問題 [1] 鋭角三角形 ABC の垂心 (3 頂点から対辺へ下ろした垂線の交点) を H とする．このとき, 三点 ABH を通る円 (それはただひとつに決まる) の半径の長さ, 三点 BCH を通る円の半径の長さ, 三点 CAH を通る円の半径の長さはすべて同じであることを証明せよ．この命題の逆を述べ, それが正しいかどうかを論ぜよ．

問題文中には鋭角三角形であることを断らなかったが, こうしないと混乱するかもしれないと後で気づいたのでここでは鋭角三角形としておく．

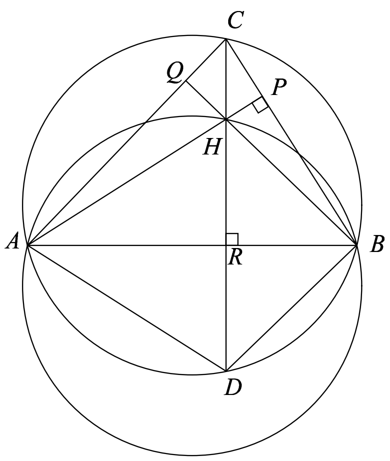

図 1: 二つの外接円.

解答 .

$\triangle ABC$ の外接円と $\triangle ABH$ の外接円を考える (図 1参照)．A, B, C から対辺に下ろした垂線の足をそれぞれ P, Q, R とする．そして $\triangle ABP$ と $\triangle CBR$ に着目する．$\angle APB = \angle CRB = \angle R$ で, かつ, $\angle ABP$ と $\angle CBR$ は共通だから等しい．故に, 残りの角も等しく,

$$\angle PAB = \angle RCB. \tag{1}$$

CR を延長し, $\triangle ABC$ の外接円と交わる点を D とする．このとき $\triangle ADB$ と $\triangle AHB$ が合同であることを証明しよう．上で示したように, $\angle HAB = \angle DCB$．さらに, 円周角の性質によって $\angle DCB = \angle DAB$．故に, $\angle HAB = \angle DAB$．全く同様の論法で $\angle HBA = \angle DBA$ も証明される．辺 AB は共通であるから, $\triangle ADB \equiv \triangle AHB$.

以上の考察で $HB = DB$ がわかった．弦 DB の作る円周角 $\angle DCB$ と弦 HB の作る円周角 $\angle BAH$ は等しい．しかも, その弦の長さは等しい．故にその円の半径は等しい．

以上で, $\triangle ABH$ の外接円の半径が $\triangle ABC$ の外接円の半径に等しいことがわかった．全く同様の論法は $\triangle BCH$ にも使えるので, $\triangle BCH$ の外接円の半径も $\triangle ABC$ の外接円の半径に等しいことがわかる．$\triangle CAH$ についても同様．従って, $\triangle ABH, \triangle BCH, \triangle CAH$ の外接円の半径は等しいことがわかった．

証明終わり

命題の逆この命題の逆を,『鋭角三角形 $\triangle ABC$ と点 H があって, $\triangle ABH, \triangle BCH, \triangle CAH$ の外接円の半径が等しいならば H は $\triangle ABC$ の垂心である.』とするとこれは正しくない. H が $\triangle ABC$ の外接円上にあればこの仮定は満たされるが H は垂心ではない.

しかし, 逆命題を『鋭角三角形 $\triangle ABC$ と三角形内部の点 H があって, $\triangle ABH, \triangle BCH, \triangle CAH$ の外接円の半径が等しいならば H は $\triangle ABC$ の垂心である.』とするとこれは正しい.

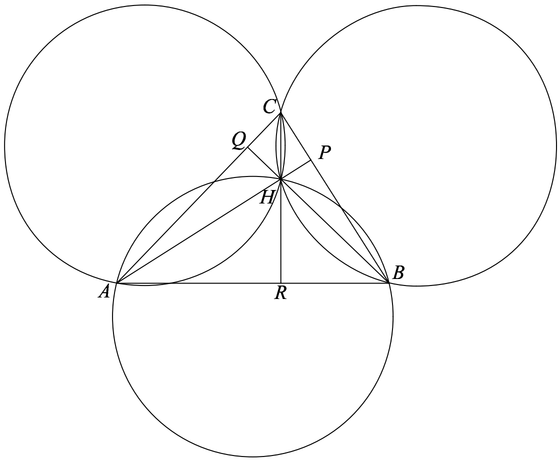

図 2:

証明. 図 2のように 1 点 H で 3 円が交わっているものとする. AH を延長し, 辺 BC と交わる点を P とする. 同様に点 Q, R を図のようにとる. 弦 AH に対する円周角 $\angle ACH$ と $\angle ABH$ は等しい (半径が等しく, かつ, 同じ長さの弦の円周角は等しいから.). これを α であらわそう:

$$\alpha = \angle ABH = \angle ACH.$$

同様に β, γ を定義して

$$\beta = \angle BCH = \angle BAH.$$

$$\gamma = \angle CAH = \angle CBH.$$

さてここで, $\triangle ABC$ の内角の和を考えると,

$$\pi = 2(\alpha + \beta + \gamma)$$

を得る. つまり,

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}.$$

最後に $\triangle ABP$ の内角の和を考えると

$$\angle APB + \beta + \alpha + \gamma = \pi.$$

これは $\angle APB = \pi/2$ を意味する. 同様に, $\angle BQC = \angle CRA = \pi/2$ も証明できるから, H は垂心である.

証明終わり

問題 [2] $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ の平均曲率が $-1/R$ であることを証明せよ.

解答 .
テキストの定理 2.5 を使う. $z=f(x,y)=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ から

$$f_x=-\frac{x}{z},\quad f_y=-\frac{y}{z},\quad f_{xx}=\frac{y^2-R^2}{z^3},$$
$$f_{xy}=\frac{-xy}{z^3},\quad f_{yy}=\frac{x^2-R^2}{z^3}$$

と計算し,

$$H=\frac{(1+f_y^2)f_{xx}-2f_xf_yf_{xy}+(1+f_x^2)f_{yy}}{2\left(1+f_x^2+f_y^2\right)^{3/2}}. \tag{2}$$

に代入して計算すればよい.

なお, 解答者には $z=(0,0)$ の場合だけを計算している場合も多かった. $x^2+y^2<R^2$ のすべての点でこうなることを示す必要があることを忘れてはならない. もちろん, $(x,y)=(0,0)$ で計算し, この曲面が球であることによってどこでも曲率が一定であることをことわりさえすればそれでもよい.

問題 [3] A テキストの図 6.1 のように直線上を初速ゼロで $A=(0,1)$ から $B=(1,0)$ まで動くときにかかる時間を T_1 とする. このとき

$$T_1=\frac{2}{\sqrt{g}} \tag{3}$$

であることを次のように証明せよ. まずエネルギー保存則から

$$gm(1-x)+\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{x}^2\right)=gm$$

を導き,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{gx}}=\mathrm{d}t$$

を確かめよ. これを積分して (3) を導け.

解答 .

これは文面に解答がほとんど書いてある.

$$T_1=\int_0^{T_1}\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{gx}}=\frac{1}{\sqrt{g}}\left[2\sqrt{x}\,\right]_0^1=\frac{2}{\sqrt{g}}$$

さえ間違いなく計算できればよい.

問題 [3] B の解答は省略する. テキストの図 5.1 のようになればよい.