Publ. RIMS, Kyoto Univ.
45 (2009), 25–74

Analyse Micro-Locale ℓ-Adique en Caractéristique $p>0$ le Cas d'un Trait

By

Ahmed ABBES* and Takeshi SAITO**

Résumé

Nous développons, pour un faisceau étale ℓ-adique sur un trait complet de caractéristique $p > 0$, la notion de variété caractéristique. Notre approche, inspirée de l'analyse micro-locale de Kashiwara et Schapira, est un pendant faisceautique de notre théorie de ramification des corps locaux à corps résiduel quelconque. Nous présentons la principale propriété que devrait satisfaire la variété caractéristique (conjecture de l'isogénie), et nous la démontrons pour les faisceaux de rang un sans restriction sur le trait, ou inconditionnellement sur le faisceau si le corps résiduel du trait est parfait.

Abstract

We develop, for an ℓ-adic étale sheaf on a complete trait of characteristic $p > 0$, the notion of characteristic variety. Our approach, inspired by the microlocal analysis of Kashiwara and Schapira, is a complement to our ramification theory for local fields with general residue fields. We formulate the main property that should be satisfied by the characteristic variety (the isogeny conjecture), and prove it for rank one sheaves unconditionally on the trait, or unconditionally on the sheaf if the residue field of the trait is perfect.

§1. Introduction

Ce travail s'inscrit dans un projet consacré à généraliser, pour les faisceaux étales ℓ-adiques sur une variété de caractéritique $p > 0$ (avec $\ell \neq p$), la

Communicated by A. Tamagawa. Received November 30, 2006. Revised October 25, 2007.
2000 Mathematics Subject Classification(s): Primary 11S15; Secondary 14F20
Key words: Corps locaux, ramification, faisceaux étales ℓ-adiques, variété caractéristique, caractères d'Artin-Schreier-Witt, conducteurs de Swan de Kato.
*CNRS UMR 6625, IRMAR, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France.
e-mail: `ahmed.abbes@univ-rennes1.fr`
**Department of Mathematical Sciences, University of Tokyo, Tokyo 153-8914, Japan.
e-mail: `t-saito@ms.u-tokyo.ac.jp`

notion empruntée à la théorie des $\mathscr{D}$-modules de *variété caractéristique*. Pour un $\mathscr{D}$-module cohérent sur une variété analytique complexe, la théorie *d'analyse micro-locale* de Kashiwara et Schapira permet de reconstruire la variété caractéristique à partir du complexe de ses solutions holomorphes ([10] 11.3.3). C'est donc tout naturellement que nous nous en inspirons pour notre projet. Il y a eu une première tentative dans cette direction due à Verdier [18] ; elle n'a pas abouti car le foncteur de spécialisation de Verdier tue la ramification sauvage.

Dans cet article, nous développons la variante locale en codimension un du projet. Considérons un corps parfait k de caractéristique $p > 0$ et un anneau de valuation discrète complet R qui est une k-algèbre, dont le corps résiduel est de type fini sur k. On pose $S = \mathrm{Spec}(R)$, η (resp. s) son point générique (resp. fermé), $\overline{\eta}$ un point géométrique générique de S et $\overline{s}$ le point géométrique localisé en s correspondant. Soit D un diviseur effectif de S. Suivant Raynaud, on introduit dans (3.6) un ouvert $(S \times_k S)_{(D)}$ de l'éclatement de $S \times_k S$ le long de D diagonalement plongé, défini par une condition de valuation. On l'appelle *dilatation de D* et on le considère comme un S-schéma par la seconde projection. Sa fibre générique est isomorphe à $S \times_k \eta$ et sa fibre au dessus de D est isomorphe au fibré vectoriel $\mathbf{T}_D = \mathbf{V}(\Omega^1_R \otimes_R \mathscr{O}_D(D))$; on pose $\mathbf{T}^{\mathbf{t}}_D$ le fibré vectoriel dual sur D. On peut voir dans cette construction une analogie avec la déformation au cône normal de Grothendieck, qui est aussi un exemple de dilatation (2.11).

Soit Λ un anneau commutatif noethérien annulé par un entier inversible dans k. On définit, pour les faisceaux étales en Λ-modules sur $S \times_k \eta$, le foncteur ν_D de *spécialisation le long de D* comme étant le foncteur des cycles proches de $(S \times_k S)_{(D)}$, et le foncteur μ_D de *micro-localisation le long de D* comme étant la transformée de Fourier-Deligne de ν_D relativement à un caractère additif non-trivial.

L'anneau R apparaît comme l'anneau local complété d'un k-schéma lisse X en un point de codimension 1. Il est beaucoup plus aisé de travailler avec le S-schéma $(X \times_k S)_{(D)}$ obtenu en dilatant $X \times_k S$, plutôt que $(S \times_k S)_{(D)}$. Pour démontrer nos résultats, nous nous y ramenons par algébrisation. Pour les applications géométriques que nous avons en vue, un tel schéma X s'impose naturellement. Donc on aurait pu se limiter à ce cadre, mais cela aurait l'inconvénient de rendre la théorie locale dépendante d'un choix superflu. Il est aussi possible de dilater le schéma formel complété de $S \times_k S$ le long de D diagonalement plongé, ce qui reviendrait à compléter $(S \times_k S)_{(D)}$ le long de sa fibre spéciale. Nous avons choisi de ne pas poursuivre cet approche ici car elle requière le développement du formalisme étale pour le schéma formel ainsi obtenu et pour sa fibre rigide au sens de Raynaud. Nous reviendrons à cet aspect dans un travail ultérieur.

Soient $\mathscr{F}$ un faisceau étale constructible en Λ-modules plats sur η, $\mathscr{F}_!$ son extension par 0 à S. Notre idée principale, inspirée de la théorie de Kashiwara et Schapira, est de considérer le support $\mathtt{C}_D(\mathscr{F})$ dans $\overline{\mathbf{T}}^{\mathtt{t}}_D = \mathbf{T}^{\mathtt{t}}_D \times_D \overline{s}$ du complexe $\mu_D(\mathscr{F}_! \boxtimes \Lambda)$, où D est un *divisieur critique* pour $\mathscr{F}$. Pour définir ces diviseurs, on utilise la théorie de ramification pour les corps locaux à corps résiduel quelconque [1], dont ce travail est un pendant faisceautique. Nous avons défini dans *loc. cit.* une filtration décroissante, exhaustive et séparée $(G^a)_{a\in\mathbb{Q}_{\geq 0}}$ de $G = \mathrm{Gal}(\overline{\eta}/\eta)$ par des sous-groupes fermés distingués. Les *pentes critiques* de $\mathscr{F}$ sont les nombres rationnels $r \geq 0$ tel que $(\mathscr{F}_{\overline{\eta}})^{G^r} \subsetneq (\mathscr{F}_{\overline{\eta}})^{G^{r+}}$. Ces derniers n'étant pas entiers en général, nous sommes amenés à modifier notre construction en remplaçant le second facteur de $S \times_k S$ par une extension finie.

Supposons que $\mathscr{F}$ ait une unique pente critique $r > 1$, et pour simplifier l'introduction que r soit entier, ce qui détermine un diviseur effectif D de S. Nous conjecturons que $\mathtt{C}_D(\mathscr{F})$ *est un ensemble fini de points du fibré vectoriel* $\overline{\mathbf{T}}^{\mathtt{t}}_D$ *ne contenant pas l'origine* (9.3). Concrètement, cela permet d'associer à $\mathscr{F}$ un nombre fini de formes différentielles "tordues" non-nulles. En homogénéisant $\mathtt{C}_D(\mathscr{F})$, on obtient la *variété caractéristique* de $\mathscr{F}$ (9.6). Cette définition ne depend pas du caractère additif choisi.

Notre résultat principal est la démonstration de la conjecture ci-dessus en rang un. Pour ce faire, on compare notre approche à la théorie de ramification de Kato pour les caractères [11]. On montre (9.9) que la pente critique d'un faisceau de rang un correspond à son conducteur de Swan, et le support $\mathtt{C}_D(\mathscr{F})$ à son conducteur de Swan raffiné. On retrouve en fait la variante de la théorie de Kato modifiée par Matsuda [16] ; mais on développe aussi une variante logarithmique qui correspond exactement à la théorie de Kato en rang un (9.10). Enfin, on démontre la conjecture inconditionnellement si le corps résiduel de R est k, donc parfait (9.15).

L'article se compose de deux parties qui ont chacune ses propres notations. La première partie développe la notion géométrique de dilatation. La seconde partie est consacrée à l'analyse micro-locale ; les constructions principales sont introduites dans les sections 7 et 8 ; les principaux résultats sont énoncés dans la section 9 et démontrés dans les sections 12 et 13. La théorie de ramification des caractères d'Artin-Schreier-Witt de Kato est reprise entièrement dans les sections 10 et 11. Enfin, on calcule dans la dernière section les invariants de ramification définis dans cet article en termes d'invariants plus classiques sous l'hypothèse que le corps résiduel de R est k.

