

## 論 説

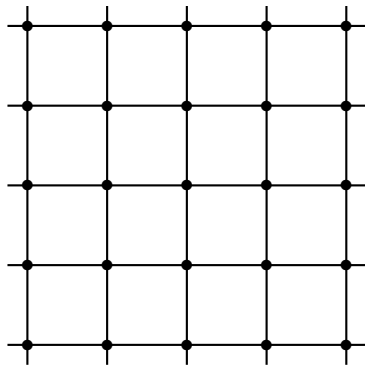
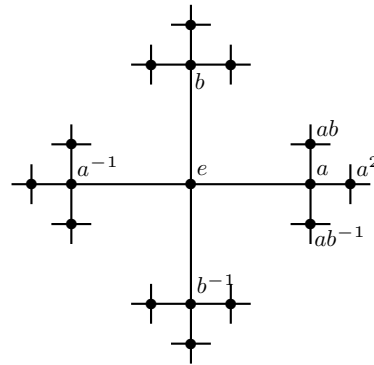
## 離散群と作用素環

小 沢 登 高

## 1 はじめに

(離散)群は数学における最も基本的な研究対象のひとつであり, 代数的・幾何的・解析的・組み合わせ論的等々の様々な側面を持っている. このうち本稿では解析的な側面に注目することにしよう. 今後特に断らない限り, 群といったら可算離散群を意味するものとする. 群は, そのものを想像するのが難しいミステリアスな存在であるから, 幾何化あるいは線形化して考えることにする. 群  $\Gamma$  が (有限) 部分集合  $S$  で生成されているとき,  $\Gamma$  を頂点集合とし,  $\{\{x, xs\} : x \in \Gamma, s \in S\}$  を辺集合とする無向グラフを  $\Gamma$  の Cayley グラフと呼び,  $X(\Gamma, S)$  と書くことにする. (図 1, 2 参照.) グラフ  $X(\Gamma, S)$  を頂点集合と同一視すれば, Cayley グラフは単に群  $\Gamma$  上に距離  $d(x, y) = |x^{-1}y|$  を導入したものと思える. ここで  $|x|$  は  $x \in \Gamma$  の  $S$  に関する語長である:  $|e| = 0$ ,

$$|x| := \min\{n \in \mathbb{N} : \exists s_1, \dots, s_n \in S \cup S^{-1} \text{ s.t. } x = s_1 \cdots s_n\}.$$

図 1:  $X(\mathbb{Z}^2, \{(1,0), (0,1)\})$ 図 2: 自由群  $X(F_2, \{a, b\})$ 

$S$  と  $S'$  がともに有限生成系ならば, 恒等写像  $\text{id}_\Gamma$  は距離空間  $X(\Gamma, S)$  と  $X(\Gamma, S')$  の間の Lipschitz 同型を与える. このように群  $\Gamma$  を距離空間 (の同値類) とみなすのが群の幾何化である. ([15] 参照.) 他にも伝統的に, 群を単独で扱うのではなく, 適当な空間に作用させて群と空間をまとめて取り扱うということが行われている. この考えを形式化すると変換群の考えに行き着く.

一方, 群の線形化とはここでは群を適当な線形空間上の作用素として表現することを指す. 線形

空間及びその上の作用素の空間に適当な完備位相を入れることにより、群を解析的に取り扱うことができるようになるのである。より具体的には、複素群環  $CT$  を適当な位相で完備化した位相環を考える。本稿では  $CT$  を 2 乗総和可能列のなす Hilbert 空間  $\ell_2\Gamma$  上の畳み込み作用素として表現（正則表現という）して得られる作用素環を考える。作用素環には  $C^*$  環と von Neumann 環の 2 種類あり、目的・用途によって使い分けられる。一般に、作用素環とは Hilbert 空間（大抵は複素係数、可分無限次元のものを考える）の上の有界線形作用素のなす代数のことである。通常、複素数の共役にあたる  $*$ -演算で閉じていることのほかに、しかるべき位相で閉じていることを要請する。その位相として作用素ノルム位相（Hilbert 空間の単位球上一様収束）を考えたものが  $C^*$  環であり、強収束位相（各点収束位相）を考えたものが von Neumann 環である。強収束位相は作用素ノルム位相より弱いので、von Neumann 環は  $C^*$  環でもあるが、後で見るようふたつの分野で研究の興味や手法はかなり異なる。作用素環の包括的なテキストとして、[49] を挙げておく。

## 2 既約群 $C^*$ 環と群 von Neumann 環

離散群  $\Gamma$  の複素群環  $CT$  を考える。 $CT$  は  $\Gamma$  上の複素関数  $f$  で  $\text{supp } f$  が有限なものからなり、畳み込みと  $*$ -演算により  $*$ -代数となる：

$$(f * g)(t) = \sum_{s \in \Gamma} f(s)g(s^{-1}t), \quad f^*(t) = \bar{f}(t^{-1}).$$

$CT$  の標準基底を  $\{\delta_t : t \in \Gamma\}$  と書くとき ( $\delta_t(t) = 1, \delta_t(s) = 0$  for  $s \neq t$ )、上の式はそれぞれ

$$\delta_s * \delta_t = \delta_{st}, \quad (\alpha \delta_t)^* = \bar{\alpha} \delta_{t^{-1}}$$

となる。さらに、単位元  $e$  における値をはかることにより、群環  $CT$  上の跡 (trace)  $\tau$  を定義する：

$$\tau(f) = f(e).$$

これで群の三要素、積・逆元・単位元が有効利用できたことになる。線形汎関数  $\tau$  は正定値で、跡の性質を満たす。つまり、

$$\tau(f^* * f) = \sum_{t \in \Gamma} |f(t)|^2 \geq 0, \quad \tau(f * g) = \tau(g * f).$$

跡の性質は基底の上でチェックすれば容易に分かる。群環  $CT$  の自分自身に対する左掛け算作用（左正則表現）を  $\lambda$  で表すことにする： $\lambda(f)g = f * g$ 。群環  $CT$  上に  $\ell_2$ -norm を

$$\|f\|_2 = \tau(f^* * f)^{1/2} = \left( \sum_{t \in \Gamma} |f(t)|^2 \right)^{1/2}$$

で定義し、その完備化として得られる 2 乗総和可能列のなす Hilbert 空間を  $\ell_2\Gamma$  と書くことにする。 $\{\delta_t : t \in \Gamma\}$  は  $\ell_2\Gamma$  の標準正規直交基底となる。以後、左正則表現  $\lambda$  を群環  $CT$  の、 $\ell_2\Gamma$  上の有界線形作用素による  $*$ -表現とみなすことにする。（この表現は  $\lambda(f)^* = \lambda(f^*)$  を満たす。）群  $\Gamma$  に制限すると、 $\lambda_s = \lambda(\delta_s)$  は  $\ell_2\Gamma$  上に左平行移動のユニタリ作用素として作用している。こちらも群  $\Gamma$  の左正則表現という。Hilbert 空間  $\ell_2\Gamma$  上の有界線形作用素全体のなす  $C^*$  環を  $B(\ell_2\Gamma)$  と書くことにする。 $*$ -

部分代数  $\lambda(C\Gamma) \subset B(\ell_2\Gamma)$  の作用素ノルムによる閉包を  $C_\lambda^*\Gamma$  と書き, 既約群  $C^*$  環と呼ぶ. 作用素の強収束位相 (各点収束位相) による閉包を  $L\Gamma$  と書き, 群 von Neumann 環と呼ぶ. von Neumann の定理によれば,

$$L\Gamma = \{\lambda(f) : f \in \ell_2\Gamma, \|\lambda(f)\| < \infty\}$$

である. つまり, 畳み込み積作用素で有界なものは, 有限台を持つ畳み込み積作用素で近似できるのである.  $\ell_2$  を  $\ell_p$  に置き換えたときも, この類似は (ほとんどの群に対して) 正しいと予想されている. 反例は知られていない.

