\Gamma$ に定理 5.3 を適用すると, 上の $*$ -準同型の拡張となる cp 写像

$$\varphi: \mathbb{B}(\ell_2 \Gamma) \otimes_{\min} \mathcal{R}\Gamma \rightarrow \mathbb{B}(\ell_2 \Gamma)$$

が存在する. 系 5.5 より φ は $\mathcal{R}\Gamma$ -線型である. $x \in \mathbb{B}(\ell_2 \Gamma)$ に対し $\varphi(x \otimes 1) \in (\mathcal{R}\Gamma)' = \mathcal{L}\Gamma$ がわかる. よって

$$\Phi: \mathbb{B}(\ell_2 \Gamma) \ni x \mapsto \varphi(x \otimes 1) \in \mathcal{L}\Gamma$$

は $\mathcal{L}\Gamma$ 上への条件付き期待値となる.

最後に (iii) から (i) を導く. $\Phi: \mathbb{B}(\ell_2 \Gamma) \rightarrow \mathcal{L}\Gamma$ を条件付き期待値とする. $\mu: \ell_\infty \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ を $\mu = \tau\Phi|_{\ell_\infty \Gamma}$ で定義する. このとき, 任意の $f \in \ell_\infty \Gamma$ と $s \in \Gamma$ に対して,

$$\begin{aligned} \mu(\lambda(s)f\lambda(s)^*) &= \tau\Phi(\lambda(s)f\lambda(s)^*) = \tau(\lambda(s)\Phi(f)\lambda(s)^*) \\ &= \tau\Phi(f) = \mu(f) \end{aligned}$$

が成り立つ. これは μ が $\ell_\infty \Gamma$ 上の左不変状態であることを意味する. $\square$

さらに一般に次が成り立つ:

定理 5.7 (Connes). 有限 von Neumann 環 $\mathcal{M}$ に対して次の 3 条件は同値である:

(i) $*$ -準同型

$$\mathcal{M} \odot \mathcal{M}' \ni \sum a_k \otimes x_k \mapsto \sum a_k x_k \in L_2 \mathcal{M}$$

は $\otimes_{\min}$ に関して連続である;

(ii) $\mathcal{M}$ は単射的である;

(iii) $\mathcal{M}$ は超有限である.

5.2 $\mathcal{L}\Gamma$ の単射的部分環

5.2.1 一般の場合

Γ を離散群とし, $\mathcal{M} = \mathcal{L}\Gamma$ とかく. $\mathcal{P}$ を $\mathcal{M}$ の von Neumann 部分環とし, $E_{\mathcal{P}}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{P}$ を条件付き期待値とする. $\mathcal{H} = \ell_2\Gamma = L_2\mathcal{M}$ とかく. このとき, ($*$ -代数の) ucp 写像

$$\Phi_{\mathcal{P}}: \mathcal{M} \odot \mathcal{M}' \ni \sum a_k \otimes x_k \mapsto \sum E_{\mathcal{P}}(a_k)x_k \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$$

を定義する.

補題 5.8. $\Phi_{\mathcal{P}}$ が $\otimes_{\min}$ に関して連続ならば, $\mathcal{P}$ は単射的である.

証明. $\Phi_{\mathcal{P}}$ の制限 $\mathcal{P} \odot J\mathcal{P}J \rightarrow \mathbb{B}(\mathcal{H})$ と compression $\mathbb{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{B}(L_2\mathcal{P})$ との合成は

$$\mathcal{P} \odot J\mathcal{P}J \ni \sum a_k \otimes x_k \mapsto \sum a_k x_k \in \mathbb{B}(L_2\mathcal{P})$$

に一致する. これが $\otimes_{\min}$ に関して連続ゆえ, 定理 5.7 より $\mathcal{P}$ は単射的である. $\square$

命題 5.9. 上の記号で Γ は exact であるとする. このとき, 制限

$$\Phi_{\mathcal{P}}: C_{\lambda}^*\Gamma \odot C_{\rho}^*\Gamma \rightarrow B(\mathcal{H})$$

が $\otimes_{\min}$ に関して連続ならば, $\mathcal{P}$ は単射的である.