Première partie 1. Dilatations

§2. Relèvement d'un Morphisme aux Schémas Éclatés

2.1. Soient $\mathtt{S}$, $\mathtt{S}'$ deux anneaux gradués à degrés positifs, $\theta\colon \mathtt{S}' \to \mathtt{S}$ un homomorphisme d'anneaux gradués. Suivant EGA II 2.8.1, on désigne par $\mathbf{G}(\theta)$ la partie ouverte de $X = \operatorname{Proj}(\mathtt{S})$ réunion des $\mathrm{D}_+(\theta(f'))$, où f' parcourt l'ensemble des éléments homogènes de $\mathtt{S}'_+$. En vertu de *loc. cit.* 2.8.2 et 2.8.3, il existe un morphisme affine canonique du schéma induit $\mathbf{G}(\theta)$ dans $\operatorname{Proj}(\mathtt{S}')$, dit associé à θ. Soient $\mathtt{S}''$ un troisième anneau gradué à degrés positifs, $\theta'\colon \mathtt{S}'' \to \mathtt{S}'$ un homomorphisme d'anneaux gradués, et posons $\theta'' = \theta \circ \theta'$. D'après *loc. cit.* 2.8.4, on a $\mathbf{G}(\theta'') \subset \mathbf{G}(\theta)$, et si ϑ, ϑ' et ϑ'' sont les morphismes associés à θ, θ' et θ'', on a $\vartheta(\mathbf{G}(\theta'')) \subset \mathbf{G}(\theta')$ et $\vartheta'' = \vartheta' \circ (\vartheta|\mathbf{G}(\theta''))$.

2.2. Soient Y un schéma, $\mathscr{S}$, $\mathscr{S}'$ deux $\mathscr{O}_Y$-algèbres graduées quasi-cohérentes à degrés positifs ; posons $X = \operatorname{Proj}(\mathscr{S})$, $X' = \operatorname{Proj}(\mathscr{S}')$, et soient p, p' les morphismes structuraux de X et X' dans Y. Soit $\theta\colon \mathscr{S}' \to \mathscr{S}$ un $\mathscr{O}_Y$-homomorphisme d'algèbres graduées. Pour tout ouvert affine U de Y, on pose $\mathtt{S}_U = \Gamma(U, \mathscr{S})$, $\mathtt{S}'_U = \Gamma(U, \mathscr{S})$; l'homomorphisme θ définit un homomorphisme $\theta_U\colon \mathtt{S}'_U \to \mathtt{S}_U$ de A_U-algèbres graduées ; en posant $A_U = \Gamma(U, \mathscr{O}_Y)$. Il lui correspond dans $p^{-1}(U)$ un ensemble ouvert $\mathbf{G}(\theta_U)$ et un morphisme $\vartheta_U\colon \mathbf{G}(\theta_U) \to p'^{-1}(U)$. D'après EGA II 3.5.1, il existe une partie ouverte $\mathbf{G}(\theta)$ de X et un Y-morphisme affine $\vartheta\colon \mathbf{G}(\theta) \to X'$ dit associé à θ, tels que, pour tout ouvert affine U de Y, $\mathbf{G}(\theta) \cap p^{-1}(U) = \mathbf{G}(\theta_U)$ et ϑ_U soit la restriction de ϑ au dessus de U.

2.3. Soient X, Y deux schémas, $f\colon Y \to X$ un morphisme, D (resp. E) un sous-schéma fermé de X (resp. Y) défini par un idéal quasi-cohérent $\mathscr{I}$ (resp. $\mathscr{J}$) de $\mathscr{O}_X$ (resp. $\mathscr{O}_Y$), $i\colon D \to X$ et $j\colon E \to Y$ les injections canoniques. On désigne par X' l'éclatement de D dans X et par Y' l'éclatement de E dans Y. On suppose que $f \circ j$ soit majoré par i ; il revient au même de dire que $f^*(\mathscr{I})\mathscr{O}_Y \subset \mathscr{J}$. Par suite, on a un homomorphisme de $\mathscr{O}_Y$-algèbres graduées

$$\theta\colon f^*(\oplus_{n\geq 0}\mathscr{I}^n) \to \oplus_{n\geq 0}\mathscr{J}^n \qquad (2.3.1)$$

qui détermine par (2.2) un ensemble ouvert $Y'_{(D)} = \mathbf{G}(\theta)$ de Y' et un morphisme $\vartheta\colon Y'_{(D)} \to Y \times_X X'$.

Définition 2.4 (Raynaud [4] 3.2)**.** On appelle $Y'_{(D)}$ la *dilatation* de E par rapport à D, $\vartheta\colon Y'_{(D)} \to Y \times_X X'$ le *morphisme canonique*, et le composé $f'\colon Y'_{(D)} \to X'$ de ϑ et de la projection canonique le *relèvement canonique* de f.

2.5. Sous les hypothèses de 2.3, si E est l'image réciproque de D, ce qui revient à dire que $f^*(\mathscr{I})\mathscr{O}_Y = \mathscr{J}$, alors $Y'_{(D)} = Y'$ et le morphisme canonique ϑ est une immersion fermé (EGA II 3.6.2). Si de plus E est un diviseur de Cartier de Y, alors Y' est isomorphe à Y et le relèvement canonique $f'\colon Y \to X'$ traduit la propriété universelle des éclatements.

2.6. Conservons les hypothèses de 2.3, de plus soient Z un troisième schéma, $g\colon Z \to Y$ un morphisme, F un sous-schéma fermé de Z, $k\colon F \to Z$ l'injection canonique, Z' l'éclatement de F dans Z. On suppose que $g \circ k$ soit majoré par j. On peut alors considérer les dilatations de F par rapport à E ou à D, et les morphismes canoniques $\vartheta'\colon Z'_{(E)} \to Z \times_Y Y'$ et $\vartheta''\colon Z'_{(D)} \to Z \times_X X'$. Il résulte de 2.1 qu'on a $Z'_{(D)} \subset Z'_{(E)}$, $\vartheta'(Z'_{(D)}) \subset Z \times_Y Y'_{(D)}$ et $\vartheta'' = (Z \times_Y \vartheta) \circ (\vartheta' | Z'_{(D)})$.

Proposition 2.7. *Les hypothèses étant celles de* (2.3)*, de plus soit $g\colon Z \to Y$ un morphisme tel que l'idéal $\mathscr{J}\mathscr{O}_Z$ soit inversible et $\mathscr{I}\mathscr{O}_Z = \mathscr{J}\mathscr{O}_Z$. Alors le relèvement canonique $g'\colon Z \to Y'$ de g se factorise à travers l'ouvert $Y'_{(D)}$ de Y'.*

En effet, Z s'identifie aux dilatations de $g^{-1}(E) = g^{-1}(f^{-1}(D))$ par rapport à E ou à D (2.5). Donc la proposition résulte de la fonctorialité des dilatations (2.6).

Proposition 2.8. *Sous les hypothèses de* (2.3)*, on a l'égalité des idéaux*

(2.8.1) $$(\mathscr{I}\mathscr{O}_{Y'})|Y'_{(D)} = (\mathscr{J}\mathscr{O}_{Y'})|Y'_{(D)}$$

et $Y'_{(D)}$ est l'ouvert maximal de Y' où cette relation est satisfaite.

Comme $\mathscr{I}\mathscr{O}_{Y'} \subset \mathscr{J}\mathscr{O}_{Y'}$ et $\mathscr{J}\mathscr{O}_{Y'}$ est un idéal inversible, $(\mathscr{I}\mathscr{O}_{Y'}) \otimes (\mathscr{J}\mathscr{O}_{Y'})^{-1}$ est un idéal quasi-cohérent de $\mathscr{O}_{Y'}$; il définit un sous-schéma fermé de Y' dont le complémentaire U est l'ouvert maximal de Y' tel que $(\mathscr{I}\mathscr{O}_{Y'})|U = (\mathscr{J}\mathscr{O}_{Y'})|U$. Il résulte de 2.7 que U est contenu dans $Y'_{(D)}$. Pour établir l'égalité $U = Y'_{(D)}$, il suffit de montrer la relation (2.8.1). La question étant locale sur X et Y, on peut supposer que $X = \mathrm{Spec}(A)$ et $Y = \mathrm{Spec}(B)$ soient affines ; donc f est défini par un homomorphisme $u\colon A \to B$. Soient I (resp. J) l'idéal de A (resp. B) tel que $\mathscr{I} = \widetilde{I}$ (resp. $\mathscr{J} = \widetilde{J}$). On pose $\mathtt{S} = \oplus_{n\geq 0} J^n$, de sorte que $Y' = \mathrm{Proj}(\mathtt{S})$. Pour $a \in J$, si on note a' l'élément a vu comme un élément homogène de degré un de $\mathtt{S}$, l'image inverse de a engendre l'idéal $J\mathscr{O}_{Y'}$ sur l'ouvert $\mathrm{D}_+(a')$. Donc l'inclusion $I\mathscr{O}_{Y'} \subset J\mathscr{O}_{Y'}$ induit une égalité sur les ouverts $\mathrm{D}_+(u(a)')$ pour $a \in I$. Mais on a $Y'_{(D)} = \cup_{a\in I}\mathrm{D}_+(u(a)')$, ce qui entraîne (2.8.1) et achève la preuve.

Corollaire 2.9. *Sous les hypothèses de* (2.6), *on a* $Z'_{(D)} = g'^{-1}(Y'_{(D)})$ *où* $g' \colon Z'_{(E)} \to Y'$ *est le relèvement canonique de* g.

On pose $U = g'^{-1}(Y'_{(D)})$ et on note $\mathscr{K}$ l'idéal de $\mathscr{O}_Z$ qui définit F. On sait (2.6) que $Z'_{(D)} \subset U \subset Z'_{(E)}$. D'autre part, on a $(\mathscr{I}\mathscr{O}_{Y'})|Y'_{(D)} = (\mathscr{J}\mathscr{O}_{Y'})|Y'_{(D)}$ et $(\mathscr{J}\mathscr{O}_{Z'})|Z'_{(E)} = (\mathscr{K}\mathscr{O}_{Z'})|Z'_{(E)}$. Donc $(\mathscr{I}\mathscr{O}_{Z'})|U = (\mathscr{K}\mathscr{O}_{Z'})|U$, ce qui entraîne que $U \subset Z'_{(D)}$ (2.7).