可換群の場合

$\Gamma = \mathbb{Z}$  のときを考える. Fourier 変換により  $\ell_2\mathbb{Z} \cong L^2(T, \mu)$  である. このユニタリ同型のもと  $\ell_2\mathbb{Z}$  上の畳み込み作用素  $\lambda(f)$  は三角多項式  $\hat{f}$  による掛け算作用素になる. 従って, 既約群  $C^*$  環  $C_\lambda^*\mathbb{Z}$  は連続関数環  $C(T)$  と同型, 跡  $\tau$  は Lebesgue 測度  $\mu$  による積分, 群 von Neumann 環  $L\mathbb{Z}$  は  $L^\infty$  関数環  $L^\infty(T, \mu)$  と同型となる. 一般の可換離散群  $\Gamma$  に対しても, Fourier 変換により

$$\ell_2\Gamma \cong L^2(\hat{\Gamma}, \mu), \quad C_\lambda^*\Gamma \cong C(\hat{\Gamma}), \quad L\Gamma \cong L^\infty(\hat{\Gamma}, \mu), \quad \tau(\lambda(f)) = \int_{\hat{\Gamma}} \hat{f} d\mu$$

となる. ここで,  $\hat{\Gamma}$  は  $\Gamma$  の Pontrjagin 双対であり,  $\mu$  はコンパクト群  $\hat{\Gamma}$  上の Haar 測度である. より一般に単位元を持つ可換  $C^*$  環  $A$  は, Gelfand の双対定理により,  $A$  のスペクトラムと呼ばれるコンパクト空間  $\hat{A}$  の上の連続関数環  $C(\hat{A})$  と同型で, 任意の  $A$  から  $B$  への  $*$ -準同型写像は  $\hat{B}$  から  $\hat{A}$  への連続写像により与えられる. つまり, 単位元を持つ可換  $C^*$  環の研究はコンパクト位相空間の研究と同値であるといえる. 一方, 可換 von Neumann 環は適当な測度空間  $(\Omega, \mu)$  上の  $L^\infty$  関数環と同型になる. 適当な可分性の仮定のもと, 測度空間は原子の数で完全に分類されることが知られている. 特に,  $\Gamma$  が可算無限可換離散群ならば,  $(\hat{\Gamma}, \mu) \cong ([0, 1], \text{Lebesgue 測度})$  であり,  $L^\infty(\hat{\Gamma}, \mu)$  はすべて同型となる. このような背景から,  $C^*$  環論は非可換位相空間論, von Neumann 環論は非可換測度論とも呼ばれる. こうした思想の延長上に Connes の非可換幾何学 ([4]) が存在するのである. (もっとも, これは単なる対外的スローガンであって, 普通の作用素環研究者には可換作用素環論の非可換化を研究しているという意識はない. むしろまったく新しい現象を研究しているのである. これは一般の群論研究者が可換群論の非可換化を研究しているのではないということと同様である. しかし, このアナロジーがまったく無効かというところでもなく, 特に  $K$  理論などの (コ) ホモロジー理論においては重要な役割を果たすことも多い.)

### 3 従順群

可換群の群作用素環についてはもう全て分かったことにして (可換群自体の研究は作用素環論の枠組みの中ですることでない), 次に扱いやすい群のクラスを考えることにする. それが従順群のクラスである. 従順性は群の解析的取り扱いにおいて最も重要な概念であり, 多くの場合, 群が従順なら良い振る舞いをし, 非従順なら著しく悪い振る舞いをするという dichotomy が成り立つ. 従順性の概念は, 有限群やコンパクト群の概念を一般化したもので, Hausdorff–Banach–Tarski のパラドックスを解析するために von Neumann が導入したものである. 可算離散群  $\Gamma$  が従順であるとは,  $\Gamma$  のコンパクト

凸集合  $K$  上の連続アフィン作用が常に固定点を持つときをいう。  $\Gamma$  が有限群ならば、  $\Gamma$  の適当な軌道の平均をとればそれが固定点となるので、  $\Gamma$  は従順である。 任意の可換群が従順であることを主張するのが、 有名な Markov-角谷の不動点定理である。 従順群のクラスは、 有限群や可換群をすべて含み、 さらに部分群、 商群、 拡大、 増大和などの操作に閉じている。 とくに可解群はすべて従順である。 従順性には数え切れないほどの同値な条件が存在するが、 最も標準的ないくつかを以下にあげる。

定理 1 可算離散群  $\Gamma$  に対して以下は同値。

- (1) 群  $\Gamma$  は従順。
- (2)  $\ell_\infty \Gamma$  の上に平行移動不変な正值線形汎関数  $\mu: \ell_\infty \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$  で単位的なものが存在する:
  - (a)  $f \geq 0$  ならば  $\mu(f) \geq 0$ , かつ  $\mu(1_\Gamma) = 1$ ;
  - (b) 任意の  $s \in \Gamma$  と  $f \in \ell_\infty \Gamma$  に対して,  $\mu(s \cdot f) = \mu(f)$ . ここで,  $(s \cdot f)(t) = f(s^{-1}t)$ .
- (3)  $\Gamma$  上に近似的に不変な確率測度の列  $\mu_n$  が存在する:
  - (a)  $\mu_n \in \ell_1 \Gamma$ , かつ  $\mu_n \geq 0$ ,  $\|\mu_n\|_1 = 1$ ;
  - (b) 任意の  $s \in \Gamma$  に対して,  $\|s \cdot \mu_n - \mu_n\|_1 \rightarrow 0$ . ここで,  $(s \cdot \mu)(t) = \mu(s^{-1}t)$ .
- (4)  $\Gamma$  上の有限台を持つ正定値関数の列  $\varphi_n$  で  $1_\Gamma$  に各点収束するようなものが存在する。

条件 (4) に関してであるが、これは  $\Gamma = \mathbb{Z}$  のときは、Fourier 解析における Fejér の定理を意味する。 実際、 $\xi_n$  を  $T$  上の Fejér 核とすると、 $\mathbb{Z}$  上の関数  $\hat{\xi}_n(k) = (1 - k/n) \vee 0$  は正定値であって  $1_\Gamma$  に各点収束する。 Fejér 核  $\xi_n$  による  $L^\infty(T, \mu)$  上の畳み込み積作用素は、Fourier 変換  $L^\infty(T, \mu) \cong LZ$  を通じて、正定値関数  $\varphi_n$  による  $LZ$  上の乗数作用素  $m_{\varphi_n}: \lambda(f) \mapsto \lambda(\varphi_n f)$  となる。 この乗数作用素  $m_{\varphi_n}$  は  $C\Gamma$  に値を持つ広義縮小写像で、恒等写像  $m_{1_\Gamma}$  に収束する。 Fejér 核、あるいはその類似が調和解析において果たす役割を考えれば、従順性が非可換調和解析において果たす役割の重要性が分かると思う。 従順群の基本的な性質について詳しく書いたテキストとして [40] を挙げておく。 一般に、群  $\Gamma$  上の正定値関数に関して以下のことが成り立つ。

定理 2 関数  $\varphi: \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$  に関して、以下は同値。

- (1)  $\varphi$  は正定値<sup>1)</sup>。つまり、 $\forall f \in C\Gamma$  に対して  $\sum_{x,y \in \Gamma} \varphi(x^{-1}y) \bar{f}(x) f(y) \geq 0$ 。
- (2) Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  とベクトルの族  $\xi_x \in \mathcal{H}$  が存在して、次を満たす:  $\varphi(x^{-1}y) = \langle \xi_y, \xi_x \rangle$ 。
- (3)  $B(\ell_2 \Gamma)$  上の Schur 乗数作用素  $m_\varphi: [A_{x,y}]_{x,y \in \Gamma} \mapsto [\varphi(xy^{-1}) A_{x,y}]_{x,y \in \Gamma}$  は有界正写像。

Schur 乗数作用素は、核  $\varphi(xy^{-1})$  の代わりに  $\varphi(x^{-1}y)$  を使っても問題なく、むしろこの方が自然であるが、群 von Neumann 環  $L\Gamma$  に制限したときに関係式  $m_\varphi(\lambda(f)) = \lambda(\varphi f)$  が成り立つように配慮した。

#### 4 非従順群

従順でない群の例の筆頭として非可換自由群  $F_2$  が挙げられる。自由群は次のような病的分解を持つ:  $F_2$  を  $a, b$  で生成される階数 2 の自由群とし、

$$\begin{aligned} A_+ &= \{a \text{ から始まる既約語全体}\}, \\ A_- &= \{a^{-1} \text{ から始まる既約語全体}\}, \\ B_+ &= \{b \text{ から始まる既約語全体}\} \setminus \{b, b^2, \dots\}, \\ B_- &= \{b^{-1} \text{ から始まる既約語全体}\} \cup \{e, b, b^2, \dots\} \end{aligned}$$

とおくと,

$$\begin{aligned} F_2 &= A_+ \sqcup A_- \sqcup B_+ \sqcup B_- \\ &= A_+ \sqcup a \cdot A_- \\ &= B_+ \sqcup b \cdot B_- \end{aligned}$$