証明. まず, Γ が exact であることから $\Phi_{\mathcal{P}}$ が $\mathcal{L}\Gamma \otimes_{\min} C_{\rho}^*\Gamma$ 上連続となることを示す. I を directed set とし,

$$B = \{a \in \prod_{i \in I} C_{\lambda}^*\Gamma : \text{strong}^*\text{-}\lim_{i \in I} a(i) \text{ が } \mathcal{L}\Gamma \text{ で存在する.}\}$$

と定義する. B は $\prod_{i \in I} C_{\lambda}^*\Gamma$ の C^* -部分環であって,

$$\pi: B \ni a \mapsto \text{strong}^*\text{-}\lim_{i \in I} a(i) \in \mathcal{L}\Gamma$$

は $*$ -準同型である. Kaplansky の稠密定理を用いると, directed set I で π が全射になるようなものの存在がわかる. このとき, $J = \ker \pi$ とかく. Γ が exact ゆえ $C_{\rho}^*\Gamma$ が exact となるから, 同型

$$(B \otimes_{\min} C_{\rho}^*\Gamma)/(J \otimes_{\min} C_{\rho}^*\Gamma) \simeq \mathcal{L}\Gamma \otimes_{\min} C_{\rho}^*\Gamma$$

が得られる. 次の ucp 写像

$$\bar{\Phi}_{\mathcal{P}}: B \odot C_{\rho}^*\Gamma \ni \sum a_k \otimes x_k \mapsto \sum E_{\mathcal{P}}(\pi(a_k))x_k \in \mathbb{B}(\ell_2\Gamma)$$

を定義する. 任意の $\sum a_k \otimes x_k \in B \odot C_\rho^* \Gamma$ に対し

$$\begin{aligned}
\|\bar{\Phi}_{\mathcal{P}}(\sum a_k \otimes x_k)\| &= \|\sum E_{\mathcal{P}}(\pi(a_k))x_k\| \\
&= \|\text{strong}^* - \lim_{i \in I} \sum E_{\mathcal{P}}(a_k(i))x_k\| \\
&= \|\text{strong}^* - \lim_{i \in I} \Phi_{\mathcal{P}}(\sum a_k(i) \otimes x_k)\| \\
&\leq \sup_{i \in I} \|\sum a_k(i) \otimes x_k\|_{C_\lambda^* \Gamma \otimes_{\min} C_\rho^* \Gamma} \\
&= \|\sum a_k \otimes x_k\|_{\mathcal{L} \Gamma \otimes_{\min} C_\rho^* \Gamma}
\end{aligned}$$

ゆえ, $\bar{\Phi}_{\mathcal{P}}$ は $\mathcal{L} \Gamma \otimes_{\min} C_\rho^* \Gamma$ 上の連続写像に拡張できる. この拡張は $\mathcal{L} \Gamma \odot C_\rho^* \Gamma$ 上 $\Phi_{\mathcal{P}}$ と一致するから, $\Phi_{\mathcal{P}}$ は $\mathcal{L} \Gamma \otimes_{\min} C_\rho^* \Gamma$ 上の連続写像に拡張できる.

定理 5.3 を用いて ucp 写像 $\Phi_{\mathcal{P}}: \mathcal{L} \Gamma \otimes_{\min} C_\rho^* \Gamma \rightarrow \mathbb{B}(\ell_2 \Gamma)$ を ucp 写像 $\tilde{\Phi}_{\mathcal{P}}: \mathbb{B}(\ell_2 \Gamma) \otimes_{\min} C_\rho^* \Gamma \rightarrow \mathbb{B}(\ell_2 \Gamma)$ に拡張する. 系 5.5 より $\tilde{\Phi}_{\mathcal{P}}$ は $C_\rho^* \Gamma$ -線型となるから, 任意の $x \in \mathbb{B}(\ell_2 \Gamma)$ に対して $\tilde{\Phi}_{\mathcal{P}}(x \otimes 1) \in (C_\rho^* \Gamma)' = \mathcal{L} \Gamma$ となる. ゆえに ucp 写像

$$\Psi: \mathbb{B}(\ell_2 \Gamma) \rightarrow \mathcal{P}$$

を $\Psi(x) = E_{\mathcal{P}}(\tilde{\Phi}_{\mathcal{P}}(x \otimes 1))$, $x \in \mathbb{B}(\ell_2 \Gamma)$ で定義すると, これは条件付き期待値となる. $\square$