Corollaire 2.10. *Les hypothèses étant celles de* (2.3), *de plus notons* E' *le diviseur exceptionnel sur* Y', *c'est à dire l'image réciroque de* E *sur* Y', $E'_{(D)}$ *sa restriction à* $Y'_{(D)}$. *Alors le diagramme*

$$\begin{tikzcd} E'_{(D)} \arrow[r] \arrow[d] & Y'_{(D)} \arrow[d] \\ D \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

est cartésien.

Cela résulte de la relation (2.8.1).

2.11. Soient k un corps, Y un k-schéma, X un sous-schéma fermé de Y, $i\colon X \to Y$ l'injection canonique. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "j"] \arrow[d] & \mathbb{A}^1_Y \arrow[d, "\pi"] \\ \mathrm{Spec}(k) \arrow[r, "s_0"'] & \mathbb{A}^1_k \end{tikzcd}$$

où π est la projection canonique, s_0 est la section nulle de $\mathbb{A}^1_k$ et j est le composé de i et de la section nulle de $\mathbb{A}^1_Y$. La dilatation de X dans $\mathbb{A}^1_Y$ par rapport à l'origine de $\mathbb{A}^1_k$ n'est autre que l'espace total de la déformation au cône normal ; sa restriction au dessus de $\mathbb{G}_{\mathrm{m},k}$ est isomorphe à $\mathbb{G}_{\mathrm{m},Y}$ et sa fibre au dessus de l'origine de $\mathbb{A}^1_k$ est isomorphe au cône normal de X dans Y.

§3. Dilatation le Long d'une Section

3.1. Soient X, Y deux schémas, $f\colon Y \to X$ un morphisme séparé, $g\colon X \to Y$ une section de f ; donc g est une immersion fermée. Soient D un sous-schéma fermé de X, $i\colon D \to X$ l'injection canonique. L'immersion composée $g \circ i\colon D \to Y$ détermine un sous-schéma fermé de Y qu'on notera simplement $g(D)$. On désigne par $X_{[D]}$ l'éclatement de D dans X, par $Y_{[D]}$ l'éclatement de $g(D)$ dans Y et par $Y_{(D)}$ la dilatation de $g(D)$ par rapport à D (2.4). On dira que $Y_{(D)}$ est la *dilatation de Y le long de la section g d'épaisseur D*. On notera $E_{[D]}$ (resp. $E_{(D)}$) le diviseur exceptionnel sur $Y_{[D]}$ (resp. $Y_{(D)}$). D'après 2.8 et 2.10, on a un diagramme commutatif canonique à carrés cartésiens

(3.1.1)
$$\begin{tikzcd}
E_{(D)} \arrow[r] \arrow[d] & Y_{(D)} \arrow[d] & Y \times_X U \arrow[l] \arrow[d] \\
D \arrow[r] & X & U \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

3.2. Les hypothèses étant celles de (3.1), de plus soient $u\colon X' \to X$ un morphisme, $D' = u^{-1}(D)$ l'image réciproque de D sur X', $Y' = X' \times_X Y$, $f'\colon Y' \to X'$ et $v\colon Y' \to Y$ les projections canoniques, $g'\colon X' \to Y'$ la section déduite de g par le changement de base u. On a alors un diagramme commutatif

(3.2.1)
$$\begin{tikzcd}
Y'_{[D']} \arrow[d, "v_{[D]}"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y'_{(D')} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, "v_{(D)}"] & X'_{[D']} \arrow[r] \arrow[d, "u_{[D]}"] & X' \arrow[d, "u"] \\
Y_{[D]} & Y_{(D)} \arrow[l] \arrow[r] & X_{[D]} \arrow[r] & X
\end{tikzcd}$$

où $v_{[D]}, v_{(D)}$ et $u_{[D]}$ sont les morphismes canoniques. En effet, $g'(D')$ est l'image inverse de $g(D)$ par v, ce qui justifie la définition de $v_{[D]}$. Compte tenu de 2.8, $Y'_{(D')}$ s'identifie aussi à la dilatation de $g'(D')$ par rapport à D ; la flèche $v_{(D)}$ et la commutativité de (3.2.1) résultent alors de la fonctorialité des dilatations (2.6). Le carré de gauche est cartésien par 2.9. Si de plus u est plat, les trois carrés sont cartésiens ; ceci est évident pour le carré de droite ; donc la flèche canonique $Y_{(D)} \times_X X' \to Y'$ satisfait aux conditions de la proposition 2.7, et induit un morphisme $Y_{(D)} \times_X X' \to Y'_{(D')}$; on laissera au lecteur le soin d'en déduire que le carré central est cartésien.

3.3. Conservons les hypothèses de (3.1), de plus soient Z un schéma, $p\colon Z \to Y$ un morphisme séparé, $h\colon X \to Z$ un morphisme tel que $p \circ h = g$; donc h

est une section de $f \circ p$. Il résulte de 2.6 qu'on a un diagramme commutatif

(3.3.1)
$$\begin{tikzcd} E^Z_{(D)} \arrow[r] \arrow[d, "p_E"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Z_{(D)} \arrow[r] \arrow[d, "p_{(D)}"] & Z \arrow[d, "p"] \\ E^Y_{(D)} \arrow[r] & Y_{(D)} \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

où $E^Y_{(D)}$ (resp. $E^Z_{(D)}$) est le diviseur exceptionnel sur $Y_{(D)}$ (resp. $Z_{(D)}$) ; de plus le carré de gauche est cartésien par 2.10. Si le diagramme

(3.3.2)
$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "h\circ i"] \arrow[d, equal] & Z \arrow[d, "p"] \\ D \arrow[r, "g\circ i"'] & Y \end{tikzcd}$$

est cartésien, (3.3.1) s'insère dans un diagramme commutatif à carré central cartésien (cf. 2.9)

(3.3.3)
$$\begin{tikzcd} E^Z_{(D)} \arrow[r] \arrow[d, "p_E"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Z_{(D)} \arrow[r] \arrow[d, "p_{(D)}"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Z_{[D]} \arrow[r] \arrow[d, "p_{[D]}"] & Z \arrow[d, "p"] \\ E^Y_{(D)} \arrow[r] & Y_{(D)} \arrow[r] & Y_{[D]} \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

Si de plus p est plat, les trois carrés ci-dessus sont cartésiens et p_E est un isomorphisme.

3.4. Conservons les hypothèses de (3.1), supposons de plus que D soit un diviseur de Cartier sur X et posons $\mathscr{O}_D(D) = \mathscr{O}_X(D) \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_D$. On désigne par $\mathscr{J}$ l'idéal de $\mathscr{O}_Y$ qui définit $g(D)$. Le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & X \arrow[r, "g"] & Y \arrow[d, "f"] \\ D \arrow[rr, "i"'] & & X \end{tikzcd}$$

induit une suite exacte canonique de faisceaux conormaux

(3.4.1)
$$i^*(\mathscr{N}_g) \to \mathscr{J}/\mathscr{J}^2 \to \mathscr{N}_i \to 0$$

et un scindage $\mathscr{N}_i \to \mathscr{J}/\mathscr{J}^2$. On en déduit un homomorphisme surjectif

$$(\mathscr{N}_g \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_D(D)) \oplus \mathscr{O}_D \to (\mathscr{J}/\mathscr{J}^2) \otimes_{\mathscr{O}_D} \mathscr{O}_D(D),$$

et donc une immersion fermée j de $E_{[D]}$ dans le fibré projectif $\mathbf{P}((\mathscr{N}_g \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_D(D)) \oplus \mathscr{O}_D)$ au dessus de D [1]. Ce dernier est canoniquement isomorphe à la fermeture projective du fibré vectoriel $\mathbf{V}(\mathscr{N}_g \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_D(D))$ avec un lieu à l'infini isomorphe à $\mathbf{P}(\mathscr{N}_g \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_D(D))$. Il résulte de la définition (2.3) que l'image inverse de $\mathbf{V}(\mathscr{N}_g \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_D(D))$ par j est l'ouvert $E_{(D)}$. Identifiant $\mathscr{N}_g$ avec $g^*(\Omega^1_{Y/X})$, on obtient une immersion fermée au dessus de D

$$E_{(D)} \to \mathbf{V}(g^*(\Omega^1_{Y/X}) \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_D(D)). \tag{3.4.2}$$

Proposition 3.5. *Sous les hypothèses de* (3.4)*, si g est une immersion régulière,* (3.4.2) *est un isomorphisme.*

En effet, $g \circ i$ est une immersion régulière, la suite (3.4.1) est exacte à gauche et l'immersion j est un isomorphisme.

3.6. Soient k un corps, X un k-schéma, Y un k-schéma séparé, $f\colon X \to Y$ un k-morphisme, D un diviseur de Cartier effectif sur X, U l'ouvert complémentaire de D dans X. On peut appliquer la construction (3.1) relativement à la projection canonique $\mathrm{pr}_2\colon Y \times_k X \to X$ et au graphe $\gamma\colon X \to Y \times_k X$ de f ; on obtient un diagramme commutatif à carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd} E_{(D)} \arrow[r] \arrow[d] & (Y \times_k X)_{(D)} \arrow[d] & Y \times_k U \arrow[l] \arrow[d] \\ D \arrow[r] & X & U \arrow[l] \end{tikzcd} \tag{3.6.1}$$

et une D-immersion fermée $E_{(D)} \to \mathbf{V}(f^*(\Omega^1_{Y/k}) \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_D(D))$ (3.4.2), qui est bijective si Y est lisse sur k (3.5).

