流体力学と量子力学に現れる微分方程式

大木谷耕司 (京大数理研)

23 June 2023, 全学共通: 現代の数学と数理解析

1. はじめに: 流体方程式

2. Schrödinger方程式

3. Madelung変換: 流体力学 $\rightarrow$ 量子力学

4. Madelung変換: 量子力学 $\rightarrow$ 流体力学

5. 量子流体力学の方程式

6. 正則化のしくみ: 拡散型　v.s. 分散型

(python によるデモ)

7. まとめ

補足. Feynman-Kac 公式

1 はじめに：流体方程式

時刻 t で $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ にある粒子のもつ加速度は、$\dfrac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial t}$ ではない．$\because$ 時刻 t で $\boldsymbol{x}$ にいた粒子は、時間が経つと一般には同じ場所にはいなくなるから．時刻 $t+\Delta t$ で粒子が占める場所を $\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x}$ と書くと、この粒子の加速度成分は

$$\frac{u(x+u\Delta t, y+v\Delta t, z+w\Delta t, t+\Delta t) - u(x,y,z,t)}{\Delta t}$$

$$\approx \frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial t} + u\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial x} + v\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial y} + w\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial z}$$

右辺第 2 項以降のため、流体方程式は 2 次の非線型性をもつ.

流体の密度 ρ とすれば、運動方程式

$$\rho \times (\text{加速度}) = \text{力}$$

において、非粘性流体の場合には働く力は圧力勾配 $-\nabla p$ である。さらに、粘性効果（流体のまさつ）を考慮し、速度

$$\boldsymbol{u} = (u(x,y,z,t), v(x,y,z,t), w(x,y,z,t))$$

に対する非圧縮粘性流体方程式は、次のようになる.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right),$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

ベクトル記号では、

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \nu \triangle \mathbf{u},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

ここで、圧力 p は速度と独立な変数ではない.

実際、上式の $\nabla \cdot$ から、Poisson 方程式

$$\triangle p = -\frac{\partial^2 u_i u_j}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$p(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 u_i(\boldsymbol{y}) u_j(\boldsymbol{y})}{\partial y_i \partial y_j} \frac{d\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|}$$

空間全体の情報が要る (非局所的).

熱方程式を解く: 熱核

1次元 熱拡散方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\nu t}} u_0(y)dy.$$

3次元 熱拡散方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \triangle u.$$

$$u(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{(4\pi\nu t)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \exp\left(-\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2}{4\nu t}\right) u_0(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}.$$

Burgers 方程式 (N-S 方程式より簡単)

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = \nu \triangle \boldsymbol{v} - \nabla V$$

$V(\boldsymbol{x}, t)$ は与えられた関数.

Cole-Hopf 変換 $\boldsymbol{v} = -2\nu \nabla \log \psi$ により、線型化出来る.

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \nu \triangle \psi + \frac{1}{2\nu} V \psi$$

Cole-Hopf 変換 $\boldsymbol{v} = -2\nu\nabla \log \psi$

(演算子形)

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} - \nu \triangle \boldsymbol{v} + \nabla V$$

$$= -2\nu\nabla \left(\frac{\partial_t \psi - \nu \triangle \psi - \frac{1}{2\nu} V \psi}{\psi} \right)$$

Gesztesy-Holden (2000)

2. Schrödinger方程式

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2}\triangle\psi + V(\boldsymbol{x},t)\psi$$

$\psi(\boldsymbol{x},t)$: 波動関数

$V(\boldsymbol{x},t)$: ポテンシャル．当面、与えれた関数とする．

$$\begin{cases} E = \dfrac{p^2}{2m} \\ E = \hbar\omega \\ k = \dfrac{p}{\hbar} \end{cases}$$

$$\hbar\omega = E = \frac{(k\hbar)^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$\psi = F(kx + \omega t)$ を考えて

$$\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

$\|\psi\| \searrow 0$

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2},$$ Schrödinger (1926) i を導入