5.2.2 特別な場合

以下この小節では, $\mathcal{L} \Gamma$ の部分環 $\mathcal{P}$ はある単射的部分環 $\mathcal{Q}$ を用いて $\mathcal{P} = \mathcal{Q}' \cap \mathcal{L} \Gamma$ とかけるものとする.

補題 5.10. 条件付き期待値

$$\Psi_{\mathcal{Q}}: \mathbb{B}(\ell_2 \Gamma) \rightarrow \mathcal{Q}' (\subseteq \mathbb{B}(\ell_2 \Gamma))$$

で, 任意の $x \in \mathbb{B}(\ell_2 \Gamma)$ に対し $\Psi_{\mathcal{Q}}(x)$ は集合

$$\{uxu^* \in \mathbb{B}(\ell_2 \Gamma) : u \in \mathcal{U}(\mathcal{Q})\}$$

の弱閉凸包に含まれるようなものが存在する. ここで $\mathcal{U}(\mathcal{Q})$ は $\mathcal{Q}$ のユニタリ元全体を表すとする.

証明. 定理 5.7 より $\mathcal{Q}$ は超有限ゆえ, $\mathcal{Q}$ 有限次元部分環の増大列 $\{\mathcal{Q}_n\}$ で $\mathcal{Q} = (\bigcup \mathcal{Q}_n)''$ となるものが存在する. $\mathcal{U}$ を $\mathbb{N}$ 上の超フィルターとする. このとき $\Psi_{\mathcal{Q}}$ は

$$\Psi_{\mathcal{Q}}(x) = \lim_{\mathcal{U}} \int_{\mathcal{U}(\mathcal{Q}_n)} uxu^* du, \quad x \in \mathbb{B}(\ell_2 \Gamma)$$

と定義すればよい. $\square$

Ψ_Q の作り方から Ψ_Q の $\mathcal{L}\Gamma$ 上への制限 $\Psi_Q|_{\mathcal{L}\Gamma}$ は $\mathcal{P} = \mathcal{Q}' \cap \mathcal{L}\Gamma$ 上への条件付き期待値でトレース状態を保存するものとなる。ゆえに $\Psi_Q|_{\mathcal{L}\Gamma} = E_{\mathcal{P}}$ となる。さらに $\Psi_Q|_{\mathcal{R}\Gamma} = \text{id}_{\mathcal{R}\Gamma}$ となることもわかる。よって Ψ_Q は $\mathcal{R}\Gamma$ -線型であって、 $\sum a_k \otimes x_k \in \mathcal{L}\Gamma \odot \mathcal{R}\Gamma$ に対し

$$\Psi_Q(\sum a_k x_k) = \sum E_{\mathcal{P}}(a_k) x_k = \Phi_{\mathcal{P}}(\sum a_k \otimes x_k)$$

が成り立つ。

補題 5.11. C^* -環 A は核型であって $C_{\lambda}^*\Gamma \subseteq A \subseteq \mathbb{B}(\ell_2\Gamma)$ を満たすとする。このとき $\Psi_Q([A, C_{\rho}^*]) = \{0\}$ ならば、 $\Phi_{\mathcal{P}}$ は $\otimes_{\min}$ に関して連続となる。ここで $\mathbb{B}(\ell_2\Gamma)$ の部分集合 B, C に対し、