Lemme 3.7. *Les hypothèses étant celles de* (3.6)*, supposons de plus qu'il existe un sous-schéma fermé C de Y, que $F = f^{-1}(C)$ soit un diviseur de Cartier sur X et que $D \geq 2F$. Alors $C \times_k U$ est fermé dans $(Y \times_k X)_{(D)}$.*

Le diagramme commutatif à carrés cartésiens canonique

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, equal] \arrow[d] & F \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[d] \\ D \arrow[r] & X \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

[1]Nous adoptons les conventions de EGA II pour les fibrés projectifs (4.1.1) et les fibrés vectoriels (1.7.8).

induit un diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[d] \\ C \times_k X \arrow[r, "h"] & Y \times_k X \end{tikzcd}$$

Soit $h'\colon (C \times_k X)_{[F]} \to (Y \times_k X)_{[D]}$ la transformée stricte de h ; c'est une immersion fermée. Il suffit de montrer que $(C\times_k X)_{[F]} \cap (Y \times_k X)_{(D)} = C \times_k U$, ou que le diviseur exceptionnel de $(C \times_k X)_{[F]}$ ne rencontre par $E_{(D)}$, autrement dit qu'il se plonge dans $E_{[D]}$ à travers le lieu à l'infini $\mathbf{P}(f^*(\Omega^1_{Y/k}) \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_X(D))$ (cf. 3.4). On se réduit à montrer que le morphisme canonique de faisceaux conormaux

$$\mathscr{O}_D(-D) \otimes_{\mathscr{O}_D} \mathscr{O}_F \to \mathscr{N}_F(C \times_k X)$$

déduit de la factorisation $F \to C \times_k D \to C \times_k X$ est nul. D'une part, cette dernière s'insère dans la factorisation $F \to C \times_k F \to C \times_k D \to C \times_k X$. D'autre part, le morphisme canonique de faisceaux conormaux $\mathscr{O}_D(-D) \otimes_{\mathscr{O}_D} \mathscr{O}_F \to \mathscr{O}_F(-F)$ est nul à cause de l'inégalité $D \geq 2F$.

Lemme 3.8. *Les hypothèses étant celles de* (3.6)*, soient de plus T un k-schéma, $f_1\colon X \to T$ et $f_2\colon T \to Y$ deux k-morphismes tels que $f = f_2 \circ f_1$. Supposons que f_2 soit plat et que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "f_1 \circ i"] \arrow[d, equal] & T \arrow[d, "f_2"] \\ D \arrow[r, "f \circ i"'] & Y \end{tikzcd}$$

soit cartésien. Alors on a un diagramme commutatif à carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd} E^T_{(D)} \arrow[r] \arrow[d, "e_2"'] & (T \times_k X)_{(D)} \arrow[r] \arrow[d] & (T \times_k X)_{[D]} \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[d, "f_2"] \\ E^Y_{(D)} \arrow[r] & (Y \times_k X)_{(D)} \arrow[r] & (Y \times_k X)_{[D]} \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

où on a noté $E^T_{(D)}$ et $E^Y_{(D)}$ les diviseurs exceptionnels ; de plus e_2 est un isomorphisme.

Cela résulte de 3.3.

§4. Produit Fibré Logarithmique

4.1. Soient k un corps, X (resp. Y) un k-schéma, X_0 (resp. Y_0) un sous-schéma fermé de X (resp. Y). Considérons le diagramme commutatif canonique

$$\begin{tikzcd} Y_0 \arrow[d] & Y_0 \times_k X_0 \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & X_0 \arrow[d] \\ Y & Y \times_k X \arrow[l] \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

On note $(Y \times_k X)'$ l'éclatement de $Y_0 \times_k X_0$ dans $Y \times_k X$, $(Y \times_k X)'_{(X_0)}$ (resp. $(Y \times_k X)'_{(Y_0)}$) la dilatation de $Y_0 \times_k X_0$ dans $Y \times_k X$ par rapport à X_0 (resp. Y_0) et

$$(4.1.1) \qquad (Y \times_k X)'_{(Y_0+X_0)} = (Y \times_k X)'_{(X_0)} \cap (Y \times_k X)'_{(Y_0)}.$$

4.2. Conservons les hypothèses de (4.1), de plus soient $p\colon S \to X$, $q\colon T \to Y$ deux morphismes de schémas, $S_0 = p^{-1}(X_0)$ (resp. $T_0 = q^{-1}(Y_0)$) l'image réciproque de X_0 (resp. Y_0). On note $(T \times_k S)'$ l'éclatement de $T_0 \times_k S_0$ dans $T \times_k S$ et $(T \times_k S)'_{(T_0+S_0)}$ l'ouvert défini comme dans (4.1.1). Alors on a un diagramme commutatif

$$(4.2.1) \qquad \begin{tikzcd} (T \times_k S)'_{(T_0+S_0)} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & (T \times_k S)' \arrow[r] \arrow[d] & T \times_k S \arrow[d, "q\times p"] \\ (Y \times_k X)'_{(Y_0+X_0)} \arrow[r] & (Y \times_k X)' \arrow[r] & Y \times_k X \end{tikzcd}$$

où le carré de gauche est cartésien (2.9). Si q et p sont plats, les deux carrés sont cartésiens.

4.3. Conservons les hypothèses de (4.1), supposons de plus que X_0 et Y_0 soient des diviseurs de Cartier sur X et Y respectivement. Lorsqu'il n'y a aucun risque de confusion, on utilisera la notation $Y \times_k^{\log} X$ pour désigner $(Y \times_k X)'_{(Y_0+X_0)}$, les diviseurs X_0 et Y_0 étant sous-entendus. Les immersions fermées $Y_0 \times_k X \to Y \times_k X$ et $Y \times_k X_0 \to Y \times_k X$ se relèvent en des immersions fermées $Y_0 \times_k X \to (Y \times_k X)'$ et $Y \times_k X_0 \to (Y \times_k X)'$. On voit aussitôt que $Y \times_k^{\log} X$ est l'ouvert complémentaire de $Y_0 \times_k X$ et $Y \times_k X_0$ dans $(Y \times_k X)'$. On note U (resp. V) l'ouvert complémentaire de X_0 dans X (resp. Y_0 dans Y).

On a un diagramme commutatif à carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d] & V \times_k U \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & U \arrow[d] \\ Y & Y \times_k^{\log} X \arrow[l, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"'] & X \end{tikzcd}$$

où les flèches horizontales sont les projections canoniques. Soient $f\colon X \to Y$ un k-morphisme tel que $f^{-1}(Y_0) = X_0$, $\gamma\colon X \to Y \times_k X$ son graphe. Comme $\gamma^{-1}(Y_0 \times_k X_0) = X_0$, il résulte de la propriété universelle des dilatations (2.7) que γ se relève uniquement en une immersion $\gamma^{\log}\colon X \to Y \times_k^{\log} X$, dite *graphe logarithmique* de f.

Remarque 4.4. (i) Si dans (4.3), $X = \mathrm{Spec}(A)$ et $Y = \mathrm{Spec}(B)$ sont affines et X_0 (resp. Y_0) est défini par une équation $s \in A$ (resp. $t \in B$), alors $Y \times_k^{\log} X$ est le schéma affine associé à l'algèbre

$$B \otimes_k A[\mathtt{u}, \mathtt{u}^{-1}]/(t \otimes 1 - 1 \otimes s \cdot \mathtt{u}).$$

(ii) Si dans (4.3), X_0 et Y_0 sont lisses sur k, on retrouve un cas particulier du produit logarithmique défini par Kato et Saito ([13] 4.2.4, [14] 1.1.1).

Lemme 4.5. *Les hypothèses étant celles de* (4.3)*, supposons de plus que Y et Y_0 soient lisses sur k. Alors le morphisme* $\mathrm{pr}_2\colon Y \times_k^{\log} X \to X$ *est lisse et on a un isomorphisme canonique*

$$\Omega^1_{(Y \times_k^{\log} X)/X} \simeq \mathrm{pr}_1^*(\Omega^1_{Y/k}(\log Y_0)),$$

où $\Omega^1_{Y/k}(\log Y_0)$ *est le faisceau des différentielles de Y sur k à pôles logarithmiques le long de Y_0.*

Les questions étant locales, on peut se borner au cas où $X = \mathrm{Spec}(A)$ et $Y = \mathrm{Spec}(B)$ soient affines et X_0 (resp. Y_0) soit défini par une équation $s \in A$ (resp. $t \in B$). Alors $Y \times_k^{\log} X$ est le schéma affine associé à l'algèbre $C = B \otimes_k A[\mathtt{u}, \mathtt{u}^{-1}]/(t \otimes 1 - 1 \otimes s \cdot \mathtt{u})$ (4.4). Comme B et B/tB sont des k-algèbres lisses, la suite

$$0 \longrightarrow C \stackrel{\rho}{\longrightarrow} (\Omega^1_{B/k} \otimes_B C) \oplus C d\mathtt{u} \longrightarrow \Omega^1_{C/A} \longrightarrow 0,$$

où $\rho(1) = dt \otimes 1 - (1 \otimes s) d\mathtt{u}$, est exacte et localement scindée. Le lemme s'ensuit par le critère jacobien.