3. Madelung 変換：流体力学 $\rightarrow$ 量子力学

“Die Mathematischen Hilfsmittel des Physikers” (Springer,1957)

$$\text{連続の式}\quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0 \tag{1}$$

$$\text{平均値}\quad \overline{\phi} := \int \rho \phi dv \rightarrow \frac{d\overline{\phi}}{dt} = \overline{\frac{d}{dt}\phi}\ (\text{黒板})$$

$$\overline{\boldsymbol{r}} = \int \rho \boldsymbol{r} dv \rightarrow \frac{d\overline{\boldsymbol{r}}}{dt} = \overline{\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}} := \overline{\boldsymbol{v}}$$

$$\frac{d\overline{\boldsymbol{v}}}{dt} = \overline{\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}} = \frac{d}{dt}\int \rho \boldsymbol{v} dv$$

線形化をねらい $\rho = \alpha\beta$ と仮定 $(*)$

$$\boldsymbol{v} = C\nabla \log \frac{\alpha}{\beta} = C\left(\frac{\nabla\alpha}{\alpha} - \frac{\nabla\beta}{\beta}\right)$$

$$\rho\boldsymbol{v} = C(\beta\nabla\alpha - \alpha\nabla\beta) \tag{2}$$

$$\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}) = C(\beta\triangle\alpha - \alpha\triangle\beta) \quad \text{(黒板)}$$

$$\dot\rho = \dot\alpha\beta + \alpha\dot\beta$$

$$\therefore\ \dot\alpha\beta + \alpha\dot\beta + C(\beta\triangle\alpha - \alpha\triangle\beta) = 0$$

(*) 脱線

Caldano の解法

$$x^3 + 3px + q = 0,\ x = u + v$$

$$\frac{\dot\beta - C\triangle\beta}{\beta} = -\frac{\dot\alpha + C\triangle\alpha}{\alpha} := f$$

$$\dot\alpha + C\triangle\alpha + \alpha f = 0 \tag{3}$$

$$\dot\beta - C\triangle\beta - \beta f = 0 \tag{4}$$

$$\frac{d^2\overline{\boldsymbol{r}}}{dt^2} = \frac{d\overline{\boldsymbol{v}}}{dt} = \frac{d}{dt}\int \rho\boldsymbol{v}dv$$

(2) より

$$= C\int(\dot\beta\nabla\alpha + \underbrace{\beta\nabla\dot\alpha}_{\to -\dot\alpha\nabla\beta} - \dot\alpha\nabla\beta - \underbrace{\alpha\nabla\dot\beta}_{\to -\dot\beta\nabla\alpha})dv$$

$$= 2C\int\left(\dot{\beta}\nabla\alpha - \dot{\alpha}\nabla\beta\right)dv$$

(3,4) より $\quad = 2C\int\{(C\triangle\beta + \beta f)\nabla\alpha + (C\triangle\alpha + \alpha f)\nabla\beta\}\,dv$

$$= 2C\int f\nabla(\alpha\beta)dv = -2C\int\rho\nabla f dv = -2C\overline{\nabla f}$$

$\therefore \quad m\dfrac{d^2\overline{\boldsymbol{r}}}{dt^2} = -2mC\overline{\nabla f} := -\overline{\nabla V}$ つまり $V := 2mCf$

定数を $2mC := \dfrac{\hbar}{i}$ とおくと $f = \dfrac{V}{2mC} = \dfrac{iV}{\hbar}$

$$\alpha = \psi, \beta = \psi^*$$ とおくと

$$\dot{\alpha} + C\triangle\alpha + \alpha f = 0$$

$$\dot{\psi} + \frac{\hbar}{2mi}\triangle\psi + \psi\frac{i}{\hbar}V = 0$$

$$-i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m}\triangle\psi + \psi V = 0$$

連続の式から、Schrödinger方程式が導けた.