$$[B, C] = \{bc - cb \in \mathbb{B}(\ell_2\Gamma) : b \in B, c \in C\}$$

とかく。

A が核型であることより Γ が exact であることがわかるから、命題 5.9 と合わせて $\mathcal{P}$ が単射的であることがわかる。

証明. Ψ_Q は $C_{\rho}^*\Gamma$ -線型だから

$$\{0\} = \Psi_Q([A, C_{\rho}^*\Gamma]) = [\Psi_Q(A), C_{\rho}^*\Gamma]$$

となる。よって $\Psi_Q(A) \subseteq (C_{\rho}^*\Gamma)' = \mathcal{L}\Gamma$ となる。 A が核型であることを使うと

$$(\Psi_Q|_A) \times \text{id}_{C_{\rho}^*\Gamma} : A \odot C_{\rho}^*\Gamma \ni \sum a_k \otimes x_k \mapsto \sum \Psi_Q(a_k) x_k \in \mathbb{B}(\ell_2\Gamma)$$

は $\otimes_{\min}$ に関して連続となる (例えば [W, Theorem 1.6] を用いよ)。ゆえに $\Phi_{\mathcal{P}} = (\Psi_Q|_{C_{\lambda}^*\Gamma}) \times \text{id}_{C_{\rho}^*\Gamma}$ は $\otimes_{\min}$ に関して連続となる。□

5.3 応用

定理 5.12. Γ を離散群、 $\mathcal{G}$ を Γ の部分群からなる、空でない admissible な集合とする。 $\mathcal{Q}$ を $\mathcal{L}\Gamma$ の単射的部分環とする。このとき任意の $s \in \Gamma$ と $\Lambda \in \mathcal{G}$ に対し $\Psi_Q(\chi_{s\Lambda}) = 0$ が成り立つならば、 $\mathcal{Q}' \cap \mathcal{L}\Gamma$ は単射的となる。

証明. A を $\lambda(\Gamma)$ と $C(\Delta^{\mathcal{G}}\Gamma)$ で生成される $\ell_2\Gamma$ 上の C^* -環とすると、 $\mathcal{G}$ が admissible であることから A は核型である。5.2 節の記号を用いると、 Ψ_Q は $C_{\rho}^*\Gamma$ -線型だから、 $\Psi_Q(\chi_{s\Lambda}) = 0$ であることから、任意の $s, t \in \Gamma$ と $\Lambda \in \mathcal{G}$ に対し $\Psi_Q(\chi_{s\Lambda t}) = 0$ がわかる。任意の $x, y \in \mathbb{B}(\ell_2\Gamma)$ に対し

$$\|\Psi_Q(x^*y)\| \leq \|\Psi_Q(x^*x)\|^{1/2} \|\Psi_Q(y^*y)\|^{1/2}$$

であることに注意すると、 $\Psi_Q(c_0(\Gamma; \mathcal{G})) = \{0\}$ がわかる。

$s, t \in \Gamma$ と $f \in \ell_\infty \Gamma$ に対し

$$[\lambda(s)f, \rho(t)] = -\lambda(s)\rho(t)(f - f^t)$$

であることより, $[A, C_\rho^* \Gamma]$ は $C_\lambda^* \Gamma \cdot C_\rho^* \Gamma \cdot c_0(\Gamma; \mathcal{G})$ のノルム閉線型包に含まれる. ゆえに $\Psi_Q([A, C_\rho^* \Gamma]) = \{0\}$ となる. あとは補題 5.11 を適用すればよい. $\square$

$\mathcal{M}$ を有限 von Neumann 環, τ を $\mathcal{M}$ 上のトレース状態とする. $\mathcal{Q}, \mathcal{N}$ を $\mathcal{M}$ の部分環とする. このとき, いつ $\mathcal{M}$ のユニタリ u で $u\mathcal{Q}u^* \subseteq \mathcal{N}$ となるものが存在するかという問題を考える. その 1 つの答えとして, 次の Popa による定理がある:

定理 5.13 (Popa). $\mathcal{H}$ を $L_2 \mathcal{M}$ の $\mathcal{Q}\mathcal{N}$ -部分加群で $\dim_{\mathcal{N}} \mathcal{H}_{\mathcal{N}} < \infty$ となるものとする. このとき 2 つの 0 でない射影 $q \in \mathcal{Q}$, $e \in \mathcal{N}$, $*$ -準同型 $\theta: q\mathcal{Q}q \rightarrow e\mathcal{N}e$, 0 でない部分等長作用素 $v \in \mathcal{M}$ で次を満たすものが存在する:

- (i) 任意の $x \in q\mathcal{Q}q$ に対し, $xv = v\theta(x)$ が成り立つ.
- (ii) $vv^* \in (q\mathcal{Q}q)' \cap q\mathcal{M}q = q(\mathcal{Q}' \cap \mathcal{M})q$.
- (iii) $v^*v \in \theta(q\mathcal{Q}q)' \cap e\mathcal{M}e$.

証明. $\mathcal{Q}$ を diffuse な部分環, $\mathcal{N}$ を部分因子環として証明する. $d = \dim_{\mathcal{N}} \mathcal{H}_{\mathcal{N}}$ とおく. $\mathcal{Q}$ の 0 でない射影 q で $\tau(q)d \leq 1$ となるものをとる. $\mathcal{N}$ の 0 でない射影 e で $\tau(e) = \tau(q)d$ となるものをとる. このとき, $q\mathcal{H}$ は $q\mathcal{Q}q\mathcal{N}$ 両側加群となり, 右 $\mathcal{N}$ -加群として $eL_2(\mathcal{N})$ と同型となる. $U: q\mathcal{H} \rightarrow eL_2(\mathcal{N})$ をその同型とする.

$\theta = \text{Ad}U: q\mathcal{Q}q \rightarrow e\mathcal{N}e$ と記す. $\xi = U^*e\widehat{1_{\mathcal{N}}} \in q\mathcal{H}$ とおく. このとき, 任意の $x \in q\mathcal{Q}q$ に対し

$$x\xi = U^*\theta(x)e\widehat{1_{\mathcal{N}}} = U^*e\widehat{1_{\mathcal{N}}}\theta(x) = \xi\theta(x)$$

が成り立つ. $\xi L_2(\mathcal{M})$ を $\mathcal{M}$ に付随する非有界作用素と見て $\xi = v|\xi|$ をその極分解とする. このとき, 任意の $x \in q\mathcal{Q}q$ に対し $xv = v\theta(x)$ が成り立つことが次のようにしてわかる: $x \in q\mathcal{Q}q$ は $x^*x = xx^* = q$ を満たすとして証明すればよい. $x\xi\theta(x^*) = \xi$ より

$$\xi^*\xi = (x\xi\theta(x^*))^*x\xi\theta(x^*) = \theta(x)\xi^*\xi\theta(x^*)$$

となり, $|\xi| = \theta(x)|\xi|\theta(x^*)$ がわかる. よって $xv|\xi| = v|\xi|\theta(x) = v\theta(x)|\xi|$ となり, $xv = v\theta(x)$ となる.

この v が求めるものであることは, すぐにわかる. $\square$

Γ を離散群, Λ を Γ の部分群とする. $\mathcal{M} = \mathcal{L}\Gamma$, $\mathcal{N} = \mathcal{L}\Lambda$ とおく. このとき $\mathcal{K} = \ell_2(\Gamma/\Lambda)$ とおくと, 右 $\mathcal{N}$ -加群としての同型

$$L_2\mathcal{M} = \mathcal{K} \otimes L_2\mathcal{N}$$

が得られる.