を満たす. もし  $\ell^\infty(F_2)$  上に左平行移動不変な正值汎関数  $\mu$  があれば (定理 1(2) 参照), 上の病的分解を考えることにより,

$$\mu(1_\Gamma) = \mu(1_{A_+} + 1_{A_-} + 1_{B_+} + 1_{B_-}) = \mu(1_{A_+ \sqcup a \cdot A_-} + 1_{B_+ \sqcup b \cdot B_-}) = 2\mu(1_\Gamma)$$

となり,  $\mu(1_\Gamma) = 0$  でなければならない. 群  $F_2$  を球面回転群  $SO(3) \cong S^2$  に埋め込み, 上の左剰余類分解を考えれば, 病的分解は Hausdorff–Banach–Tarski の逆理となる (実際は,  $SO(3)$  の  $S^2$  への作用が自由ではないのでその分を補正する必要がある). 非可換自由群  $F_r$  を部分群として含む群はすべて非従順であるが, その逆も正しいかというのが有名な von Neumann の問題である. この問題は Tits の択一定理 ([50]) により線形群に関しては肯定的に解かれたが, 一般の場合は 1980 年に Ol’shanskii ([33]) が反例を示している. 非従順群のクラスのなかには, すべての元が捩れ元であるような群も存在する.

## 5 強 Novikov 予想と Baum–Connes 予想

唐突であるが,  $M$  を滑らかな閉多様体,  $D$  を  $M$  上の楕円型偏微分作用素とする. このとき Fredholm 指数  $\text{Ind } D$  が考えられるが, より多くの情報を捉える「指数」として次のようなものを考えることができる. 準同型写像  $\pi_1(M) \rightarrow \Gamma$  をひとつ固定し (例えば  $\Gamma = \pi_1(M)$ ),  $C_r^*\Gamma$ -ベクトル束  $\mathcal{E} = \widetilde{M} \times_{\pi_1(M)} C_r^*\Gamma \rightarrow M$  を考える. 楕円型偏微分作用素  $D$  は  $\mathcal{E}$  の切断の間の作用素  $D_\Gamma$  に持ち上がり,  $\ker D_\Gamma$  と  $\text{coker } D_\Gamma$  は  $C_r^*\Gamma$ -加群となる. 適当な処理を施すと, これらはともに有限生成かつ射影的となるので,  $C_r^*\Gamma$  の  $K_0$  群に値をとる  $\Gamma$ -指数

$$\text{Ind}_\Gamma D = [\ker D_\Gamma] - [\text{coker } D_\Gamma] \in K_0(C_r^*\Gamma)$$

を定義することができる. ([22] 参照.) 実は,  $C^*$  環としていわゆる全群  $C^*$  環  $C^*\Gamma$  を取る方が一般的であるが, ここではその差異は無視することにする.  $\Gamma$  として単位群  $1$  を取ったものが, 通常の Fredholm 指数  $\text{Ind } D$  である. ( $K_0(C) = \mathbb{Z}$  であることに注意.) また,  $\text{Ind}_\Gamma D$  の跡を取ることで,  $\text{Ind } D$  を得ることができる.  $C^*$  環の  $K$  理論は, ホモトピー不変性などの良い性質を持つものの, 大抵の場合, 計算が困難である.  $\Gamma$ -指数  $\text{Ind}_\Gamma D$  が良い性質を持つことの証左として以下の 2 定理が挙げられる.

定理 (Kasparov 1983 [25]). 向き付け可能な閉多様体上の符号作用素  $D$  の  $\Gamma$ -指数  $\text{Ind}_\Gamma D$  は, 向き付けられたホモトピーに対して不変である.

定理 (Rosenberg 1983 [46]). 閉スピン多様体が正のスカラー曲率計量を持てば, その多様体上の Dirac 作用素の  $\Gamma$ -指数  $\text{Ind}_\Gamma D$  は 0 である.

一般に  $\Gamma$ -指数が 0 でないことを判定するのはとても難しい. もし判定できなかつたり, 常に 0 になる

というのであれば上の定理は無意味ということになるが、そうでないことを保証するのが強 Novikov 予想である。  $E\Gamma \rightarrow B\Gamma$  を群  $\Gamma$  の分類空間とその普遍被覆空間とする。（ここで、 $B\Gamma$  はコンパクトであると仮定する。）このとき、 $\mathcal{E} = E\Gamma \times_{\Gamma} C_r^*\Gamma$  とおくと、 $\mathcal{E}$  は  $B\Gamma$  上の  $C_r^*\Gamma$ -ベクトル束であって、 $[\mathcal{E}] \in K_0(C(B\Gamma, C_r^*\Gamma))$  を定める。この  $[\mathcal{E}]$  を掛けることによって得られる準同型写像  $\mu: K_*(B\Gamma) \rightarrow K_*(C_r^*\Gamma)$  は組み立て写像 (assembly map) と呼ばれる。この  $\mu$  が有理的に単射であることを主張するのが強 Novikov 予想である。さらに適当な意味で（例えば  $\Gamma$  が捩れない群のとき） $\mu$  が同型写像であることを主張するのが Baum–Connes 予想([1]) である。強 Novikov 予想が正しければ、次の Novikov 予想が従う： $[D] \in K_n(B\Gamma) \otimes Q$  は向き付けられたホモトピーに対して不変である。強 Novikov 予想の帰結には他にも、安定的 Gromov–Lawson–Rosenberg 予想などの重要な予想がいくつか存在する。一方 Baum–Connes 予想からは、 $\Gamma$  が捩れない群のとき複素群環  $C\Gamma$  は非自明な巾等元を持たないという Kaplansky 予想などが従う。純粋に代数的な結果が解析的手法によって示される好例であろう。ただし、Baum–Connes 予想は、未だに見つかっていないものの、反例が存在するであろうと一般に考えられている。Baum–Connes 予想には係数付き Baum–Connes 予想という強いバージョンがあり、これについては既に反例が知られている。

Baum–Connes 予想は長いこと夢のような話だと思われてきたが、90 年代後半に Higson–Kasparov によるブレイクスルーがあり、すべての従順群（あるいはもっと一般に Haagerup の性質を持つ群）に対して成り立つことが証明された ([21])。実は従順群についても歪群に対する Baum–Connes 予想が成り立つ。従順群の概念を一般化したものに完全群(exact group) というものがある。完全群は従順歪群にきれいに埋め込めるので、強 Novikov 予想が成り立つ。幾何学への応用は、大抵、強 Novikov 予想で足りるので、どのような群が完全であるかを調べることは重要なことである。

## 6 従順作用と完全性

従順性は大変によい性質で、Baum–Connes 予想や後述の群測度 von Neumann 環の分類問題などの多くの重要な問題が従順群に対して既に解決済みである。しかし、世の中には可解でない線形群や双曲群など従順でない群も多く存在する。そのうえ、いわゆる「Gromov の原理」によれば、「離散群すべてに対する命題は自明であるか間違いである」とのことなので、従順性より弱い性質であってなるべくよいものを探す必要がある。どのような性質がよいかというと、

- 与えられた群がその性質を満たすことの確認がそれなりに容易である。
- よく知られている重要な群の多くがその性質を満たす。
- その性質を満たす群に対する有用な定理が成り立つ。

の 3 条件が満たされれば、よい性質といって差し支えないであろう。この章では、この 3 条件を満たしている性質の例として完全性を紹介する。前章で述べたように完全群に対しては強 Novikov 予想が成り立つ。完全性には von Neumann 環の分類問題への応用もある ([2])。

$\mathcal{M}_1(\Gamma)$  を群  $\Gamma$  上の確率測度全体のなす空間とする：

$$\mathcal{M}_1(\Gamma) = \{\mu \in \ell_1\Gamma : \mu \geq 0, \sum_{t \in \Gamma} \mu(t) = 1\}.$$

$\mathcal{M}_1(\Gamma)$  上では各点収束位相と norm 位相が一致することに注意する<sup>2)</sup>。この位相を入れると  $\mathcal{M}_1(\Gamma)$  は

$\Gamma$  が連続的に作用する位相空間となる. 群  $\Gamma$  が従順であることと, 近似的に  $\Gamma$ -不変な列  $\mu_n \in \mathcal{M}_1(\Gamma)$  が存在することが同値であった (定理 1.(3) 参照). この従順の概念をコンパクト空間上の連続的な群作用  $\Gamma \curvearrowright X$  に一般化したものが次の従順作用である.