4.6. Conservons les hypothèses de (4.3), supposons de plus que Y soit séparé sur k. Soient $f\colon X \to Y$ un k-morphisme tel que $f^{-1}(Y_0) = X_0$, D un diviseur de Cartier effectif sur X de même support que X_0. On peut appliquer la construction (3.1) relativement à la projection canonique $\mathrm{pr}_2\colon Y \times_k^{\log} X \to X$ (qui est séparée) et au graphe logarithmique $\gamma^{\log}\colon X \to Y \times_k^{\log} X$ de f ; on obtient un diagramme commutatif à carrés cartésiens

(4.6.1)
$$\begin{tikzcd} E_{(D)} \arrow[r] \arrow[d] & (Y \times_k^{\log} X)_{(D)} \arrow[d] & V \times_k U \arrow[l] \arrow[d] \\ D \arrow[r] & X & U \arrow[l] \end{tikzcd}$$

En vertu de 3.5 et 4.5, si Y et Y_0 sont lisses sur k, on a un isomorphisme canonique

(4.6.2)
$$E_{(D)} \xrightarrow{\sim} \mathbf{V}(f^*(\Omega^1_{Y/k}(\log Y_0)) \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_D(D)).$$

Lemme 4.7. *Les hypothèses étant celles de* (4.6), *soient de plus T un k-schéma, $f_1\colon X \to T$ et $f_2\colon T \to Y$ deux k-morphismes tels que $f = f_2 \circ f_1$. Supposons que f_2 soit plat et que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "f_1\circ i"] \arrow[d, equal] & T \arrow[d, "f_2"] \\ D \arrow[r, "f\circ i"'] & Y \end{tikzcd}$$

soit cartésien. Alors $T_0 = f_2^{-1}(Y_0)$ est un diviseur de Cartier sur T, et on a un diagramme commutatif à carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd} E^T_{(D)} \arrow[r] \arrow[d, "e_2"'] & (T \times_k^{\log} X)_{(D)} \arrow[r] \arrow[d] & (T \times_k^{\log} X)_{[D]} \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[d, "f_2"] \\ E^Y_{(D)} \arrow[r] & (Y \times_k^{\log} X)_{(D)} \arrow[r] & (Y \times_k^{\log} X)_{[D]} \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

où on a noté $E^T_{(D)}$ et $E^Y_{(D)}$ les diviseurs exceptionnels ; de plus e_2 est un isomorphisme.

On note $p\colon T \times_k^{\log} X \to Y \times_k^{\log} X$ la flèche déduite de f_2 (4.2) et $\gamma_1^{\log}\colon X \to T \times_k^{\log} X$ (resp. $\gamma^{\log}\colon X \to Y \times_k^{\log} X$) le graphe logarithmique de f_1 (resp. f).

On a $\gamma^{\log} = p \circ \gamma_1^{\log}$ (2.7). Il résulte de 4.2 que le diagramme

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\gamma_1 \circ i"] \arrow[d, equal] & T \times_k^{\log} X \arrow[r] \arrow[d, "p"] & T \arrow[d, "f_2"] \\ D \arrow[r, "\gamma \circ i"'] & Y \times_k^{\log} X \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

est commutatif et ses carrés sont cartésiens. Le lemme résulte alors de 3.3.

Deuxième partie 2. Analyse micro-locale ℓ-adique

§5. Notations et Conventions

5.1. On désigne par k un corps parfait de caractéristique $p > 0$. Pour toute k-algèbre A, on note $\Omega_A^1 = \Omega_{A/A^p}^1 = \Omega_{A/k}^1$ le module des 1-différentielles absolues de A.

5.2. On désigne par R un anneau de valuation discrète complet qui est une k-algèbre. On note K le corps des fractions de R, F son corps résiduel qu'on suppose *de type fini sur* k, $\mathfrak{m}$ son idéal maximal, π une uniformisante et $\mathtt{v}\colon K^\times \to \mathbb{Z}$ la valuation de K normalisée par $\mathtt{v}(\pi) = 1$. On pose $S = \mathrm{Spec}(R)$, $\eta = \mathrm{Spec}(K)$, $s = \mathrm{Spec}(F)$, $\overline{K}$ une clôture séparable de K, G le groupe de Galois de $\overline{K}$ sur K, $\overline{R}$ la clôture intégrale de R dans $\overline{K}$, $\overline{F}$ son corps résiduel, $\overline{S} = \mathrm{Spec}(\overline{R})$, $\overline{\eta} = \mathrm{Spec}(\overline{K})$ et $\overline{s} = \mathrm{Spec}(\overline{F})$.

5.3. On notera que R est non-canoniquement k-isomorphe à $F[[\pi]]$ (EGA IV 0.19.6.6). Comme F est de type fini sur k, l'endomorphisme de Frobenius de R est fini. Par conséquent, Ω_R^1 est un R-module de type fini ; en particulier, il est complet et séparé pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique. D'autre part, R est une k-algèbre formellement lisse pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique (EGA IV 0.22.2.2). Il résulte alors que Ω_R^1 est un R-module libre de type fini (EGA IV 0.20.4.10) ; on note d son rang.

5.4. On pose $\Omega_R^1(\log)$ le R-module des 1-différentielles logarithmiques absolues défini par

$$\Omega_R^1(\log) = (\Omega_R^1 \oplus (R \otimes_{\mathbb{Z}} K^\times))/\mathscr{F} \tag{5.4.1}$$

où $\mathscr{F}$ est le sous-R-module de $\Omega_R^1 \oplus (R \otimes_{\mathbb{Z}} K^\times)$ engendré par les éléments de la forme $(da, 0) - (0, a \otimes a)$ pour $a \in R - \{0\}$. Pour tout $a \in K^\times$, la classe de

$(0, 1 \otimes a)$ sera notée $d\log(a)$. Il est immédiat de vérifier que l'homomorphisme $\Omega^1_R \oplus R \to \Omega^1_R(\log)$ qui envoie (ω, a) sur $\omega + a d\log\pi$ est surjectif de noyau engendré par $(d\pi, 0) - (0, \pi)$. On a donc un isomorphisme canonique

$$\Omega^1_R \otimes_R K \xrightarrow{\sim} \Omega^1_R(\log) \otimes_R K. \tag{5.4.2}$$

On pose $\Omega^1_F(\log) = \Omega^1_R(\log) \otimes_R F$ et on note $d\log[\pi]$ la classe de $d\log(\pi)$. On voit aussitôt que $\Omega^1_F(\log)$ s'identifie canoniquement au quotient de $\Omega^1_F \oplus (F \otimes_{\mathbb{Z}} K^\times)$ par le sous-F-module engendré par les éléments de la forme $(d\overline{a}, 0) - (0, \overline{a} \otimes a)$ pour $a \in R - \{0\}$ et $\overline{a}$ sa classe dans F. On a alors une suite exacte canonique

$$0 \longrightarrow \Omega^1_F \longrightarrow \Omega^1_F(\log) \xrightarrow{\mathrm{res}} F \longrightarrow 0\ , \tag{5.4.3}$$

où $\mathrm{res}(0, a \otimes b) = a\mathtt{v}(b)$ pour $a \in F$ et $b \in K^\times$, qui est scindée par l'élément $d\log[\pi]$. On en déduit que $\Omega^1_R(\log)$ est engendré par d éléments sur R ; il est donc libre de rang d (5.4.2).

5.5. Pour L une extension finie de K, on pose R_L la clôture intégrale de R dans L, $\eta_L = \mathrm{Spec}(L)$, $S_L = \mathrm{Spec}(R_L)$ et $\mathtt{v}_L \colon L^\times \to \mathbb{Q}$ la valuation de L qui prolonge $\mathtt{v}$ sur K. Pour D un diviseur (de Cartier) effectif sur S_L, on pose $\mathscr{O}_D(D) = \mathscr{O}_{S_L}(D) \otimes_{R_L} \mathscr{O}_D$ et $\mathtt{v}_L(D) = \mathtt{v}_L(f)$, où $f \in L$ est un générateur de $\mathscr{O}_{S_L}(-D)$.

5.6. On désigne par Λ un anneau commutatif noethérien, annulé par un entier inversible dans k et tel que $\mathrm{Spec}(\Lambda)$ soit connexe. Soit $\psi : \mathbb{F}_p \to \Lambda^\times$ un caractère additif non-trivial. Si X est un k-schéma, on note $\mathbf{D}(X) = \mathbf{D}(X, \Lambda)$ la catégorie dérivée des complexes de Λ-modules sur X pour la topologie étale, $\mathbf{D}_{\mathtt{ctf}}(X)$ la sous-catégorie pleine formée des complexes de tor-dimension finie, à cohomologie constructible. On note avec un indice $\mathtt{c}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{D}(X)$ (ou $\mathbf{D}^+(X)$, $\mathbf{D}^-(X)$, $\mathbf{D}^{\mathsf{b}}(X)$) formée des complexes à cohomologie constructible.

5.7. Soient X, Y deux k-schémas, $\mathscr{F}$ (resp. $\mathscr{G}$) un faisceau étale en Λ-modules sur X (resp. Y). On désigne par $\mathscr{F} \boxtimes \mathscr{G}$ et $\mathscr{H}(\mathscr{G}, \mathscr{F})$ les faisceaux sur $X \times_k Y$ définis par

$$\mathscr{F} \boxtimes \mathscr{G} = p_1^*(\mathscr{F}) \otimes_\Lambda p_2^*(\mathscr{G}),$$
$$\mathscr{H}(\mathscr{G}, \mathscr{F}) = \mathscr{H}om(p_2^*(\mathscr{G}), p_1^*(\mathscr{F})),$$

où $p_1 \colon X \times_k Y \to X$ et $p_2 \colon X \times_k Y \to Y$ sont les projections canoniques. On utilisera abusivement les mêmes notations pour designer les foncteurs dérivés des foncteurs ci-dessus.