$\mathcal{Q}$ を $\mathcal{M}$ の部分環で,

$$\Psi_{\mathcal{Q}}(\mathbb{K}(\mathcal{K}) \odot \mathbb{B}(L_2\mathcal{N})) \neq \{0\}$$

を満たすものとする. ($\Psi_{\mathcal{Q}}$ は補題 5.10 で作ったものとする.) 例えば, ある $s \in \Gamma$ に対し $\Psi_{\mathcal{Q}}(\chi_{s\Lambda}) \neq 0$ ならばよい. このとき, $\mathcal{K}$ 上の rank 1 の射影 p で $b = \Psi_{\mathcal{Q}}(p \otimes 1_{\mathcal{N}}) \in \mathcal{Q}'$ が 0 にならないものが存在する. $\Psi_{\mathcal{Q}}$ が $\mathcal{R}\Gamma$ -線型であることから, b は $\mathcal{N}$ の $L_2\mathcal{M}$ 上の右作用と交換する (つまり, $b \in \mathbb{B}(\mathcal{K}) \overline{\otimes} \mathcal{N}$). さらに,

$$(\mathrm{Tr} \otimes \tau)(b) = (\mathrm{Tr} \otimes \tau)(p \otimes 1_{\mathcal{N}}) = 1 < \infty$$

である. ここで, Tr は $\mathcal{K}$ 上のトレースを表すものとする. ゆえに b の 0 でないスペクトラム射影 $e \in \mathcal{Q}'$ で $\mathcal{N}$ の $L_2\mathcal{M}$ 上の右作用と交換し, かつ, $(\mathrm{Tr} \otimes \tau)(e) < \infty$ となるものが存在する. このとき, $\mathcal{H} = eL_2\mathcal{M}$ は $L_2\mathcal{M}$ の $\mathcal{Q}\mathcal{N}$ -部分加群であって, $\dim_{\mathcal{N}} \mathcal{H}_{\mathcal{N}} < \infty$ を満たす.

以上の議論と定理 5.12, 5.13 を合わせると, 次の定理を得る:

定理 5.14. Γ を離散群, $\mathcal{G}$ を Γ の部分群からなる, 空でない admissible な集合とする. $\mathcal{Q}$ を $\mathcal{L}\Gamma$ の単射的部分環で, $\mathcal{Q}' \cap \mathcal{L}\Gamma$ が単射的でないようなものとする. このとき $\Lambda \in \mathcal{G}$, 2 つの 0 でない射影 $q \in \mathcal{Q}$, $e \in \mathcal{L}\Lambda$, $*$ -準同型 $\theta: q\mathcal{Q}q \rightarrow e\mathcal{L}\Lambda e$, 0 でない部分等長作用素 $v \in \mathcal{L}\Gamma$ で次を満たすものが存在する:

- (i) 任意の $x \in q\mathcal{Q}q$ に対し, $xv = v\theta(x)$ が成り立つ.
- (ii) $vv^* \in (q\mathcal{Q}q)' \cap q\mathcal{L}\Gamma q = q(\mathcal{Q}' \cap \mathcal{M})q$.
- (iii) $v^*v \in \theta(q\mathcal{Q}q)' \cap e\mathcal{L}\Gamma e$.

参考文献

- [AD1] C. Anantharaman-Delaroche & J. Renault. *Amenable groupoids. With a foreword by Georges Skandalis and Appendix B by E. Germain.* Monogr. Enseign. Math., 36 Enseignement Math., Geneva 2000.
- [AD2] C. Anantharaman-Delaroche. *Amenability and exactness for dynamical systems and their C^* -algebras.* Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), 4153–4178.

- [AD3] C. Anantharaman-Delaroche. *On spectral characterizations of amenability*. Israel J. Math. **137** (2003), 1–33.
- [Bo] B. H. Bowditch. *Relatively Hyperbolic groups*. Preprint 1999.
- [MS] N. Monod and Y. Shalom. *Orbit equivalence rigidity and bounded cohomology*. To appear in Ann. of Math.
- [Oz1] N. Ozawa. *Boundaries of reduced free group C^* -algebras*. Preprint 2005. math.GR/0501555
- [Oz2] N. Ozawa. *Crude notes for a mini-course at NCGOA 2005*. Available at <http://www.math.vanderbilt.edu/~bisch/ncgoa05>
- [W] S. Wassermann. *Exact C^* -algebras and related topics*. Lecture Notes Ser., 19. Seoul National University, Research Institute of Mathematics, Global Analysis Research Center, Seoul, 1994.