定義 1 コンパクト位相空間  $X$  への連続な作用  $\Gamma \curvearrowright X$  が (位相的に) 従順であるとは, 連続写像の列

$$\mu_n: X \ni x \longmapsto \mu_n^x \in \mathcal{M}_1(\Gamma)$$

であって, 近似的に  $\Gamma$ -同変なものが存在するときをいう:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} \|\mu_n^{s \cdot x} - s \cdot \mu_n^x\|_1 = 0.$$

例 1 自由群  $F_r$  の境界  $\partial F_r$  への作用は従順である. ここで,  $F_r$  の自由生成系  $S = \{g_1, \dots, g_r\}$  に対し, 境界  $\partial F_r$  を文字  $S \cup S^{-1}$  の片側無限既約語全体のなす空間として定義する. 境界  $\partial F_r$  は, 直積空間  $(S \cup S^{-1})^{\mathbb{N}}$  の閉部分集合として, コンパクト位相空間である. 各  $x = (a_n)_{n=1}^{\infty} \in \partial F_r$  に対して,  $x_0 = e$ ,  $x_n = a_1 \cdots a_n \in F_r$  と定めると,  $x$  は Cayley グラフ  $X(F_r, S)$  における測地線  $(x_n)_{n=0}^{\infty}$  の収束先とみなせる. (図 3 参照.) 自由群  $F_r$  は境界  $\partial F_r$  に左掛け算で連続的に作用し, この作用は従順である. 実際, 近似的同変写像  $\mu_n: \partial F_r \rightarrow \mathcal{M}_1(\Gamma)$  として,

$$\mu_n^x = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{x_k}$$

がとれる. つまり,  $\mu_n^x$  は原点  $e$  を発して無限遠点  $x$  に収束する測地線  $(x_n)_{n=0}^{\infty}$  のはじめの  $n$ -切片上の一様確率測度である. 従って,  $s \cdot \mu_n^x$  は点  $s$  を発して無限遠点  $s \cdot x$  に収束する測地線のはじめの  $n$ -切片上の一様確率測度であり

$$\|\mu_n^{s \cdot x} - s \cdot \mu_n^x\|_1 \leq \frac{2d(s, e)}{n}$$

が成り立つ. (図 4 参照.)

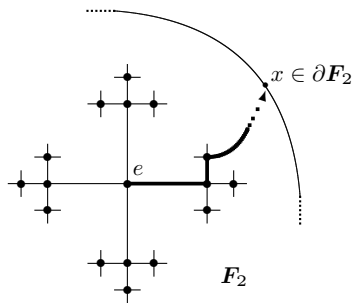


図 3:  $X(F_2, \{g_1, g_2\})$  と境界  $\partial F_2$

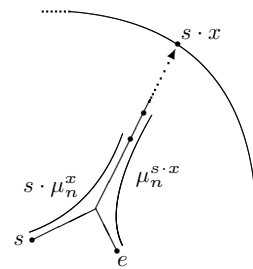


図 4: Amenability of  $F_2$  acting on  $\partial F_2$

例 2  $G$  が局所コンパクト群で, 従順な閉部分群  $H \subset G$  で, 商空間  $G/H$  がコンパクトになるようなものが存在するとする. 局所コンパクト群の従順性は, 本稿では定義していないが, 離散群のときと似たようなものである. 指数有限の従順な部分群を持つような群はそれ自体従順なので, 上の状況で

もし  $G$  が離散なら  $G$  は従順となる。しかし、離散でない場合には面白い例がいくつもあり、連結半単純 Lie 群  $G$  がそのような例である。実際、 $G = KAN$  を岩沢分解とすると、閉部分群  $H = AN$  は可解ゆえ従順であり、 $G/H$  はコンパクトとなる。このとき、任意の離散部分群  $\Gamma \subset G$  の商空間  $G/H$  への作用が従順となることが知られている。

実は群作用  $\Gamma \curvearrowright X$  の従順性は、変換亜群  $X \rtimes \Gamma$  が局所コンパクト亜群として従順であることと同値である。前章で述べたように、いつ群  $\Gamma$  が従順亜群にきれいに埋め込めるかを知ることは重要である。

定義 2 群  $\Gamma$  が完全 (exact) であるとは、適当なコンパクト空間に従順に作用するときをいう。

なぜ「完全」という名前がついたのかというと、もともとは  $C^*$  環の完全列を使って定義されていたからである ([2, 36] 参照)。上の例より、自由群、及び連結半単純 Lie 群の離散部分群は完全であることが分かる。さらに一般に、(相対的)双曲群、写像類群、線形群などはすべて完全である ([19, 27, 17, 36])。群作用によらずに完全群を特徴付けることを考えよう。簡単のため  $\Gamma$  を有限生成群とし、生成系  $S$  をひとつ固定する。 $\Gamma$  内の閉球を  $B(t, R) = \{s \in \Gamma : d(s, t) \leq R\}$  と定義する。 $G \curvearrowright X$  を従順作用とし、 $\mu_n : X \rightarrow \mathcal{M}_1(\Gamma)$  を近似的に  $\Gamma$ -同変な連続写像とする。 $\mu_n$  の像はコンパクトなので、十分に大きい有限集合  $R_n > 0$  に対して、 $\mathcal{M}_1(B(e, R_n))$  に含まれるとしてよい。点  $x_0 \in X$  をひとつ選び、 $\zeta_n^t = t \cdot \mu_n^{t^{-1} \cdot x_0} \in \mathcal{M}_1(\Gamma)$  と定義すれば、 $\zeta_n^{ts} = ts \cdot \mu_n^{s^{-1}t^{-1} \cdot x_0} \approx t \cdot \mu_n^{t^{-1} \cdot x_0} = \zeta_n^t$  であるから、

(a) 各  $t \in \Gamma$  に対して  $\text{supp}(\zeta_n^t) \subset B(t, R_n)$  となるような  $R_n > 0$  が存在する、

(b) 各  $s \in \Gamma$  に対して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in \Gamma} \|\zeta_n^t - \zeta_n^{ts}\|_1 = 0$ ,

の 2 条件を満たす。逆にこのような条件を満たす列  $\zeta_n : \Gamma \rightarrow \mathcal{M}_1(\Gamma)$  の存在は、 $\Gamma$  の Stone-Čech コンパクト化  $\beta\Gamma$  への作用が従順であること、従って  $\Gamma$  の完全性を導く。上で作った列  $(\zeta_n)_{n=1}^\infty$  は、部分列を選ぶことにより、

$$\sup\{\|\zeta_n^t - \zeta_n^{ts}\|_1 : s \in B(e, n), t \in \Gamma\} < \frac{1}{2^n}$$

を満たすとしてよい。このとき、 $f : \Gamma \rightarrow \bigoplus \ell_1 \Gamma$  を

$$f(s) = \frac{1}{2} \bigoplus_{n=1}^\infty \zeta_n^s - \zeta_n^e$$

と定義できる。この写像  $f$  は

$$|\{n : 2R_n \leq d(s, t)\}| \leq \|f(s) - f(t)\| \leq d(s, t)$$

を満たす。このように、 $d(s, t) \rightarrow \infty \iff d(f(s), f(t)) \rightarrow \infty$  を満たす写像  $f$  は粗い埋め込み (coarse embedding) と呼ばれる。以上の議論をまとめると、次の事実が分かる：完全群は Banach 空間  $\ell_1$  への粗い埋め込みが存在する。(Hilbert 空間  $\ell_2$  への粗い埋め込みも存在する。) Gromov ([16]) はこのような埋め込みが存在しない群を構成しているので、世の中には完全でない群も存在することが分かる。完全群、及び以下に挙げる群の近似性に関する包括的なテキストとして [2] を挙げておく。

## 7 Haagerup の性質と弱従順性

完全性以外にも従順性を弱めた性質がいくつかあるが、ここでは自由群  $F_r$  という具体例を使って、

Haagerup の性質([18]) と弱従順性を見よう. 例 1 のように Cayley グラフ  $X(F_r, \mathcal{S})$  と境界  $\partial F_r$  を考え, 無限遠点  $\omega \in \partial F_r$  をひとつ選び固定する. 各  $x \in F_r$  に対し,  $x$  を発して  $\omega$  に収束する測地線  $\omega_x$  が唯ひとつ存在する. このとき各  $x, y \in F_r$  に対し,  $\omega_x(k) = \omega_y(l)$  となるのは  $k+l-d(x, y)$  が非負偶数のときで, さらに各  $m$  に対し  $\omega_x(k) = \omega_y(l)$  と  $k+l-d(x, y) = 2m$  の 2 条件を満たす  $(k, l)$  の組はちょうどひとつ存在することに注意しておく. (図 5 参照.)



