数理モデルに現れる微分方程式　-発見的解法のすすめ-

大木谷耕司 (京大数理研)

8 July 2022, 全学共通: 現代の数学と数理解析

1. はじめに

2. いくつかの例

3. 結びにかえて

1．はじめに
ここで用いる数学的技巧は簡単で次の通りである:

1階非同次常微分方程式

$$\frac{dy}{dt} = ay + f(t),\ y(0) = C.$$

外力 $f(t)$ がない場合

$$y(t) = Ce^{at}.$$

外力 $f(t)$ がある場合は、定数変化法により

$$y(t) = \underbrace{Ce^{at}}_{\substack{\text{同次方程式}\\\text{の一般解}}} + \underbrace{\int_0^t e^{a(t-s)} f(s)ds}_{\substack{\text{非同次方程式}\\\text{の特殊解}}}.$$

別の見方:

$$\left(\frac{d}{dt} - a\right) y = f(t)$$

カギとなる恒等式*は

$$\boxed{e^{at}\frac{d}{dt}e^{-at} = \frac{d}{dt} - a}$$

つまり

$$\left(\frac{d}{dt} - a\right)^{-1} = e^{at}\int_0^t ds e^{-as}.$$

$*)\quad e^{at}\frac{d}{dt}\left(e^{-at}\phi\right) = \frac{d\phi}{dt} - a\phi,\ \forall\phi$ の意味

$$
\begin{tikzcd}
y(t) \arrow[r, "\frac{d}{dt}-a"] \arrow[d, "\exp(-at)"'] & f(t) \\
* \arrow[r, "\frac{d}{dt}"'] & * \arrow[u, "\exp(at)"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
y(t) & f(t) \arrow[l] \arrow[d, "\exp(-at)"] \\
* \arrow[u, "\exp(at)"] & * \arrow[l, "\int_0^t ds"]
\end{tikzcd}
$$

これらの考え方の偏微分方程式版がある。
(指数演算子、” 定数変化法”)

2. いくつかの例

熱拡散方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \triangle u$$

$$\text{初期値}\quad u(\boldsymbol{x}, t=0) = u_0(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{Laplacian}\quad \triangle \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

$$\text{形式的に}\quad u(\boldsymbol{x}, t) = e^{\nu t \triangle} u_0$$

どういう意味？ 半群理論

例 1: 熱拡散方程式 (放物型)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

の解を

$$u = \exp\left(\nu t \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u_0(x)$$

と記号的に書く. Gauss積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}$$

で, 積分変数を $z \to z - l$ と置換する

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2+2zl}dz = \sqrt{\pi}e^{l^2}}$$

ここで定数lを、微分演算子で置き換えれば　$l = \sqrt{\nu t}\frac{\partial}{\partial x}$

$$u = e^{\nu t \partial_x^2} u_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2+2z\sqrt{\nu t}\partial_x} u_0(x) dz$$

が得られる．Forsyth(1885) 後は，シフト演算子 $e^{h\partial_x} f(x) = f(x+h)$を考慮して

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} u_0(x + 2z\sqrt{\nu t}) dz = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\nu t}} u_0(y) dy$$

となる．Fourier解析

熱核:

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}}e^{-\frac{x^2}{4\nu t}}$$

n 次元では、直積となる。

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}}e^{-\frac{x_1^2}{4\nu t}}\frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}}e^{-\frac{x_2^2}{4\nu t}}\cdots\frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}}e^{-\frac{x_n^2}{4\nu t}}=\frac{1}{(4\pi\nu t)^{n/2}}e^{-\frac{|\boldsymbol{x}|^2}{4\nu t}}$$

この関数は数学のあらゆる分野に現れる。J. Jorgensen and S. Lang (2012)

Duhamel 原理

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu\triangle\right) u = f(\boldsymbol{x})$$

$$e^{\nu t\triangle}\frac{\partial}{\partial t}e^{-\nu t\triangle} = \frac{\partial}{\partial t} - \nu\triangle$$

により

$$u(\boldsymbol{x}, t) = e^{\nu t\triangle}u_0(\boldsymbol{x}) + \int_0^t e^{\nu(t-s)\triangle}f(\cdot)ds,$$

ここで

$$e^{\nu t\triangle}\phi(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} G_t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\phi(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y},$$

$$G_t(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(4\pi\nu t)^{n/2}}\exp\left(-\frac{|\boldsymbol{x}|^2}{4\nu t}\right).$$

$$
\begin{tikzcd}
u \arrow[r, "\frac{\partial}{\partial t} - \nu\triangle"] \arrow[d, "\exp(-\nu\triangle t)"'] & f(\boldsymbol{x}) \\
* \arrow[r, "\frac{\partial}{\partial t}"'] & * \arrow[u, "\exp(\nu\triangle t)"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
u & f(\boldsymbol{x}) \arrow[l] \arrow[d, "\exp(-\nu\triangle t)"] \\
* \arrow[u, "\exp(\nu\triangle t)"] & * \arrow[l, "\int_0^t ds"]
\end{tikzcd}
$$