§6. Algébrisation

6.1. Soient X un k-schéma affine et lisse, $\xi \colon S \to X$ un k-morphisme, $\mathtt{x} = \xi(s)$, A l'anneau local de X en $\mathtt{x}$. On suppose que ξ induit un k-isomorphisme entre les séparés complétés des anneaux locaux $\widehat{A} \simeq R$. On peut construire un tel morphisme ξ de la façon suivante. Comme k est parfait et F est de type fini sur k, il existe un k-schéma affine et lisse X_0 de corps des fonctions rationnelles F ; et comme R est k-isomorphe à $F[[\pi]]$, on peut prendre $X = \mathbb{A}^1_k \times_k X_0$ et $\mathtt{x}$ le point générique d'une fibre spéciale de la projection canonique $X \to \mathbb{A}^1_k$.

On désigne par $\mathfrak{E}$ la catégorie des schémas pointés $(X', \mathtt{x}')$ au dessus de $(X, \mathtt{x})$ tel que le morphisme structural $f \colon X' \to X$ soit affine, étale et induise un isomorphisme $k(\mathtt{x}') \simeq k(\mathtt{x})$. Pour tout objet $(X', \mathtt{x}')$ de $\mathfrak{E}$, on note X'_0 l'adhérence schématique de $\mathtt{x}'$ dans X'. On rappelle qu'il existe un et un unique k-morphisme $\xi' \colon S \to X'$ relevant ξ car S est hensélien (EGA IV 18.6.2).

On note $A^{\mathtt{h}}$ le hensélisé de A, de sorte qu'on ait un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Spec}(A^{\mathtt{h}}) \simeq \varprojlim_{(X', \mathtt{x}') \in \mathfrak{E}} X'.$$

On identifie le séparé complété de $A^{\mathtt{h}}$ avec R (EGA IV 18.6.6). On désigne par $\mathfrak{C}(A^{\mathtt{h}})$ (resp. $\mathfrak{C}(R)$) la catégorie des $A^{\mathtt{h}}$-algèbres (resp. R-algèbres) finies, plates et génériquement étales. Par complétion, où ce qui revient au même par extension des scalaires $A^{\mathtt{h}} \to R$, on obtient une équivalence de catégories ([3] 3.11)

$$\mathfrak{C}(A^{\mathtt{h}}) \to \mathfrak{C}(R). \tag{6.1.1}$$

Lemme 6.2. *Pour tout extension finie séparable L de K, il existe un objet $(X', \mathtt{x}')$ de $\mathfrak{E}$ et un morphisme fini $f \colon Y' \to X'$ vérifiant les conditions suivantes :*

(i) *Y' est lisse sur k et f est étale au dessus de l'ouvert U' complémentaire de X'_0 dans X' ;*

(ii) *Si $\xi' \colon S \to X'$ désigne le relèvement canonique de ξ, on a un S-isomorphisme*

$$Y' \times_{X'} S \simeq S_L; \tag{6.2.1}$$

(iii) *Si de plus L est une extension galoisienne finie de K, alors* (6.2.1) *induit un isomorphisme entre les groupes d'automorphismes* $\mathrm{Aut}_{X'}(Y') \xrightarrow{\sim}$

$\mathrm{Aut}_K(L)$. *En particulier, la restriction de f au dessus de U' est un revêtement étale galoisien de groupe* $\mathrm{Aut}_K(L)$.

Comme k est parfait, il revient au même de demander que Y' soit lisse ou qu'il soit régulier ; donc la condition (i) résulte de (ii) quitte à remplacer X' par un ouvert convenable contenant $\mathtt{x}'$. Les propositions (ii) et (iii) résultent de l'équivalence de catégories (6.1.1) et EGA IV 8.8.2(ii), 8.8.2.5 et 10.8.5.

Lemme 6.3. *Pour tout $\mathscr{F} \in \mathrm{ob}\, \mathbf{D}_{\mathtt{ctf}}(\eta)$, il existe un objet $(X', \mathtt{x}')$ de $\mathfrak{E}$ et si on note U' l'ouvert complémentaire de X'_0 dans X', $\mathscr{G} \in \mathrm{ob}\, \mathbf{D}_{\mathtt{ctf}}(U')$ tel que $\xi'^*_{U'}(\mathscr{G}) \simeq \mathscr{F}$, où $\xi' \colon S \to X'$ est le relèvement canonique de ξ.*

On rappelle que $\mathscr{F}$ est isomorphe à un complexe borné de faisceaux constructibles en Λ-modules plats sur η. Soit L une extension galoisienne finie de K qui trivialise chacun de ces faisceaux. Appliquant 6.2(iii), on en déduit un complexe borné de faisceaux localement constants constructibles en Λ-modules plats $\mathscr{G}$ sur U' tel que $\xi'^*_{U'}(\mathscr{G}) \simeq \mathscr{F}$.

Lemme 6.4. *Le morphisme $\xi \colon S \to X$ est universellement localement acyclique.*

Le morphisme canonique $\mathrm{Spec}(A^{\mathtt{h}}) \to X$ est évidemment universellement localement acyclique. Le morphisme $\mathrm{Spec}(R) \to \mathrm{Spec}(A^{\mathtt{h}})$ déduit de ξ étant régulier (EGA IV 6.8.1), est aussi universellement localement acyclique (SGA 4 XIX 4.1). La preuve de loc. cit. dépend de la résolution des singularités en caractéristique p, mais le théorème de changement de base formel de Fujiwara-Gabber ([8] 7.1.1) permet d'éliminer cette condition. En effet, la résolution des singularités intervient dans la preuve de SGA 4 XIX 4.1 à travers le lemme 2.4, qu'il suffit de remplacer par [8] 7.1.4.

Lemme 6.5. *Soient Y un schéma, $f \colon Y' \to Y$ un morphisme universellement localement acyclique, $\mathscr{F} \in \mathrm{ob}\, \mathbf{D}^-_{\mathtt{c}}(Y)$ et $\mathscr{G} \in \mathrm{ob}\, \mathbf{D}^+(Y)$. Alors l'homomorphisme canonique*

$$f^*\mathrm{R}\mathscr{H}om(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \to \mathrm{R}\mathscr{H}om(f^*\mathscr{F}, f^*\mathscr{G})$$

est un isomorphisme.

Il suffit de calquer SGA 5 I 4.3.

§7. Spécialisation et Micro-Localisation

7.1. Dans cette section, on désigne par $(X, \mathtt{x})$ le k-schéma pointé et $\xi\colon S \to X$ le k-morphisme du (6.1), par L une extension finie séparable de K et par D un diviseur effectif non-nul de S_L. On se donne un K-homomorphisme $\tau\colon L \to \overline{K}$, ce qui détermine deux points géométriques $\overline{\eta} \to S_L$ et $\overline{s} \to S_L$ (5.2). On note X_0 l'adhérence schématique de $\mathtt{x}$ dans X (qui est un diviseur de Cartier), U l'ouvert complémentaire de X_0 dans X, $f\colon S_L \to S$ le morphisme structural et $i\colon D \to S_L$ l'injection canonique.

7.2. On pose $\mathbf{T}_D$ le fibré vectoriel $\mathbf{V}(\Omega^1_R \otimes_R \mathscr{O}_D(D))$ sur D. Appliquons la construction (3.6) au morphisme $\xi \circ f\colon S_L \to X$; on désigne par $(X \times_k S_L)_{(D)}$ la dilatation de $X \times_k S_L$ le long du graphe de $\xi \circ f$ d'épaisseur D. Comme $\xi^*(\Omega^1_{X/k}) \simeq \Omega^1_R$, on a un diagramme commutatif canonique à carrés cartésiens

(7.2.1)
$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{T}_D & \longrightarrow & (X \times_k S_L)_{(D)} & \longleftarrow & X \times_k \eta_L \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ D & \longrightarrow & S_L & \longleftarrow & \eta_L \end{array}$$

7.3. Appliquons la construction (3.6) au morphisme f ; on désigne par $(S \times_k S_L)_{(D)}$ la dilatation de $S \times_k S_L$ le long du graphe de f d'épaisseur D. On a un diagramme commutatif canonique à carrés cartésiens

(7.3.1)
$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{T}_D & \longrightarrow & (S \times_k S_L)_{(D)} & \longleftarrow & S \times_k \eta_L \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ D & \longrightarrow & S_L & \longleftarrow & \eta_L \end{array}$$

Pour le voir, il suffit de noter que ξ est plat et le diagramme

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{f \circ i} & S \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle \xi} \\ D & \xrightarrow[\xi \circ f \circ i]{} & X \end{array}$$

est cartésien. Donc en vertu de 3.8, on a un diagramme commutatif canonique à carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd} E^S_{(D)} \arrow[r] \arrow[d, "e"'] & (S\times_k S_L)_{(D)} \arrow[r] \arrow[d, "\xi_{(D)}"] & S \arrow[d, "\xi"] \\ \mathbf{T}_D \arrow[r] & (X\times_k S_L)_{(D)} \arrow[r] & X \end{tikzcd} \tag{7.3.2}$$

où on a noté $E^S_{(D)}$ le diviseur exceptionnel de $(S\times_k S_L)_{(D)}$; de plus e est un isomorphisme.