図 5: 自由群 (樹木グラフ) 上の測地線

そこで, 各  $z \in D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  に対し,  $\eta_z : \Gamma \rightarrow \ell_2 \Gamma$  を絶対収束する無限級数

$$\eta_z^x = \sqrt{1-z^2} \sum_{k=0}^{\infty} z^k \delta_{\omega_x(k)}$$

で定義すると, 任意の  $x, y \in \Gamma$  に対し,

$$\langle \eta_z^x, \eta_z^y \rangle = (1-z^2) \sum_{k,l=0}^{\infty} z^{k+l} \langle \delta_{\omega_x(k)}, \delta_{\omega_y(l)} \rangle = (1-z^2) \sum_{m=0}^{\infty} z^{d(x,y)+2m} = z^{d(x,y)}$$

が成り立つ.  $z \in D$  が実数のときは,  $\eta_z$  とその複素共役  $\bar{\eta}_z$  は一致するので, 定理 2 により,  $\theta_z(x) = z^{|x|}$  は  $F_r$  上の正定値関数である. つまり, 自由群  $F_r$  は従順ではないが, 無限遠で消える正定値関数の列  $\varphi_n$  で  $1_{F_r}$  に収束するものが存在するのである. この「無限遠で消える」を「有限台を持つ」に換えたものが従順性と同値であった (定理 1). この性質は Haagerup の性質と呼ばれ, 第 5 章で見た Baum–Connes 予想などに対する応用が豊富である. さらに適当な複素積分を行うことによって  $\varphi_n$  の裾を切ることができ, 有限台を持つ関数の列  $\psi_n$  で,  $\|m_{\psi_n}\| \leq 1$  を満たし,  $1_{F_r}$  に各点収束するものが存在することを示せる. ここで,  $m_{\psi_n}$  は  $B(\ell_2 \Gamma)$  上の Schur 乗数作用素である (定理 2 参照). このような性質を弱従順性という. 群  $\Gamma$  が弱従順であれば, Fejér の定理が弱い形で成り立つ. すなわち, 任意の有界な畳み込み作用素  $\lambda(f)$  を,  $C\Gamma$  の元  $\lambda(\psi_n f)$  で近似できる. ちなみに, この事実は  $\ell_2 \Gamma$  を  $\ell_p \Gamma$  で置き換えても成り立つ. (第 2 章参照.)

結局, 自由群は従順でこそないが, 比較的におとなしく, Haagerup の性質や弱従順性といったよい性質を持つのである. こうした良い性質を持たない頑固な群の例として,  $\mathrm{SL}(3, \mathbb{Z})$  などの高階数 Lie 群の格子が挙げられる. 階数 1 の群や双曲群はその中間である ([7, 37]).

## 8 von Neumann 環の分類問題

中心が自明な von Neumann 環は因子環と呼ばれる. 一般に von Neumann 環は中心に沿って因子環の「直積分」に分解できるので, von Neumann 環の研究においては, 因子環の研究が重要である. 有限次元の因子環は全行列環  $M_n(\mathbb{C})$  に同型である. 無限次元における全行列環の自然な類似と

して、Hilbert 空間  $\ell_2$  上の有界線形作用素全体のなす因子環  $B(\ell_2)$  がまず思い浮かばれるが、これは von Neumann 環としてそれほど面白いものではない。そのうえ、全行列環の研究において大切な役割を果たす跡  $\text{Tr}: [A_{i,j}] \mapsto \sum_i A_{i,i} \in C$  も非有界になってしまう。実は、全行列環  $M_n(C)$  の無限次元の類似として最も興味深いのがいわゆる  $\text{II}_1$  型因子環である。因子環は型によって大雑把に分類されているが、 $\text{II}_1$  型因子環とは零でない有界な跡が存在するような因子環のことである。ここで跡とは、跡の性質  $\tau(xy) = \tau(yx)$  を満たす任意の線形汎関数  $\tau$  のことである。竹崎双対定理などによって、他の型の因子環の研究も原理的には<sup>3)</sup>  $\text{II}_1$  型因子環の研究に帰着できることが知られている。Murray と von Neumann は、離散群やその確率空間への保測作用から、 $\text{II}_1$  型因子環を構成できることを発見し、その分類問題を提起した ([32])。群 von Neumann 環の構成法については既に第 2 章で見た。群 von Neumann 環  $L\Gamma$  が  $\text{II}_1$  型因子環となるのは、複素群環  $C\Gamma$  の中心が自明のとき、即ち群  $\Gamma$  の共役類が自明な場合  $\{e\}$  を除いてすべて無限集合となるときのときである。この条件は ICC (Infinite Conjugacy Classes) として知られている。現在においても、文献に現れる  $\text{II}_1$  型因子環の大半は Murray と von Neumann の群測度構成法によって得られたものたちである。(本稿では群 von Neumann 環も群測度 von Neumann 環の一種とする。) 一般的にいて、ある原料から製品を作る方法が知られているときに、製品がどの程度原料や製造工程に依存するかを考えるのは自然なことであろう。例えばワインに興味がある人であれば、ワインを味わうときには、原料となったブドウの種類や生産者を知ろうとするのではないか。しかし von Neumann 環の分類は、ワイルドな問題であって、完全に分類することはそもそも「原理的に不可能」だとされている。それでも出来る限り見分けてみようというのが  $\text{II}_1$  型因子環分類問題の主旨である。この分野はエルゴード理論における軌道同値関係の理論 ([26]) や、集合論における分類理論・記述集合論 ([23])、それに測度論の群論と最近名付けられた分野と密接な関係を持ち、主に Popa の大活躍 ([44]) のおかげで急速な発展を遂げている。

#### 群測度 von Neumann 環

可算離散群  $\Gamma$  の標準的確率空間  $(X, \mu)$  への保測作用  $\Gamma \curvearrowright X$  を考える。確率空間  $(X, \mu)$  は各点の測度が 0 であるとする。このとき、ゆるい可分性の仮定(「標準的」と呼ばれる)のもと、 $(X, \mu)$  は測度空間として  $([0, 1], \text{Lebesgue 測度})$  に同型となる。以下、群作用といったらこのようなもののみを考え、いちいち可測性について注意しないことにしよう。保測作用の例としては、 $\text{SL}(n, \mathbb{Z})$  の  $n$  次元トーラス  $T^n$  上の線形作用  $\text{SL}(n, \mathbb{Z}) \curvearrowright T^n$  や、群  $\Gamma$  の Bernoulli シフト作用  $\Gamma \curvearrowright [0, 1]^\Gamma$  といったものが挙げられる。群作用  $\Gamma \curvearrowright X$  は自然に  $X$  の上に軌道同値関係  $\mathcal{R}_{\Gamma \curvearrowright X}$  を引き起こす。

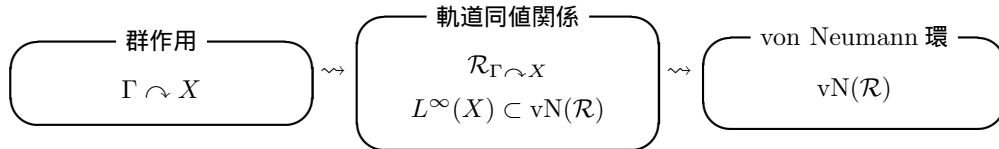
$$\mathcal{R}_{\Gamma \curvearrowright X} = \{(x, s \cdot x) : x \in X, s \in \Gamma\} \subset X \times X.$$

この同値関係は測度付き亜群の一例である。群作用がエルゴード的であるとき、即ち同値関係  $\mathcal{R}_{\Gamma \curvearrowright X}$  で閉じた可測集合が零または全測度集合に限るとき、同値関係はエルゴード的であるという。群作用  $\Gamma \curvearrowright X$  と  $\Lambda \curvearrowright Y$  が軌道同型であるとは、引き起こされる軌道同値関係が同型なときをいう。つまり、保測本質的全単射  $F: X \rightarrow Y$  で

$$(x, y) \in \mathcal{R}_{\Gamma \curvearrowright X} \iff (F(x), F(y)) \in \mathcal{R}_{\Lambda \curvearrowright Y}$$

