

平成16年度第1学期通信指導問題解答

問1. xy 平面内に、鏡でできている放物線 $x = y^2$ がある。この平面内において左から平行な光が進んでくるものとする。鏡で反射されたあと、光がどう進むかを説明せよ。

解答

放物線の焦点 $(1/4, 0)$ から放射されたかのように進む。その理由は以下の通りである。

水平な直線 $y = c$ を左無限遠方から進んできた光は点 (c^2, c) で放物面にぶつかる。 $c < 0$ でも同じように計算できるから $c > 0$ としてみよう。この点における接線の傾きは、 $y = \sqrt{x}$ の微分 $y' = 1/(2\sqrt{x})$ によって、 $1/(2c)$ であることがわかる。この接線の傾きを $\tan \alpha$ で表すことにする。つまり、 $\tan \alpha = 1/(2c)$ 。幾何学的な考察によって(図1参照)、反射光のなす直線の方程式の傾きが $\tan(2\alpha)$ となることがわかる。

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{4c}{4c^2 - 1}$$

であるから反射光の方程式は

$$y = \frac{4c}{4c^2 - 1}(x - c^2) + c = \frac{4c}{4c^2 - 1} \left(x - \frac{1}{4} \right).$$

これは常に $(1/4, 0)$ を通る。

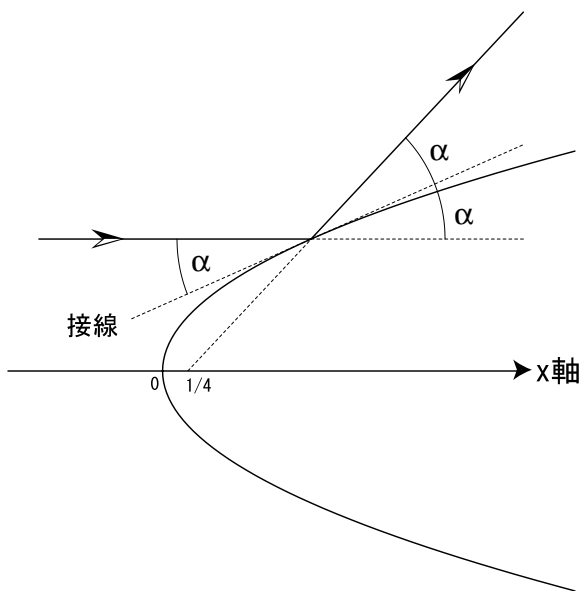


図 1:

問 2. 曲面 $z = \sqrt{1 - (r - 2)^2}$ の平均曲率を計算せよ。ただし、 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ であり、 $1 < r < 3$ とする。

解答

テキスト 3 2 ページ問 6 の公式

$$2H = \frac{f'}{r(1 + (f')^2)^{1/2}} + \frac{f''}{(1 + (f')^2)^{3/2}}$$

を $f(r) = \sqrt{1 - (r - 2)^2}$ に用いればよい。

$$f'(r) = \frac{-(r - 2)}{\sqrt{1 - (r - 2)^2}}, \quad f''(r) = \frac{-1}{(1 - (r - 2)^2)^{3/2}}$$

が簡単に計算できる。この 2 式を代入すると

$$H = \frac{1}{r} - 1$$

を得る。