Remarque 7.4. On peut développer un analogue formel de (7.3) où l'on remplace $S\times_k S_L$ par son complété le long de D diagonalement plongé.

7.5. On pose $\mathbf{T}^{\mathsf{t}}_D \to D$ le fibré vectoriel dual de $\mathbf{T}_D$, $\overline{\mathbf{T}}_D = \mathbf{T}_D \times_D \overline{s}$, $\overline{\mathbf{T}}^{\mathsf{t}}_D = \mathbf{T}^{\mathsf{t}}_D \times_D \overline{s}$ et

$$\mathfrak{F}\colon \mathbf{D}^+(\overline{\mathbf{T}}_D) \to \mathbf{D}^+(\overline{\mathbf{T}}^{\mathsf{t}}_D) \tag{7.5.1}$$

la transformée de Fourier-Deligne associée au caractère ψ (5.6) ([15] 1.2.1.1). On appelle *foncteur de spécialisation le long de D* et on note

$$\nu_D : \mathbf{D}^+(S\times_k \overline{\eta}) \to \mathbf{D}^+(\overline{\mathbf{T}}_D) \tag{7.5.2}$$

le foncteur des cycles proches ([7] 2.1.1) pour le morphisme $(S\times_k S_L)_{(D)} \to S_L$. On appelle *foncteur de micro-localisation le long de D associé au caractère ψ* et on note

$$\mu_D : \mathbf{D}^+(S\times_k \overline{\eta}) \to \mathbf{D}^+(\overline{\mathbf{T}}^{\mathsf{t}}_D) \tag{7.5.3}$$

le foncteur défini par $\mu_D = \mathfrak{F}\circ \nu_D$.

7.6. Soient L' une extension finie séparable de L, $q\colon S_{L'} \to S_L$ le morphisme structural, $D' = q^{-1}(D)$. D'après 3.2, on a un diagramme cartésien canonique

$$\begin{tikzcd} (S\times_k S_{L'})_{(D')} \arrow[r, "q_{(D)}"] \arrow[d] & (S\times_k S_L)_{(D)} \arrow[d] \\ S_{L'} \arrow[r, "q"] & S_L \end{tikzcd} \tag{7.6.1}$$

La restriction de $q_{(D)}$ au dessus de $\mathbf{T}_D$ identifie $\mathbf{T}_{D'}$ avec $\mathbf{T}_D\times_D D'$. Soit $L' \to \overline{K}$ un K-homomorphisme prolongeant τ (7.1). On en déduit des isomorphismes

$$\overline{q}_D\colon \overline{\mathbf{T}}_{D'} \xrightarrow{\sim} \overline{\mathbf{T}}_D \quad \text{et} \quad \overline{q}^{\mathsf{t}}_D\colon \overline{\mathbf{T}}^{\mathsf{t}}_{D'} \xrightarrow{\sim} \overline{\mathbf{T}}^{\mathsf{t}}_D.$$

Proposition 7.7. *Soient $\mathscr{F}$ un objet de $\mathbf{D}_{\mathtt{ctf}}(\eta)$, $\mathscr{F}_!$ son extension par 0 à S.*

(i) *Les complexes $\nu_D(\mathscr{F}_! \boxtimes \Lambda)$, $\mu_D(\mathscr{F}_! \boxtimes \Lambda)$, $\nu_D(\mathscr{H}(\mathscr{F}_{\overline{\eta}}, \mathscr{F}_!))$ et $\mu_D(\mathscr{H}(\mathscr{F}_{\overline{\eta}}, \mathscr{F}_!))$* (5.7) *sont de tor-dimension finie et leurs cohomologies sont constructibles.*

(ii) *Sous les hypothèses de* (7.6)*, on a des isomorphismes canoniques*

$$\overline{q}_D^*(\nu_D(\mathscr{F}_! \boxtimes \Lambda)) \xrightarrow{\sim} \nu_{D'}(\mathscr{F}_! \boxtimes \Lambda),$$
$$\overline{q}_D^{\mathtt{t}*}(\mu_D(\mathscr{F}_! \boxtimes \Lambda)) \xrightarrow{\sim} \mu_{D'}(\mathscr{F}_! \boxtimes \Lambda),$$

et de même pour $\mathscr{H}(\mathscr{F}_{\overline{\eta}}, \mathscr{F}_!)$.

Reprenons le diagramme (7.3.2) et notons $\Psi_D : \mathbf{D}^+(X \times_k \overline{\eta}) \to \mathbf{D}^+(\overline{\mathbf{T}}_D)$ le foncteur des cycles proches pour le morphisme $(X \times_k S_L)_{(D)} \to S_L$. Il résulte de 6.4 et SGA 4 XVI 1.1 que le morphisme de changement de base $\Psi_D \to \nu_D \circ \xi^*_{(D)}$ ([7] 2.1.7.2) est un isomorphisme. En vertu de 6.3, quitte à remplacer $(X, \mathtt{x})$ par un objet de $\mathfrak{E}$, on peut supposer qu'il existe $\mathscr{G} \in \operatorname{ob} \mathbf{D}_{\mathtt{ctf}}(U)$ tel que $\xi_U^*(\mathscr{G}) \simeq \mathscr{F}$. Si on note $\mathscr{G}_!$ l'extension de $\mathscr{G}$ par 0 à X, alors $\mathscr{G}_! \boxtimes \Lambda$ et $\mathscr{H}(\mathscr{F}_{\overline{\eta}}, \mathscr{G}_!)$ appartiennent à $\mathbf{D}_{\mathtt{ctf}}(X \times_k \overline{\eta})$ ([6] 1.6 et 1.7). D'après 6.4 et 6.5, on a $(\xi \times \mathrm{id}_{\overline{\eta}})^*(\mathscr{H}(\mathscr{F}_{\overline{\eta}}, \mathscr{G}_!)) \simeq \mathscr{H}(\mathscr{F}_{\overline{\eta}}, \mathscr{F}_!)$. La proposition (i) résulte de ce qui précède, [6] 3.2 et [7] 2.1.13. La proposition (ii) résulte de [6] 3.7 ; en effet, on a un diagramme cartésien canonique

$$\begin{tikzcd}
(X \times_k S_{L'})_{(D')} \arrow[r] \arrow[d] & (X \times_k S_L)_{(D)} \arrow[d] \\
S_{L'} \arrow[r, "q"'] & S_L
\end{tikzcd}$$

compatible avec (7.6.1).

Définition 7.8. Soient $\mathscr{F} \in \operatorname{ob} \mathbf{D}_{\mathtt{ctf}}(\eta)$, $\mathscr{F}_!$ son extension par 0 à S.

(i) Soient L une extension finie séparable de K, D un diviseur effectif non-nul de S_L. On pose $\mathtt{C}_D(\mathscr{F})$ le sous-schéma réduit de $\overline{\mathbf{T}}_D^{\mathtt{t}}$ d'espace sous-jacent le support de $\mu_D(\mathscr{H}(\mathscr{F}_{\overline{\eta}}, \mathscr{F}_!))$, c'est à dire la réunion des supports de ses faisceaux de cohomologie.

(ii) Soit $r > 0$ un nombre rationnel. Soient L une extension finie séparable de K, D un diviseur de S_L de valuation $\mathtt{v}_L(D) = r$ (cf. 5.5). On pose $\overline{\mathbf{T}}_r = \overline{\mathbf{T}}_D$, $\overline{\mathbf{T}}_r^{\mathtt{t}} = \overline{\mathbf{T}}_D^{\mathtt{t}}$ et $\mathtt{C}_r(\mathscr{F}) = \mathtt{C}_D(\mathscr{F})$. Ces définitions ne dépendent pas du choix de L à un isomorphisme canonique près (7.7).

On notera que pour $\mathscr{F}$ un faisceau étale constructible en Λ-modules plats sur η, $\mathtt{C}_D(\mathscr{F})$ coïncide avec le support de $\mu_D(\mathscr{F}_! \boxtimes \Lambda)$.