となるものがあるときをいう。「本質的」とは  $X$  や  $Y$  の零集合を無視してもよいことを意味する。零集合を無視しないより厳しい軌道同型は Borel 軌道同型と呼ばれ、記述的集合論において研究されている。

確率空間  $X$  上の軌道同値関係 (あるいはもっと一般の同値関係)  $\mathcal{R}$  から, 軌道同値関係 von Neumann 環  $\mathrm{vN}(\mathcal{R})$  というものが作られる. 同値関係  $\mathcal{R}$  がエルゴード的であるとき, またそのときに限り, von Neumann 環  $\mathrm{vN}(\mathcal{R})$  は因子環となる. von Neumann 環  $\mathrm{vN}(\mathcal{R})$  は関数環  $L^\infty(X, \mu)$  を, Cartan 部分環と呼ばれる, 特別な位置に含んでおり, 軌道同値関係  $\mathcal{R}$  から von Neumann 環のペア  $L^\infty(X, \mu) \subset \mathrm{vN}(\mathcal{R})$  への対応は 1 対 1 となっている ([9]). つまり, von Neumann 環  $\mathrm{vN}(\mathcal{R})$  において, 抽象的に与えられた Cartan 部分環を  $L^\infty(X, \mu)$  と同定することは, von Neumann 環  $\mathrm{vN}(\mathcal{R})$  から軌道同値関係  $\mathcal{R}$  の情報を復元することに等しい. 群作用  $\Gamma \curvearrowright X$  が本質的に自由<sup>4)</sup> であるときは, 軌道同値関係  $\mathcal{R}_{\Gamma \curvearrowright X}$  は測度付き変換群  $X \rtimes \Gamma$  と同じものになり, 上記構成法は Murray–von Neumann による群測度 von Neumann 環の構成法に一致する. このとき,  $\mathrm{vN}(\mathcal{R}_{\Gamma \curvearrowright X})$  は通常,  $L^\infty(X, \mu) \rtimes \Gamma$  と書かれる. 今後, 群  $\Gamma$  の情報が軌道同値関係  $\mathcal{R}_{\Gamma \curvearrowright X}$  によく反映されることを期待して, 群作用  $\Gamma \curvearrowright X$  は本質的に自由であると仮定する. 以上のことを図にまとめると以下のようになる.



異なる群の作用が軌道同型になることは頻繁に起こるし, 異なる軌道同値関係から同型な  $\mathrm{II}_1$  型因子環ができてしまうこともある ([6]). そこで, どのような状況において, von Neumann 環  $\mathrm{vN}(\mathcal{R})$  から軌道同値関係  $\mathcal{R}_{\Gamma \curvearrowright X}$  の情報が, あるいは軌道同値関係  $\mathcal{R}_{\Gamma \curvearrowright X}$  から群作用  $\Gamma \curvearrowright X$  の情報が, どれくらい取り出せるか? というのがこの分野の研究主題である. 特に, von Neumann 環  $\mathrm{vN}(\mathcal{R})$  が群  $\Gamma$  と作用  $\Gamma \curvearrowright X$  の情報を完全に覚えているような, von Neumann 超頑固<sup>5)</sup> と呼ばれる例を探すのが課題である.<sup>6)</sup> 群作用を考えずに, 群 von Neumann 環  $L\Gamma$  からどれくらい群  $\Gamma$  の情報を取り出せるか? というものもある. 例えば, 同値関係や von Neumann 環にも従順性の概念があり (超有限や漸近的有限次元とも呼ばれる),

- (1) 群  $\Gamma$  が従順である.
- (2) 群 von Neumann 環  $L\Gamma$  が従順である.
- (3) ある/すべての作用  $\Gamma \curvearrowright X$  に対して, 同値関係  $\mathcal{R}_{\Gamma \curvearrowright X}$  が従順である.
- (4) ある/すべての作用  $\Gamma \curvearrowright X$  に対して,  $\mathrm{vN}(\mathcal{R}_{\Gamma \curvearrowright X})$  が従順である.

の 4 条件は同値であることが知られている ([20, 47]). より著しく, 以下の事実が知られている.

定理 3 (Connes 1976 [3]) 従順な  $\mathrm{II}_1$  型因子環はすべて同型.

この定理のエルゴード理論版は, エルゴード的で従順な軌道同値関係  $\mathcal{R}_{\Gamma \curvearrowright X}$  はすべて同型, さらに従順因子環の Cartan 部分環は唯一, というものになる ([34, 5]). つまり, 群  $\Gamma$  が従順な場合, 群 von Neumann 環  $L\Gamma$  や群測度 von Neumann 環  $\mathrm{vN}(\mathcal{R}_{\Gamma \curvearrowright X})$  は, 群  $\Gamma$  が従順であったということ以外何も憶えていないということになる. 従順群は可解群すべてを含むそれなりに大きなクラスであるが, それをまったく見分けられないのであれば von Neumann 環はたいした情報を持っていないのではないかと思うかもしれない. しかし 2000 年の Popa ([42]) によるブレイクスルー以来, 非従順な世界ではまったく事情が異なるということが分かってきた. Popa は与えられた von Neumann 環の適当な性質を持つ部分環の位置を特定する方法を発見し,  $\mathrm{II}_1$  型因子環  $\mathrm{vN}(\mathcal{R}_{\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \curvearrowright T^2})$  の HT という性質を持つ Cartan 部分環は  $L^\infty(T^2, \mu)$  に限ることを示した. これにより,  $\mathrm{II}_1$  型因子環

$\text{vN}(\mathcal{R}_{\text{SL}(2, \mathbb{Z}) \curvearrowright T^2})$  の研究はより扱いやすい軌道同値関係  $\mathcal{R}_{\text{SL}(2, \mathbb{Z}) \curvearrowright T^2}$  の解析に帰着できるようになり、基本群と呼ばれる Murray–von Neumann ([32]) が定義した不変量がこの  $\text{II}_1$  型因子環に対して計算された。結果、この不変量が消える初めての例が見つかったのである。さらに最近、Cartan 部分環の位置を特定する方法が見つかり、軌道同値関係から von Neumann 環への対応が 1 対 1 となるような例が多く見つかった ([39])。その結果、例えば、射有限作用  $\text{SL}(2, \mathbb{Z}) \curvearrowright \varprojlim (\mathbb{Z}/k_1 \cdots k_n \mathbb{Z})^2$  から得られる  $\text{II}_1$  型因子環は自然数列  $(k_n)$  を取り替えることにより非可算無限個の非同型な因子環を得られることなどが分かった。こうした群測度 von Neumann 環の性質を詳しく調べるために、第 7 章で述べた Haagerup の性質や弱従順性といった性質が有効に使われるのである。

### 群 von Neumann 環

Connes の定理により従順な群因子環はすべて同型だが、von Neumann 環論における最大の問題は、自由群  $F_r$  の群因子環  $LF_r$  の同型類が  $r = 2, 3, \dots$  に依存するか？ というものである。Voiculescu はこの問題を解くために自由確率論を創ったが、未だに決定的な結果は得られていない。（例えば、 $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$  が可算無限従順群のとき、自由積群因子環  $L(\Gamma_1 * \cdots * \Gamma_n)$  は自由群因子環  $LF_n$  に同型であるとか、自由群因子環  $LF_r$ ,  $r = 2, 3, \dots, \infty$  はすべて同型かすべて非同型のいずれかであるというようなことが分かった。）この問題に関連して、次のようなことが分かっている ([38, 35, 41, 8])。特に (2) と (3) は相反する結果であり、自由群因子環の同型問題の見通しを複雑にしている。

(1)  $L(\prod_{i=1}^m F_{r(i)}) \hookrightarrow L(\prod_{j=1}^n F_{s(j)}) \Rightarrow m \leq n$ .