例2: Poisson 方程式(楕円型)

$$\triangle u = -\phi(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$$

(方針)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \triangle u + f(\boldsymbol{x})$$

の定常解を求め、$f = \nu\phi$ とおく。

Duhamel の原理から

$$u(\boldsymbol{x}, t) = e^{\nu t \triangle} u_0 + \int_0^t e^{\nu(t-s)\triangle} f(\cdot) ds$$

ここで

$$e^{\nu t \triangle} f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(4\pi\nu t)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \exp\left(-\frac{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^2}{4\nu t} \right) f(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}$$

第１項　$\to 0$

$$\text{第２項は}\quad \int_0^t ds \frac{1}{(4\pi\nu(t-s))^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \exp\left(-\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2}{4\nu(t-s)}\right) f(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}$$

$$= \int_0^t d\tau \frac{1}{(4\pi\nu\tau)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \exp\left(-\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2}{4\nu\tau}\right) f(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}$$

積分順序を入れ替え、$t \to \infty$とする.

$$F(\boldsymbol{X}) \equiv \int_0^\infty \frac{1}{(4\pi\nu\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{|\boldsymbol{X}|^2}{4\nu\tau}\right) d\tau = \frac{1}{4\pi\nu|\boldsymbol{X}|}$$

なので

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\phi(\boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} dy = G * \phi, \quad G(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}.$$

(別解)
恒等式

$$\boxed{\frac{1}{a} = \int_0^\infty e^{-at} dt, \quad (a > 0)}$$

において、定数　a を $a \to -\triangle$ と置き換える:

$$u(\boldsymbol{x}) = (-\triangle)^{-1}\phi = \int_0^\infty e^{t\triangle}\phi(\boldsymbol{x})dt.$$

後は同じ。

cf.

$$u(\boldsymbol{x}) = \mathbb{E}\left(\int_0^\infty \phi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{W}_\tau)d\tau\right), \quad \boldsymbol{W}_\tau = \text{Brown運動}, \mathbb{E} = \text{期待値}$$

(梶野先生の講義)　確率論

例3:波動方程式(双曲型)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

を教える際,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + a\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - a\frac{\partial}{\partial y}\right) u = 0$$

と因数分解し,一般解を

$$u = f(y + ax) + g(y - ax)$$

と書き下す.ここで,f, g は任意関数.

例4: 波動方程式(source term つき)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \phi(x, y). \quad (1)$$

まず, 次の1 階方程式を考える

$$\frac{\partial u}{\partial x} - a \frac{\partial u}{\partial y} = \phi,$$

すなわち

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - a \frac{\partial}{\partial y} \right) u = \phi.$$

指数関数の恒等式を使って, 左辺を次の様に書き換える

$$\left(e^{ax\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial x} e^{-ax\frac{\partial}{\partial y}} \right) u = \phi.$$

そうすれば，左辺の演算子は反転できて

$$u = e^{ax\frac{\partial}{\partial y}} \int^x e^{-ax'\frac{\partial}{\partial y}} \phi(x', y) dx'$$

$$= \int^x \phi(x', y + a(x - x')) dx'$$

となる.

先ほどの問題 (1) は，まず

$$u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^{-1} \phi(x, y)$$

と記号的に書いた上で，部分分数に展開する

$$= \left(2a \frac{\partial}{\partial y} \right)^{-1} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} - a \frac{\partial}{\partial y} \right)^{-1} - \left(\frac{\partial}{\partial x} + a \frac{\partial}{\partial y} \right)^{-1} \right] \phi(x, y).$$

その後で上の解法を当てはめるとよい

$$= \left(2a\frac{\partial}{\partial y}\right)^{-1}\left[e^{ax\frac{\partial}{\partial y}}\int^x e^{-ax'\frac{\partial}{\partial y}}\phi(x',y)dx' - e^{-ax\frac{\partial}{\partial y}}\int^x e^{ax'\frac{\partial}{\partial y}}\phi(x',y)dx'\right]$$

$$= \frac{1}{2a}\int^y \left(\Phi_1(x,y+ax) - \Phi_2(x,y-ax)\right)dy,$$

ここで、適当な関数 $\psi(y), \chi(y)$ を用いて

$$\Phi_1(x,y) = \int^x \phi(x',y-ax')dx' + \psi(y),$$

$$\Phi_2(x,y) = \int^x \phi(x',y+ax')dx' + \chi(y),$$

とおいた．この例は，Boole(1877) の古い微分方程式の教科書に見られる．Forsyth(1885)，犬井 (1960) も参照．

例5: KdV 方程式 (非線型波動方程式：中西先生の講義)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = -6u\frac{\partial u}{\partial x}$$

この方程式に対する多重Fourier 変換による形式解法は，実解析の擬微分作用素論の専門家を驚かせた．Coifman and Meyer(1984)，Rosales(1978).

