二重指数関数型積分公式について

大浦拓哉
京都大学数理解析研究所

1　変数変換型積分公式

最も歴史の古い数値積分公式は，多項式による補間型積分公式である．例えば，標本点を等間隔にとって区間を線分で補間する台形則，放物線で補間するシンプソン則，さらに高次多項式で補間する高次ニュートン・コーツ則やガウス則などがよく知られている．一方，変数変換型積分公式は 1960 年代以降使われるようになった比較的新しい積分公式である [1, 2, 6]．この公式は，計算対象の積分を変数変換して補間型積分公式を適用するという手順を 1 つの積分公式とみなしたものであり，従来の補間型積分公式にはない特徴を持つ新しい公式といえる．そして，その最大の特徴は広義積分が計算可能となることである．そこでは，無数に存在する変数変換と補間型積分公式の中からどれを選んで適用するかが最も重要となる．

2　二重指数関数型積分公式

1974 年に高橋・森は，ある種の最適な変数変換型積分公式として二重指数関数型積分公式 (DE 公式) を提案した [8, 13, 15]．この提案の背景には，

1. 台形則が，解析的周期積分や全無限区間積分に対して漸近的に最適な積分公式となることの証明 [3, 7]
2. 誤差の特性関数を用いることで，任意の積分公式に関する性能を可視化 [3, 5, 6]
3. 最適な変数変換の導出を考察する際に，物理学的観点を採用 [8]

が存在する．背景 1 より，補間型積分公式には台形則を用いるのが理想的となり，あとは最適な変数変換がわかれば目的の最適公式が得られる．そこで，高橋・森は全無限区間の台形則を用いる変数変換に限定して背景 2, 3 による解析を行い，変数変換後の被積分関数が漸近的に $O(\exp(-c\exp|t|))$ $(t \to \pm\infty)$ で減衰する変換 (DE 変換) が最適であると結論付けた．ただ，背景 3 は数学的な厳密さに欠けていたため，欧米の研究者から最適性が疑問視されていた [12, 19]．そこで，1997 年に杉原は，全無限区間の台形則を用いる変換で DE 変換が最適であることを数学的に証明した [22]．DE 公式以外のものでは，周期積分に変換する変数変換型積分公式が IMT 型公式 [4, 9, 11, 14, 30] として知られているが，現時点で DE 公式よりも漸近的な性能は上回っていない．

3　DE 公式の発展

1974 年の高橋・森の DE 変換は，多くの広義積分に対して有効であるが，それでも計算することができない応用上重要な積分があり，特に無限区間の収束の遅い振動積分はうまく計算できなかった [10, 16]．この欠点を克服するため，1991 年に大浦・森は，振動積分に対する DE 公式を提案した [18, 20, 24]．この公式の簡潔な仕組は，変数変換に加えて積分値を近似的に保存した状態で振動項を取り除くという手順を，1 つの DE 変換として扱ったものである [29]．

さらに現在，様々な積分計算に対応する DE 公式が提案され利用されている [17, 21, 23, 25, 26, 27, 28]．主な応用例として，数

式処理システムであるMathematicaの数値積分にこのDE公式は組み込まれている.

参考文献

[1] P.J. Davis, P. Rabinowitz, Numerical integration, Blaisdell Publishing Company 1967.

[2] C. Schwartz, Numerical integration of analytic functions, J. Comput. Phys. **4** (1969), 19–29.

[3] H. Takahasi, M. Mori, Error estimation in the numerical integration of analytic functions, Rep. Compt. Centre, Univ. Tokyo **3** (1970), 41–108.

[4] 伊理正夫, 森口繁一, 高澤嘉光, ある数値積分公式について, 京都大学数理解析研究所講究録 **91** (1970), 82–118.

[5] H. Takahasi, M. Mori, Estimation of errors in the numerical quadrature of analytic functions, Applicable Analysis **1** (1971), 201–229.

[6] H. Takahasi, M. Mori, Quadrature formulas obtained by variable transformation, Numer. Math. **21** (1973), 206–219.

[7] M. Mori, On the superiority of the trapezoidal rule for the integration of periodic analytic functions, Memoirs of Numerical Mathematics **1** (1974), 11–19.

[8] H. Takahasi, M. Mori, Double exponential formulas for numerical integration, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **9** (1974), 721–741.

[9] M. Mori, An IMT-type double exponential for numerical integration, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **14** (1978), 713–729.

[10] 戸田英雄, 小野令美, Double Exponential 変換数値積分公式の有効性を発揮させるための注意, 京都大学数理解析研究所講究録 **339** (1978), 74–109.

[11] K. Murota, M. Iri, Parameter tuning and repeated application of the IMT-type transformation in numerical quadrature, Numer. Math. **38** (1982), 347–363.

[12] K. Sikorski, F. Stenger, Optimal quadratures in H^p spaces, ACM Trans. Math. Software **10** (1984), 140–151.

[13] M. Mori, Quadrature formulas obtained by variable transformation and the DE-rule, J. Comput. Appl. Math. **12**&**13** (1985), 119–130.

[14] M. Iri, S. Moriguti, Y. Takasawa, On a certain quadrature formula, J. Comput. Appl. Math. **17** (1987), 3–20 (English translation of [4]).

[15] M. Mori, The double exponential formulas for numerical integration over the half infinite interval, International Series of Numerical Mathematics **86** (1988), 367–379.

[16] 森正武, FORTRAN77 数値計算プログラミング 増補版, 岩波書店, 1988.

[17] M. Mori, Developments in the double exponential formulas for numerical integration, Proceedings of the International Congress of Mathematicians Kyoto 1990 (1991), 1585–1594.

[18] T. Ooura, M. Mori, The double exponential formula for oscillatory functions over the half infinite interval, J. Comput. Appl. Math. **38** (1991), 353–360.

[19] F. Stenger, Numerical methods based on sinc and analytic functions, Springer 1993.

[20] M. Mori, T. Ooura, Double exponential formula for Fourier type integrals with a divergent integrand, in: R.P. Agarwal (Ed.), Contributions in Numerical Mathematics, World Scientific Series in Applicable Analysis **2** (1993), 301–308.

[21] 緒方秀教, 杉原正顯, 森正武 Cauchy の主値及び Hadamard の有限部分積分に対する DE 公式, 日本応用数理学会論文誌 **3** (1993), 309–322.

[22] M. Sugihara, Optimality of the double exponential formula — functional analysis approach —, Numer. Math. **75** (1997), 379–395.

[23] 森正武, 二重指数関数型変換のすすめ, 京都大学数理解析研究所講究録 **1040** (1998), 143–153.

[24] T. Ooura, M. Mori, A robust double exponential formula for Fourier type integrals, J. Comput. Appl. Math. **112** (1999), 229–241.

[25] M. Mori, M. Sugihara, The double-exponential transformation in numerical analysis, J. Comput. Appl. Math. **127** (2001), 287–296.

[26] M. Muhammad, M. Mori, Double exponential formulas for numerical indefinite integration, J. Comput. Appl. Math. **161** (2003), 431–448.

[27] K. Tanaka, M. Sugihara, K. Murota, Numerical indefinite integration by double exponential sinc method, Math. Comp. **74** (2004), 655–679.

[28] M. Mori, Discovery of the double exponential transformation and its developments, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **41** (2005), 897–935.

[29] T. Ooura, A double exponential formula for the Fourier transforms, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **41** (2005), 971–978.

[30] T. Ooura, An IMT-type quadrature formula with the same asymptotic performance as the DE formula, J. Comput. Appl. Math. **213** (2008), 232–239.