(2) 非自明な直積に分解する ICC 群  $\Gamma_i$ ,  $\Lambda_j$  が同型な自由積因子環  $L(*_{i=1}^m \Gamma_i) \cong L(*_{j=1}^n \Lambda_j)$  を持てば、 $m = n$  であり、順番を入れ替えて  $L\Gamma_i \cong L\Lambda_i$  とできる。

(3)  $L(F_\infty * (F_\infty \times \mathbb{Z})^{*n})$ ,  $n = 1, 2, \dots$  はすべて同型。

上記の (2) で自由積を融合積に置き換えた結果もあり、そのような例を使って外部自己同型が存在しない  $\text{II}_1$  型因子環の存在が示されている ([24])。そのような  $\text{II}_1$  型因子環が存在するか否かは、 $\text{II}_1$  型因子環の研究が始まって以来の大問題であった。ここでは触れていない多くの研究者の努力の結果、最近では従順性が絡まない限り群 von Neumann 環は基本的に非同型なのではないかという雰囲気になってきた。しかしながら、 $L\Gamma$  から  $\Gamma$  を復元できるような超頑固な例、つまり  $\forall \Lambda (L\Gamma \cong L\Lambda \Rightarrow \Gamma \cong \Lambda)$  が成り立つような群  $\Gamma$  の例はまだ知られていない。Zimmer の超剛性定理 ([51]) に触発された Connes 予想によれば、 $\text{SL}(n \geq 3, \mathbb{Z})$  などの高階格子はみなそうだとされるが、現時点では証明の手がかりすらない状況である。

## 9 測度論的群論

測度論的群論は、群をその測度空間への保測作用を利用して研究する分野である。こうした問題意識はとても古くからあったが、独立した分野として認識されるようになったのはごく最近のことである。測度論的群論については既に多くの概説 ([13, 48, 11, 29]) が書かれているので、詳しくはそちらを参照してほしい。本稿ではまず、軌道同値関係  $\mathcal{R}_{\Gamma \curvearrowright X}$  がどの程度、もとの群  $\Gamma$  と作用  $\Gamma \curvearrowright X$  の情報を維持しているか？ という問題について考える。前章で述べたように、エルゴード的で従順な軌道同値関係はすべて同型であった。この現象の対極に、軌道同値関係  $\mathcal{R}_{\Gamma \curvearrowright X}$  から、もとの群  $\Gamma$  と作用  $\Gamma \curvearrowright X$  をすべて復元できる超頑固な例が存在する。最初に見つかった超頑固な作用の例として  $\text{SL}(n, \mathbb{Z}) \curvearrowright T^n$ ,  $n \geq 3$  が挙げられる ([10])。他にも Kazhdan の性質 (T) を持つ群  $\Gamma$  の Bernoulli シ

フト作用  $\Gamma \curvearrowright [0, 1]^\Gamma$  や、写像類群の任意のエルゴード的保測作用は超頑固であることが知られている ([43, 28]). こうした定理を示すには測度論的コサイクルが使われる. 本質的に自由な保測作用  $\Gamma \curvearrowright X$  と  $\Lambda \curvearrowright Y$  が軌道同型であるとし、保測本質的全単射  $F: X \rightarrow Y$  で

$$(x, y) \in \mathcal{R}_{\Gamma \curvearrowright X} \iff (F(x), F(y)) \in \mathcal{R}_{\Lambda \curvearrowright Y}$$

を満たすものをとる. このとき、各  $s \in \Gamma$  と  $x \in X$  に対して、

$$F(s \cdot x) = \alpha(s, x) \cdot F(x)$$

となる  $\alpha(s, x) \in \Lambda$  がとれる. しかも本質的に自由であるとの仮定より、 $\alpha(s, x)$  は本質的に一意である. 従って、 $\alpha: \Gamma \times X \rightarrow \Lambda$  はコサイクル関係式

$$\alpha(s, t \cdot x) \alpha(t, x) = \alpha(st, x)$$

を満たす. 別の言葉でいえば、 $\alpha$  は変換亜群  $\Gamma \times X$  から群  $\Lambda$  への準同型写像である. このコサイクルを軌道同型コサイクルと呼ぶことにする. 可測関数  $\varphi: X \rightarrow \Lambda$  に対し、 $\beta(s, x) = \varphi(s \cdot x) \alpha(s, x) \varphi(x)^{-1}$  は再びコサイクルとなる. このようにして得られるコサイクルはもとのコサイクルと同値であるといわれる. 各  $s \in \Gamma$  に対して関数  $X \ni x \mapsto \beta(s, x) \in \Lambda$  が本質的に定数であるようなコサイクル  $\beta$  は  $\Gamma$  から  $\Lambda$  への準同型写像と見なせる. Zimmer の定理 ([51]) によれば<sup>7)</sup>、軌道同型コサイクル  $\alpha$  が  $\Gamma$  から  $\Lambda$  への準同型写像  $\beta$  に同値ならば、 $\beta$  は実は同型写像であり、ふたつの群作用  $\Gamma \curvearrowright X$  と  $\Lambda \curvearrowright Y$  とは共役となるのである. Popa ([43]) は、Kazhdan の性質 (T) を持つ群  $\Gamma$  の Bernoulli シフト作用  $\Gamma \curvearrowright [0, 1]^\Gamma$  の任意のコサイクル  $\alpha: \Gamma \times [0, 1]^\Gamma \rightarrow \Lambda$  は準同型写像に同値であるという極めて強力な定理を示している. この定理の証明には von Neumann 環論が縦横に使われているが、結果自体は純粋にエルゴード理論のものであり、エルゴード理論のみならず記述的集合論などへの応用も存在する.

軌道同値関係  $\mathcal{R}_{\Gamma \curvearrowright X}$  の不変量には本稿で扱った従順性、完全性、弱従順性、基本群などのほかに、Cheeger–Gromov が離散群に対して定義した  $\ell_2$ -Betti 数などが存在する. 軌道同値関係にも  $\ell_2$ -Betti 数が定義でき、 $\beta_i^{(2)}(\mathcal{R}_{\Gamma \curvearrowright X}) = \beta_i^{(2)}(\Gamma)$  となるのである ([12]). この事実から特に、従順群の  $\ell_2$ -Betti 数はすべて 0 であるというよく知られた定理がすぐに従う.

第 4 章で述べたように、非従順群は自由群  $F_2$  を部分群として含むかという von Neumann の問題は否定的に解決したが、測度論的群論な立場に立つと肯定的に解決するという驚くべき結果が最近になって Gaboriau–Lyons ([14]) によって示された. 即ち、群  $\Gamma$  に対して以下の 2 条件が同値である.

(1)  $\Gamma$  は非従順である.

(2)  $\Gamma$  の Bernoulli シフト作用の軌道同値関係  $\mathcal{R}_{\Gamma \curvearrowright [0, 1]^\Gamma}$  は自由群  $F_2$  による本質的に自由な作用の軌道同値関係  $\mathcal{R}_{F_2 \curvearrowright Y}$  を含む.

この事実から、 $\Gamma$  が非従順であれば、上で述べた方法で「単射的」コサイクル  $\alpha: F_2 \times Y \rightarrow \Gamma$  を作ることができる. これをコサイクルに無関係な定式化をすれば、以下になる. 群  $\Lambda$  から  $\Gamma$  のへの写像で単位元を単位元にうつすもの全体を  $[\Lambda, \Gamma] \subset \Gamma^\Lambda$  と書き、 $\Lambda$  の  $[\Lambda, \Gamma]$  上の作用を

$$(s \cdot f)(t) = f(ts) f(s)^{-1}$$

として定める. コサイクル  $\alpha: F_2 \times Y \rightarrow \Gamma$  に対して、写像  $Y \ni y \mapsto \alpha(\cdot, y) \in [\Lambda, \Gamma]$  による  $Y$  の確

率測度の押し出しは  $[\Lambda, \Gamma]$  上の  $\Lambda$ -不変な Borel 確率測度となる。<sup>8)</sup> このような  $[\Lambda, \Gamma]$  上の  $\Lambda$ -不変な Borel 確率測度は  $\Lambda$  から  $\Gamma$  へのランダム準同型と呼ばれる ([30]). ちなみに, 確定的ランダム準同型, つまり測度が一点に集中しているランダム準同型は単なる準同型の概念と一致する. Gaboriau–Lyons の定理は,  $\Gamma$  が非従順であることと, 自由群  $F_2$  から  $\Gamma$  への単射ランダム準同型が存在することとが同値であることを意味する. 群に関する関数解析的な問題のいくつかでは, 従順群に関しては肯定的な解答を持ち, 自由群を含む群に対しては否定的な解答を持つが, 残りの群に対してはよく分からないということが起こる. Gaboriau–Lyons の定理はそのような問題に対して応用できるであろうと期待される (例えば, [31] 参照).