多重Fourier 変換による展開

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t),\ u_k(x,t) = \int e^{ix\sum_{i=1}^{k}\xi_i}\sigma_k(\xi,t)\nu(\xi_1)\ldots\nu(\xi_k)d\xi_1\ldots d\xi_k$$

を考え，その係数 u_k の漸化式を導くと

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} + \frac{\partial^3 u_k}{\partial x^3} = -3\frac{\partial}{\partial x}\sum_{j=1}^{k-1} u_j u_{k-j}.$$

分散項を吸い込むため，新たな変数

$$\sigma_k(\xi,t) = e^{it\sum_{j=1}^{k}\xi_j^3}\sigma_k(\xi)$$

を導入すれば，

$$\sigma_k(\xi)\left(\sum_{i=1}^{k}\xi_i^3 - \left(\sum_{i=1}^{k}\xi_i\right)^3\right) = -3\left(\sum_{i=1}^{k}\xi_i\right)\sum_{j=1}^{k-1}\sigma_j(\xi_1,\ldots,\xi_j)\sigma_{k-j}(\xi_{j+1},\ldots,\xi_k)$$

が得られる．$k=2,3$を計算してみると，その解は

$$\sigma_k = \frac{\xi_1+\ldots+\xi_k}{(\xi_1+\xi_2)(\xi_2+\xi_3)\ldots(\xi_{k-1}+\xi_k)}$$

となることが推測でき，帰納的にその証明も出来る．したがって

$$u_k(x,t) = \frac{\partial}{i\partial x}\int_{\mathbb{R}^k}\frac{1}{(\xi_1+\xi_2)(\xi_2+\xi_3)\ldots(\xi_{k-1}+\xi_k)}\Pi_{i=1}^{k}\nu_{x,t}(\xi_i)d\xi_1\ldots\xi_k,$$

$$\nu_{x,t} = e^{ix\xi + t\xi^3}\nu(\xi)$$

となる．ここで

$$C_\nu[f](\xi) \equiv \text{p.v.}\int_{\mathbb{R}^1} \frac{1}{\xi+\eta}\nu_{x,t}(\eta)f(\eta)d\eta$$

を導入すれば，

$$u_k(x,t) = \frac{\partial}{i\partial x}\int_{\mathbb{R}^1} \nu_{x,t}(\eta)(C_\nu)^{k-1}[1](\eta)d\eta$$

であり，もとの未知関数は

$$u(x,t) = \frac{\partial}{i\partial x}\int_{\mathbb{R}^1} \nu(\eta)(1-C_\nu)^{-1}[1]d\eta = \frac{\partial}{\partial x}\int_{\mathbb{R}^1} \nu\psi(\eta)d\eta$$

と書くことができる．ここで

$$\psi(\eta) = \frac{1}{1 - C_\nu} 1$$

とおいた．すなわち、

$$\psi = 1 + \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}^1} \frac{1}{\eta + \xi} \nu(\eta)\psi(\eta) d\eta.$$

Gelfand-Levitan-Marchenko の積分方程式の類似が、自動的に導かれることに注意．　戸田 (2000)

逆散乱法

3．結びにかえて

Navier-Stokes方程式　(非圧縮粘性流体の基礎方程式)

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} = -\nabla p + \nu \triangle \boldsymbol{u},\ \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \triangle\right) \boldsymbol{u} = -\mathbb{P}\nabla \cdot (\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}),$$

$$\mathbb{P} \equiv \mathrm{Id} - (\triangle)^{-1}(\nabla \otimes \nabla) : \text{非圧縮場への射影}$$

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = e^{\nu t \triangle} \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}) - \int_0^t e^{\nu(t-s)\triangle} \mathbb{P}\nabla \cdot (\boldsymbol{u}(\cdot, s) \otimes \boldsymbol{u}(\cdot, s)) ds$$

これは、積分**方程式**であり、解ではない。

にも拘らず、不動点定理(縮小写像)を用いた逐次近似解の構成には役に立つ。

Navier-Stokes方程式＝最も短い乱流理論

その一般的な解法は知られていない。ベクトル解析，関数解析

参考文献

G. Boole, ”A Treatise on Differential Equations,” (Macmillan and co., 1877).

A.R. Forsyth, “A Treatise on Differential Equations,” (Macmillan and co., 1885; Dover 1997).

犬井鉄郎 (東京大学応用物理学教室編), 「微分方程式」東京大学出版会, 1960.

J. Jorgensen and S. Lang 数学の最先端 21 世紀への挑戦 第 2 巻, 「どこでも熱核」, 丸善出版, 2012.

R.R. Rosales, “Exact solutions of some nonlinear evolution equations,” Studies Appl. Math. 59, (1978) 117-151.

R.R. Coifman and Y. Meyer, Nonlinear harmonic analysis, operator theory and P.D.E., *in* Beijing Lectures in Harmonic Analysis (Beijing, 1984), ed. E.M. Stein, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1986, 3–45.

戸田盛和,「非線形波動とソリトン [新版]」, 日本評論社, 2000.