運動量保存の式は？

4. Madelung 変換: 量子力学 $\to$ 流体力学

Madelung (1927)

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2}\triangle\psi+V(\boldsymbol{x},t)\psi$$

$$\psi=\sqrt{\rho}\exp\left(i\frac{\phi(\boldsymbol{x},t)}{\hbar}\right),\ \boldsymbol{v}=\nabla\phi$$

一般化:非線型 Schrödinger 方程式: $V=\hbar f'(\rho),\ \rho=|\psi|^2$

cf. Nore, Abid & Brachet(1997)

Madelung 変換(演算子形)

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}-\frac{\hbar^2}{2}\nabla\left(\frac{\triangle\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}\right)+\nabla V(\boldsymbol{x},t)=-i\hbar\nabla\left(\frac{\frac{\partial\psi}{\partial t}-\frac{i\hbar}{2}\triangle\psi+\frac{i}{\hbar}V\psi}{\psi}\right)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})=0$$

5. 量子流体力学の方程式

Euler-Korteweg-Poisson 系

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} &= \frac{\hbar^2}{2} \nabla \left(\frac{\triangle \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \right) - \nabla V(\boldsymbol{x}, t), \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) &= 0. \end{aligned}$$

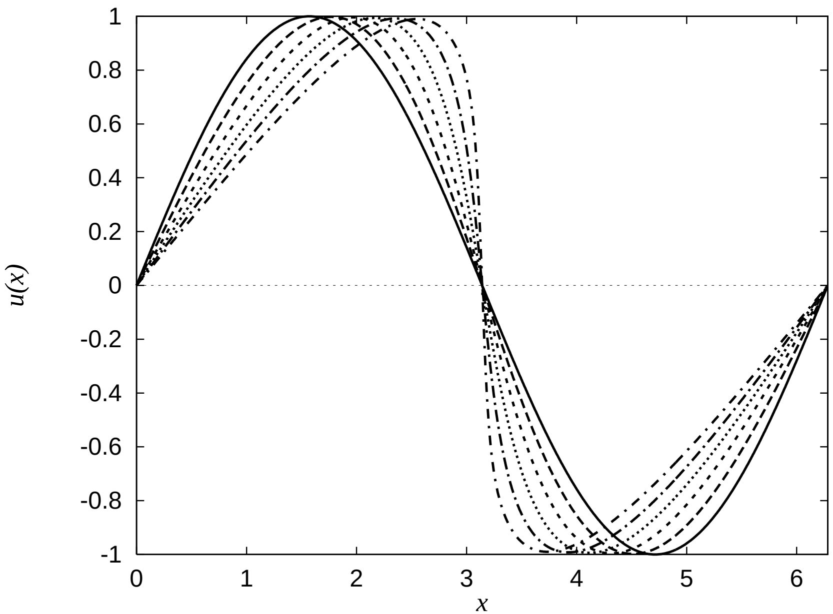
$\frac{\hbar^2}{2} \frac{\triangle \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}$: 量子圧力 (Bohm ポテンシャル)