## 注 釈

- 1) 分野によってはより厳密に半正定値と呼ばれる.
- 2)  $\mathcal{M}_1(\Gamma)$  上で  $\mu_n \rightarrow \mu$  (各点収束) としたとき, 関数列  $\mu_n + \mu - |\mu_n - \mu|$  に Fatou の補題を使う.
- 3) あくまでも「原理的には」ということですが.
- 4) 単位元でない任意の  $s \in \Gamma$  に対して  $\mu(\{x : sx = x\}) = 0$  が成り立つ
- 5) 「superrigid」の訳語である. 通常は「超剛的」と訳すのであろうが, 従順と対比するため「頑固」と訳してみた.
- 6) ごく最近, 見つかったとのアナウンスがあった.
- 7)  $\Gamma$  は非自明な有限正規部分群を持たないとする.
- 8) 実際に確かめてください.

## 文 献

- [1] P. Baum, A. Connes and N. Higson; Classifying space for proper actions and  $K$ -theory of group  $C^*$ -algebras.  $C^*$ -algebras: 1943–1993 (San Antonio, TX, 1993), 240–291, Contemp. Math., 167, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
- [2] N.P. Brown and N. Ozawa;  $C^*$ -algebras and finite-dimensional approximations. Graduate Studies in Mathematics, 88. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.
- [3] A. Connes; Classification of injective factors. Cases  $\text{II}_1$ ,  $\text{II}_\infty$ ,  $\text{III}_\lambda$ ,  $\lambda \neq 1$ . Ann. of Math. (2) **104** (1976), 73–115.
- [4] A. Connes; Noncommutative geometry. Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1994.
- [5] A. Connes, J. Feldman and B. Weiss; An amenable equivalence relation is generated by a single transformation. Ergodic Theory Dynamical Systems **1** (1981), 431–450 (1982).
- [6] A. Connes and V. Jones; A  $\text{II}_1$  factor with two nonconjugate Cartan subalgebras. Bull. Amer. Math. Soc. **6** (1982), 211–212.
- [7] M. Cowling and U. Haagerup; Completely bounded multipliers of the Fourier algebra of a simple Lie group of real rank one. Invent. Math. **96** (1989), 507–549.
- [8] K. Dykema; Free products of hyperfinite von Neumann algebras and free dimension. Duke Math. J. **69** (1993), 97–119.
- [9] J. Feldman and C. C. Moore; Ergodic equivalence relations, cohomology, and von Neumann algebras. I, II. Trans. Amer. Math. Soc. **234** (1977), 289–359.
- [10] A. Furman; Gromov’s measure equivalence and rigidity of higher rank lattices. Ann. of Math. (2) **150** (1999), 1059–1081.
- [11] A. Furman; A survey of Measured Group Theory. Preprint. arXiv:0901.0678
- [12] D. Gaboriau, Invariants  $l^2$  de relations d’équivalence et de groupes. Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. No. **95** (2002), 93–150.
- [13] D. Gaboriau; On orbit equivalence of measure preserving actions. Rigidity in dynamics and geometry (Cambridge, 2000), 167–186, Springer, Berlin, 2002.
- [14] D. Gaboriau and R. Lyons; A measurable group-theoretic solution to von Neumann’s problem. Invent. Math., to appear.
- [15] M. Gromov; Asymptotic invariants of infinite groups. Geometric group theory, Vol. 2 (Sussex, 1991), 1–295, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 182, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
- [16] M. Gromov; Random walk in random groups. Geom. Funct. Anal. **13** (2003), 73–146.
- [17] E. Guentner, N. Higson and S. Weinberger; The Novikov conjecture for linear groups. Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. No. **101** (2005), 243–268.
- [18] U. Haagerup; An example of a nonnuclear  $C^*$ -algebra, which has the metric approximation property. Invent. Math. **50** (1978/79), 279–293.
- [19] U. Hamenstädt; Geometric properties of the mapping class group. Problems on mapping class groups and related topics, 215–232, Proc. Sympos. Pure Math., 74, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.
- [20] J. Hakeda and J. Tomiyama; On some extension properties of von Neumann algebras. Tôhoku Math. J. (2) **19** (1967) 315–323.
- [21] N. Higson and G. Kasparov;  $E$ -theory and  $KK$ -theory for groups which act properly and isometrically on Hilbert space. Invent. Math. **144**

- (2001), 23–74.
- [22] N. Higson and J. Roe; Analytic  $K$ -homology. Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press, Oxford, 2000.
- [23] G. Hjorth; Classification and orbit equivalence relations. Mathematical Surveys and Monographs, 75. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.
- [24] A. Ioana, J. Peterson and S. Popa; Amalgamated free products of weakly rigid factors and calculation of their symmetry groups. Acta Math. **200** (2008), 85–153.
- [25] G. Kasparov; Operator  $K$ -theory and its applications: elliptic operators, group representations, higher signatures,  $C^*$ -extensions. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Warsaw, 1983), 987–1000, PWN, Warsaw, 1984.
- [26] A. S. Kechris and B. D. Miller; Topics in orbit equivalence. Lecture Notes in Mathematics, 1852. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [27] Y. Kida; The mapping class group from the viewpoint of measure equivalence theory. Mem. Amer. Math. Soc. **196** (2008), no. 916.
- [28] Y. Kida; Measure equivalence rigidity of the mapping class group. Ann. of Math. (2), to appear.
- [29] 木田良才; 岩波「数学」論説.
- [30] N. Monod; An invitation to bounded cohomology. International Congress of Mathematicians. Vol. II, 1183–1211, Eur. Math. Soc., Zürich, 2006.
- [31] N. Monod and N. Ozawa; The Dixmier problem, lamplighters and Burnside groups. Preprint.
- [32] F. J. Murray and J. von Neumann; On rings of operators. IV. Ann. of Math. (2) **44**, (1943). 716–808.
- [33] A. Yu. Ol'shanskii; On the question of the existence of an invariant mean on a group. Uspekhi Mat. Nauk **35** (1980), 199–200.
- [34] D. S. Ornstein and B. Weiss; Ergodic theory of amenable group actions. I. The Rohlin lemma. Bull. Amer. Math. Soc. **2** (1980), 161–164.
- [35] N. Ozawa; A Kurosh type theorem for type  $II_1$  factors. Int. Math. Res. Not. **2006**, Art. ID 97560, 21 pp.
- [36] N. Ozawa; Amenable Actions And Applications. International Congress of Mathematicians. Vol. II, 1563–1580, Eur. Math. Soc., Zürich, 2006.
- [37] N. Ozawa; Weak amenability of hyperbolic groups. Groups Geom. Dyn. **2** (2008), 271–280.
- [38] N. Ozawa and S. Popa; Some prime factorization results for type  $II_1$  factors. Invent. Math. **156** (2004), 223–234.
- [39] N. Ozawa and S. Popa; On a class of  $II_1$  factors with at most one Cartan subalgebra. Ann. of Math. (2), to appear.
- [40] A. L. T. Paterson; Amenability. Mathematical Surveys and Monographs, 29. American Mathematical Society, Providence, RI, 1988.
- [41] J. Peterson;  $L^2$ -rigidity in von Neumann algebras. Invent. Math. **175** (2009), 417–433.
- [42] S. Popa; On the fundamental group of type  $II_1$  factors. Proc. Natl. Acad. Sci. USA **101** (2004), 723–726.
- [43] S. Popa; Strong rigidity of  $II_1$  factors arising from malleable actions of  $w$ -rigid groups, I, II. Invent. Math. **165** (2006), 369–408, 409–451.
- [44] S. Popa; Deformation and rigidity for group actions and von Neumann algebras. International Congress of Mathematicians. Vol. I, 445–477, Eur. Math. Soc., Zürich, 2007.
- [45] J. Roe; Lectures on coarse geometry. University Lecture Series, 31. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
- [46] J. Rosenberg;  $C^*$ -algebras, positive scalar curvature, and the Novikov conjecture. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. **58** (1983), 197–212.
- [47] S. Sakai; On the hyperfinite  $II_1$ -factor. Proc. Amer. Math. Soc. **19** (1968) 589–591.
- [48] Y. Shalom; Measurable group theory. European Congress of Mathematics, 391–423, Eur. Math. Soc., Zürich, 2005.
- [49] M. Takesaki; Theory of operator algebras. I, II, III. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 124, 125, 127. Operator Algebras and Noncommutative Geometry, 5, 6, 8. Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [50] J. Tits; Free subgroups in linear groups. J. Algebra **20** (1972), 250–270.
- [51] R.J. Zimmer; Ergodic theory and semisimple groups. Monographs in Mathematics, 81. Birkhäuser Verlag, Basel, 1984.

( 年 月 日提出)

(おざわ なるたか・東京大学大学院数理科学研究科)