2014年度後期 解析学演義 II （演習クラス）　2014.11.24.　担当：岸本展

【問題の訂正・コメント等】　訂正部分は赤字，コメントや追加のヒントは青字で示します．

問 C-101.　... $F \in C(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ とするとき，...
※ C_c^∞ は C^∞ 級で台がコンパクトな関数を表します．

問 C-103.

$$(t+3-u)\frac{du}{dt} = t-1-u.$$

※元のままではきれいに計算できないようです．

問 C-104.

$$\frac{du}{dt} + t\,(u-1)^2 - \frac{u-1}{2} = 0.$$

※元のままでは積分が計算できないようです．

問 C-108.
※平衡点の位置と，$(\pm1,0)$, $(0,\pm1)$, $(\pm1,\pm1)$ の 8 点を通る解軌道（解曲線）を描いてくれれば十分です．なお，(iii) では，$a=0$ の場合との違いが分かるように描いてもらえればベストです．

問 C-111.
※ λ を横軸，平衡点の位置を縦軸にとり，平衡点を示す（いくつかの）曲線を描いてください．その際，平衡点が安定な場合と不安定な場合で色分けしてください．各 λ に対していくつの平衡点がどの順番で並んでいるかが分かればよいので、曲線は概形で構いません．

問 C-113.
※ Green 関数の定義はテキストによって違う可能性がありますが，要は Green 関数を使って境界値問題を解いてくれれば OK です．

問 C-115.　(ii) 平衡点 $(1,1)$ を除く (u,v)-平面の第 1 象限内の点を初期値とする ...

問 C-204.　(ii) $\lambda > 0$ のとき，平衡点 $\binom{1}{0}$ は漸近安定であることを示せ．

問 C-205. 1 次元常微分方程式 $\frac{d^2u}{dt^2} = u - u^3$ の定数でない解 $u(t)$ で，初期条件 $\frac{du}{dt}(0) = 0$ および境界条件 $\lim_{t\to\pm\infty} u(t) = 0$ をみたすものを一つ求めよ．
※ヒント：$u(0)$ の値を決めれば初期値問題の解の一意性より解が定まりますが，前問 (i) と同様の図を描くことにより，解が問題の条件をみたすような $u(0)$ の選び方は本質的に一通りしかないことがわかります．

問 C-206.　(iii) $\varepsilon > 0$ を任意にとり，I の部分集合

$$\Omega_\varepsilon = \left\{ t \in I \,\middle|\, u(t) \le (A+\varepsilon)\, e^{\int_0^t B(s)\,ds} \right\}$$

を考える．Ω_ε は（I 上の相対位相で）開かつ閉となる連結成分をもつことを示し，$\Omega_\varepsilon = I$ を結論する．

問 C-207. ... また，前問に対しては非負とは限らない一般の $B \in C(I;\mathbb{R})$ の場合に (3) は正しいか．証明または反例を与えよ．

※反例があると思ったのですが計算が間違っていたので，このように変更しました．

問 C-208.

※ヒント：後半は前半の議論に少し摂動を加えればできると思いましたが，難しいようです．時間を反転させて前半と似た議論を行うと示せそうです．

問 C-210.

※ヒント：(i) が成り立たない場合に (ii) を示すのがなかなか難しいと思いますが，微分形の Gronwall の不等式（**問 C-207**）において関数 u が非負であるという仮定は実は不要で，これを使うと比較的楽に示せます．

問 C-211.

※縮小写像の不動点の一意性だけでは解の一意性を示すには不十分です．時刻 $t_0 \pm \delta$ に達するまでに考えている空間領域（例えば $\overline{B^n_{2R}(x_0)}$）から出てしまうような解がないことを示す必要があります．

問 C-213.

※ヒント：(iii) 時刻 $T > 0$ まで解が存在したとして，$\left(u(T), \frac{du}{dt}(T)\right) \in B^2_{\varepsilon'}(0)$ ならば**問 C-211** より解が少しの時間 $T_0 = T_0(\varepsilon')$ だけ延長できます．この際，何も条件がなければ解は $B^2_{\varepsilon'}(0)$ を出てしまい，$\left(u(T+T_0), \frac{du}{dt}(T+T_0)\right) \in B^2_{2\varepsilon'}(0)$ であることしかわかりませんが，(i), (ii) を使うと（$2\varepsilon' \leq \delta$ であれば）$\left(u(T+T_0), \frac{du}{dt}(T+T_0)\right)$ の大きさが初期値の大きさでコントロールでき，ε が十分小さければ再び $\left(u(T+T_0), \frac{du}{dt}(T+T_0)\right) \in B^2_{\varepsilon'}(0)$ となります．ε をうまく選ぶのがポイントです．

問 C-215.

※エネルギー保存則：$K(t) + V(t) = \text{constant}$ は比較的簡単にわかります．(従って，$V(t)$ も有界なので粒子は衝突しません．）しかし，本問はエネルギー保存則とは独立な別の等式と関係しています．

問 C-301. $F, G \in C(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ は（大域的）Lipschitz 連続で，$F(0) = 0$ かつ F の Lipschitz 定数は 1 より真に小さいとする．さらに，F は原点で微分可能（即ち，F の各成分が $\mathbb{R}^n$ の原点で全微分可能）とする．このとき，ある定数 $T > 0$ に対して，...（中略）... また，この解は $u(0) = 0$ とおくことにより $C^1([0,T];\mathbb{R}^n)$ に属することを示し，$\frac{du}{dt}(0)$ を G, F の値およびその微分係数を用いて表せ．［ヒント：$C([0,T];\mathbb{R}^n)$ の部分集合 ...（以下略）

※ F の微分可能性がなくても前半（解の一意存在）は証明できますが，解が $C^1([0,T];\mathbb{R}^n)$ に拡張できるためには F の原点での微分可能性が必要です．解の一意性については，今の場合ある時刻での初期値を指定しているわけではないので，**問 C-211** のような初期値問題に関する定理は適用できません．$\frac{du}{dt}(0)$ は，ある行列 A およびベクトル b によって $A^{-1}b$ の形に書ける，というところまで示してもらえれば OK です．一般には $\frac{du}{dt}(0) = G(0)$ とはなりませんが，$DF(0) = O$ ならそうなります．

問 C-302. (i) 任意の $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$ に対し，$\|e^{tL}x\| \leq e^{-\sigma t}\|x\|$ を示せ．

(ii) は削除．

※ (ii) はこのままでは一般には成り立ちませんので，適当に修正して (iii) で使ってください．

※ヒント：(i) はいろいろなやり方がありますが，$u(t) := e^{tL}x$ が常微分方程式 $\frac{du}{dt} = Lu$, $u(0) = x$ の解であることに着目し，Gronwall の不等式を用いると簡単です．(iii) は前問と同様に，$C([0,\infty);\mathbb{R}^n)$ の適当な部分空間で解を構成します．