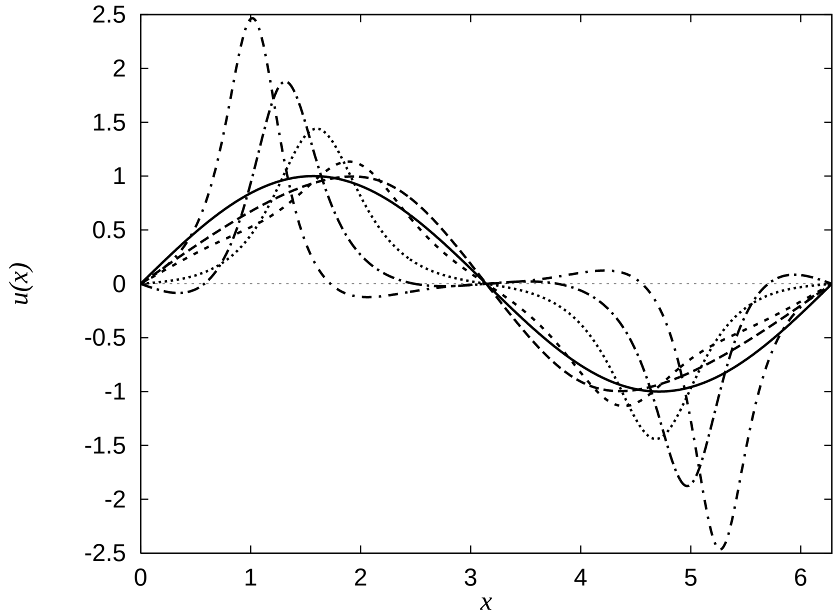
6. 正則化のしくみ

拡散型: 熱半群

分散型: Schrödinger 半群 (量子力学的圧力)

別の例　KdV 方程式(可積分系)　計算機によるデモ





通常粘性 $\nu = .01$

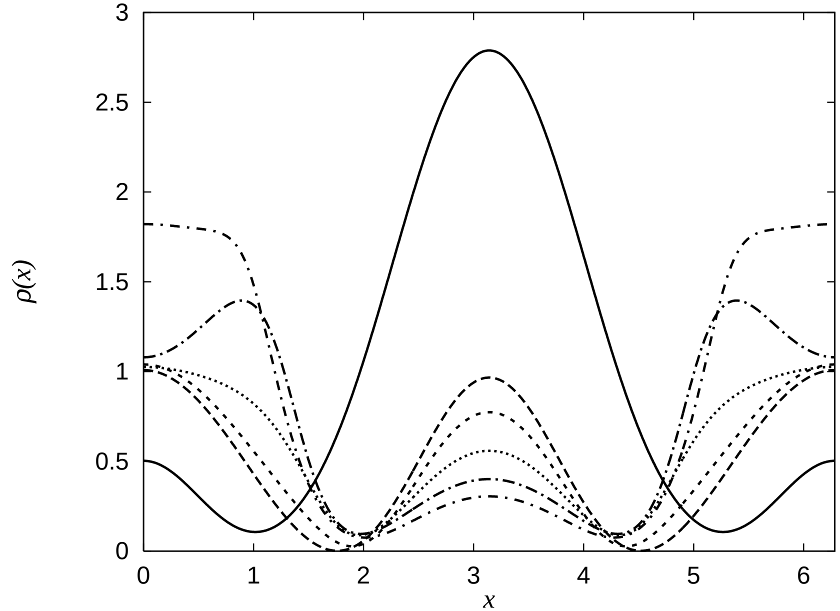
$v_t + v v_x = \nu v_{xx}$

速度 $u_0 = \sin x$

量子力学的圧力 $\hbar = 1$

$v_t + v v_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial_{xx}\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}\right)_x,$

$\rho_t + (v\rho)_x = 0$



密度　ρ

量子力学的圧力下での粒子の軌道

熱半群: $\mathbb{R}^n$

$$\psi_t = \nu \triangle \psi; \quad G(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{(4\pi\nu t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|\boldsymbol{x}|^2}{4\nu t}\right)$$

$$\text{初期値：} \ \psi_0 = \frac{1}{(\pi l^2)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|\boldsymbol{x}|^2}{l^2}\right)$$

$$\psi(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{\left\{\pi(4\nu t + l^2)\right\}^{n/2}} \exp\left(-\frac{|\boldsymbol{x}|^2}{4\nu t + l^2}\right)$$

Schrödinger 半群: $\mathbb{R}^n$

$$\psi_t = i\triangle\psi; \quad G(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{(4\pi i t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|\boldsymbol{x}|^2}{4it}\right)$$

$$\text{同じ初期値：}\ \psi_0 = \frac{1}{(\pi l^2)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|\boldsymbol{x}|^2}{l^2}\right)$$

$$\psi(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{l^n \left\{\pi\sqrt{1+(4t/l^2)^2}\right\}^{n/2}} \exp\left(-\frac{|\boldsymbol{x}|^2/l^2}{1+(4t/l^2)^2}\right)$$

$$\times \exp\left\{i\left(\frac{4t|\boldsymbol{x}|^2/l^4}{1+(4t/l^2)^2} - \frac{n}{2}\tan^{-1}\frac{4t}{l^2}\right)\right\}$$

1次元：相互作用のない場合 (ポテンシャル項 $V = 0$)

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

$$\psi = \sqrt{\rho}\,\mathrm{exp}\left(i\frac{\phi}{\hbar}\right),\ v = \frac{\partial\phi}{\partial x}\ \text{を適用}$$

1D Burgers 方程式 (分散型正則化)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\hbar^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}\right)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0$$

特性曲線法　$\rho\frac{\partial x}{\partial a} = \rho_0 (= 1)$

Lagrangian 表示 (cf. $\rho = 1/x_a$)

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{\hbar^2}{4}\left(\frac{x_{4a}}{x_a^4} - 8\frac{x_{3a}x_{aa}}{x_a^5} + 10\frac{x_{aa}^3}{x_a^6}\right) = 0$$

参考: 量子力学の種々の記述法

https://www.emqm15.org/presentations/speaker-presentations/bill-poirier/

cf. 1D Burgers 方程式 (拡散型正則化)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\leftarrow u = -2\nu(\log\psi)_x)$$

Lagrangian 表示

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \nu\triangle\frac{dx}{dt}$$

$$= \nu\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial a}{\partial x}\,\frac{\partial}{\partial a}\frac{dx}{dt}\right) = \frac{\nu}{\frac{\partial x}{\partial a}}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\frac{\partial}{\partial a}\frac{dx}{dt}}{\frac{\partial x}{\partial a}}\right)$$

$$\ddot{x} = \nu\frac{\dot{x}_{aa}x_a - \dot{x}_a x_{aa}}{x_a^3}$$

7. まとめ

Burgers 方程式 $\dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = \nu \triangle \boldsymbol{v} - \nabla V$

$$\Longleftrightarrow \frac{\partial \psi}{\partial t} = \nu \triangle \psi + \frac{1}{2\nu} V \psi$$

EKP 方程式 $\dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = \dfrac{\hbar^2}{2} \nabla \left(\dfrac{\triangle \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \right) - \nabla V(\boldsymbol{x}, t)$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0$$

$$\Longleftrightarrow i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2} \triangle \psi + V(\boldsymbol{x}, t) \psi$$

補足. **Feynman-Kac formula** (heuristic version)

$$\psi(x,t) = \int \mathcal{D}X \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_0^t \left(\frac{1}{2}\left|\frac{dX_s}{ds}\right|^2 - V(x+X_s)\right) ds\right\}$$

$$= \int \mu(dX)\psi_0(x+X_t)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_0^t V(x+X_s)ds\right)$$

1次元 熱拡散方程式

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}\psi_0(y)dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\psi_0(x+\sqrt{2t}u)du$$

これを、次のように書く

$$= E[\psi_0(x+W_t)]$$

ここで W_t はブラウン運動.

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\psi$$

$$\psi(x,t) = \int \mathcal{D}W \exp\left(-\int_0^t \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{dW_s}{ds}\right)^2 - V(x+W_s)\right\} ds\right)$$

V に対する適当な仮定の下，

$$= \int \mu(dW)\psi_0(x+W_t)\exp\left(\int_0^t V(x+W_s)ds\right)$$

$$\psi(x,t) = E\left[\psi_0(x+W_t)\exp\left(\int_0^t V(x+W_s)ds\right)\right]$$

拡散項がないと常微分方程式

$$\frac{d\psi}{dt} = V(x)\psi$$

$$\psi(x,t) = \psi_0(x) \exp\left(\int_0^t ds V(x)\right)$$

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

Schrödinger (1926) i を導入

Feynman (1948) 経路積分表示　(heuristic)

Kac (1949)　経路積分表示　(i を削除, 正当化)

補足: 'Feynman測度' の非存在

Cameron(1960) の反例, Klauder(2003)

使うのは、以下の事実のみ.

$$p_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right), p_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right),$$

$$p_1 * p_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(a^2+b^2)}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(a^2+b^2)}\right)$$

ここで $a, b > 0$.

N-重結合積 $(\lambda > 0)$

$$I = \left(\frac{\lambda}{2\pi\epsilon}\right)^{\frac{N+1}{2}} \int \ldots \int \exp\left(-\frac{\lambda}{2\epsilon}\sum_{l=0}^{N}(x_{l+1}-x_l)^2\right) \Pi_{l=1}^{N} dx_l$$

$$= \left(\frac{\lambda}{2\pi N\epsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\lambda}{2N\epsilon}(x_{N+1}-x_0)^2\right). \qquad (5)$$

有限の N に対し, $\Re(\lambda) > 0$ ならば、複素数 λについても成立.

積分は、絶対収束する時に存在する.

$N\epsilon$=定数として、$N \to \infty$ の極限でもそうなるか？

優評価

$$|I| \leq \left(\frac{|\lambda|}{2\pi\epsilon}\right)^{\frac{N+1}{2}} \underbrace{\int \dots \int \exp\left(-\frac{\Re(\lambda)}{2\epsilon}\sum_{l=0}^{N}(x_{l+1}-x_l)^2\right)\Pi_{l=1}^{N} dx_l}_{:=J}.$$

(5) で $\lambda \to \Re(\lambda)$ として

$$J = \left(\frac{2\pi\epsilon}{\Re(\lambda)}\right)^{\frac{N+1}{2}} \left(\frac{\Re(\lambda)}{2\pi N\epsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\Re(\lambda)}{2N\epsilon}(x_{N+1}-x_0)^2\right)$$

$$\therefore |I| \leq \left(\frac{|\lambda|}{2\pi\epsilon}\right)^{\frac{N+1}{2}} \left(\frac{2\pi\epsilon}{\Re(\lambda)}\right)^{\frac{N+1}{2}} \left(\frac{\Re(\lambda)}{2\pi N\epsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\Re(\lambda)}{2N\epsilon}(x_{N+1}-x_0)^2\right)$$

$$= \left(\frac{|\lambda|}{\Re(\lambda)}\right)^{\frac{N}{2}} \left(\frac{|\lambda|}{2\pi N\epsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\Re(\lambda)}{2N\epsilon}(x_{N+1} - x_0)^2\right).$$

$\Im(\lambda) \neq 0$のとき, $\frac{|\lambda|}{\Re(\lambda)} > 1$.

$N\epsilon$を 固定した時、上式は　$N \to \infty$　で発散.

文献

岩波講座基礎数学 解析学(II)iv 数理物理に現われる偏微分方程式 2019
藤田宏, 池部晃生, 犬井鉄郎, 高見穎郎

コシリャコフ, グリニエル, スミルノフ
物理・工学における 偏微分方程式　（上・下）
岩波 2019, (藤田宏, 池部晃生, 高見穎郎 訳)

J. Jorgenson & S. Lang, (2001) "The ubiquitous heat kernel."
Mathematics unlimited—2001 and beyond, 655.
数学の最先端 21 世紀への挑戦 第 2 巻「どこでも熱核」, 丸善出版, 2012.

岩波講座現代数学の基礎　現代数学の拡がり 1
無限次元の幾何学 1996

B. Khesin, G. Misiolek & K. Modin (2018). Geometric hydrodynamics via Madelung transform. Proc. Nat. Acad. Sci. **115** 6165-6170.

Spectral Methods in MATLAB, L.N. Trefethen, SIAM 2000.
ported in numpy: 例 p27 (KdV方程式)

`http://cpraveen.github.io/teaching/chebpy.html`