§8. Spécialisation et Micro-Localisation : Une Variante Logarithmique

8.1. Conservons les hypothèses de (7.1). On pose Θ_D le fibré vectoriel $\mathbf{V}(\Omega^1_R(\log)\otimes_R \mathscr{O}_D(D))$ sur D, $X\times_k^{\log} S_L$ et $S\times_k^{\log} S_L$ les produits fibrés logarithmiques relativement aux diviseurs de Cartier X_0 sur X, s sur S et l'image réciproque s_L de s sur S_L (4.3). Comme $\xi^{-1}(X_0)=s$, on peut appliquer la construction (4.6) au morphisme $\xi\circ f$; on désigne par $(X\times_k^{\log} S_L)_{(D)}$ la dilatation de $X\times_k^{\log} S_L$ le long du graphe logarithmique de $\xi\circ f$ d'épaisseur D. Le corps k étant parfait, X_0 est lisse sur k au voisinage de son point générique $\mathtt{x}$. Donc il résulte de (4.6.2) qu'on a un diagramme commutatif canonique à carrés cartésiens

(8.1.1)
$$\begin{tikzcd}
\Theta_D \arrow[r] \arrow[d] & (X\times_k^{\log} S_L)_{(D)} \arrow[d] & U\times_k \eta_L \arrow[l] \arrow[d] \\
D \arrow[r] & S_L & \eta_L \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

8.2. Appliquons la construction (4.6) au morphisme f ; on désigne par $(S\times_k^{\log} S_L)_{(D)}$ la dilatation de $S\times_k^{\log} S_L$ le long du graphe logarithmique de f d'épaisseur D. On a un diagramme commutatif canonique à carrés cartésiens

(8.2.1)
$$\begin{tikzcd}
\Theta_D \arrow[r] \arrow[d] & (S\times_k^{\log} S_L)_{(D)} \arrow[d] & \eta\times_k \eta_L \arrow[l] \arrow[d] \\
D \arrow[r] & S_L & \eta_L \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Pour le voir, il suffit de noter que ξ est plat et le diagramme

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "f\circ i"] \arrow[d, equal] & S \arrow[d, "\xi"] \\
D \arrow[r, "\xi\circ f\circ i"'] & X
\end{tikzcd}$$

est cartésien. Donc en vertu de 4.7, on a un diagramme commutatif canonique à carrés cartésiens

(8.2.2)
$$\begin{tikzcd}
E^S_{(D)} \arrow[r] \arrow[d, "e"'] & (S\times_k^{\log} S_L)_{(D)} \arrow[r] \arrow[d, "\xi_{(D)}"] & S \arrow[d, "\xi"] \\
\Theta_D \arrow[r] & (X\times_k^{\log} S_L)_{(D)} \arrow[r] & X
\end{tikzcd}$$

où on a noté $E^S_{(D)}$ le diviseur exceptionnel de $(S \times^{\log}_k S_L)_{(D)}$; de plus e est un isomorphisme.

8.3. On pose $\Theta^{\mathtt{t}}_D \to D$ le fibré vectoriel dual de Θ_D, $\overline{\Theta}_D = \Theta_D \times_D \overline{s}$, $\overline{\Theta}^{\mathtt{t}}_D = \Theta^{\mathtt{t}}_D \times_D \overline{s}$ et

$$\mathfrak{F}\colon \mathbf{D}^+(\overline{\Theta}_D) \to \mathbf{D}^+(\overline{\Theta}^{\mathtt{t}}_D) \tag{8.3.1}$$

la transformée de Fourier-Deligne associée au caractère ψ (5.6) ([15] 1.2.1.1). On appelle *foncteur de spécialisation logarithmique le long de D* et on note

$$\nu^{\log}_D : \mathbf{D}^+(\eta \times_k \overline{\eta}) \to \mathbf{D}^+(\overline{\Theta}_D)$$

le foncteur des cycles proches pour le morphisme $(S \times^{\log}_k S_L)_{(D)} \to S_L$. On appelle *foncteur de micro-localisation logarithmique le long de D associé au caractère ψ* et on note

$$\mu^{\log}_D : \mathbf{D}^+(\eta \times_k \overline{\eta}) \to \mathbf{D}^+(\overline{\Theta}^{\mathtt{t}}_D)$$

le foncteur défini par $\mu^{\log}_D = \mathfrak{F} \circ \nu^{\log}_D$.

8.4. Soient L' une extension finie séparable de L, $q\colon S_{L'} \to S_L$ le morphisme structural, $D' = q^{-1}(D)$. D'après 4.2, on a un diagramme cartésien canonique

$$\begin{tikzcd} S \times^{\log}_k S_{L'} \arrow[r] \arrow[d] & S \times^{\log}_k S_L \arrow[d] \\ S_{L'} \arrow[r, "q"] & S_L \end{tikzcd}$$

et le graphe logarithmique de $f \circ q$ est déduit de celui de f par le changement de base q. Il en résulte par 3.2 un diagramme cartésien canonique

$$\begin{tikzcd} (S \times^{\log}_k S_{L'})_{(D')} \arrow[r, "q_{(D)}"] \arrow[d] & (S \times^{\log}_k S_L)_{(D)} \arrow[d] \\ S_{L'} \arrow[r, "q"] & S_L \end{tikzcd} \tag{8.4.1}$$

La restriction de $q_{(D)}$ au dessus de Θ_D identifie $\Theta_{D'}$ avec $\Theta_D \times_D D'$. Soit $L' \to \overline{K}$ un K-homomorphisme prolongeant τ (7.1). On en déduit des isomorphismes

$$\overline{q}_D\colon \overline{\Theta}_{D'} \xrightarrow{\sim} \overline{\Theta}_D \quad \text{et} \quad \overline{q}^{\mathtt{t}}_D\colon \overline{\Theta}^{\mathtt{t}}_{D'} \xrightarrow{\sim} \overline{\Theta}^{\mathtt{t}}_D.$$

Proposition 8.5. *Soit $\mathscr{F}$ un objet de $\mathbf{D}_{\mathtt{ctf}}(\eta)$.*

(i) *Les complexes* $\nu_D^{\log}(\mathscr{F} \boxtimes \Lambda)$, $\mu_D^{\log}(\mathscr{F} \boxtimes \Lambda)$, $\nu_D^{\log}(\mathscr{H}(\mathscr{F}_{\overline{\eta}}, \mathscr{F}))$, *et* $\mu_D^{\log}(\mathscr{H}(\mathscr{F}_{\overline{\eta}}, \mathscr{F}))$ (5.7) *sont de tor-dimension finie et leurs cohomologies sont constructibles.*

(ii) *Sous les hypothèses de* (8.4), *on a des isomorphismes canoniques*

$$\overline{q}_D^*(\nu_D^{\log}(\mathscr{F} \boxtimes \Lambda)) \xrightarrow{\sim} \nu_{D'}^{\log}(\mathscr{F} \boxtimes \Lambda),$$
$$\overline{q}_D^{\mathtt{t}*}(\mu_D^{\log}(\mathscr{F} \boxtimes \Lambda)) \xrightarrow{\sim} \mu_{D'}^{\log}(\mathscr{F} \boxtimes \Lambda),$$

et de même pour $\mathscr{H}(\mathscr{F}_{\overline{\eta}}, \mathscr{F})$.

Il suffit de calquer la démonstration de 7.7, en utilisant le diagramme (8.2.2) au lieu du diagramme (7.3.2)

Définition 8.6. Soit $\mathscr{F} \in \operatorname{ob} \mathbf{D}_{\mathtt{ctf}}(\eta)$.

(i) Soient L une extension finie séparable de K, D un diviseur effectif de S_L. On pose $\mathtt{C}_D^{\log}(\mathscr{F})$ le sous-schéma réduit de $\overline{\Theta}_D^{\mathtt{t}}$ d'espace sous-jacent le support de $\mu_D^{\log}(\mathscr{H}(\mathscr{F}_{\overline{\eta}}, \mathscr{F}))$, c'est à dire la réunion des supports de ses faisceaux de cohomologie.

(ii) Soit $r > 0$ un nombre rationnel. On fixe une extension finie séparable L de K telle qu'il existe un diviseur effectif D de S_L de valuation $\mathtt{v}_L(D) = r$ (cf. 5.5). On pose $\overline{\Theta}_r = \overline{\Theta}_D$, $\overline{\Theta}_r^{\mathtt{t}} = \overline{\Theta}_D^{\mathtt{t}}$ et $\mathtt{C}_r^{\log}(\mathscr{F}) = \mathtt{C}_D^{\log}(\mathscr{F})$. Ces définitions ne dépendent pas du choix de L à un isomorphisme canonique près (8.5).

On notera que pour $\mathscr{F}$ un faisceau étale constructible en Λ-modules plats sur η, $\mathtt{C}_D^{\log}(\mathscr{F})$ coïncide avec le support de $\mu_D^{\log}(\mathscr{F} \boxtimes \Lambda)$.

§9. Les Conjectures de l'Isogénie

9.1. On désigne par $(G^r)_{\mathbb{Q}_{\geq 0}}$ la filtration de ramification supérieure de $G = \operatorname{Gal}(\overline{K}/K)$ et par $(G^r_{\log})_{\mathbb{Q}_{\geq 0}}$ la filtration logarithmique définies dans [1]. On renvoie à *loc. cit.* pour la définition des sous-groupes G^{r+} et $G^{r+}_{\log}$.

Définition 9.2. Soient $\mathscr{F}$ un faisceau étale constructible en Λ-modules sur η, $r \geq 0$ un nombre rationnel.

(i) On dit que r est une *pente critique* de $\mathscr{F}$ si $(\mathscr{F}_{\overline{\eta}})^{G^r} \subsetneq (\mathscr{F}_{\overline{\eta}})^{G^{r+}}$.

(ii) On dit que r est une *pente logarithmique critique* de $\mathscr{F}$ si $(\mathscr{F}_{\overline{\eta}})^{G^r_{\log}} \subsetneq (\mathscr{F}_{\overline{\eta}})^{G^{r+}_{\log}}$.

On notera qu'un faisceau irréductible a une unique pente critique.

Conjecture 9.3. Soient $\mathscr{F}$ un faisceau étale constructible en Λ-modules plats sur η, $r > 1$ une pente critique de $\mathscr{F}$. On suppose que $(\mathscr{F}_{\overline{\eta}})^{G^r} = 0$ et $(\mathscr{F}_{\overline{\eta}})^{G^{r+}} = \mathscr{F}_{\overline{\eta}}$, de sorte que r soit l'unique pente critique de $\mathscr{F}$. Alors $\mathtt{C}_r(\mathscr{F})$ est un ensemble fini de points de $\overline{\mathbf{T}}^{\mathtt{t}}_r$ ne contenant pas l'origine (cf. 7.8).

Conjecture 9.4. Soient $\mathscr{F}$ un faisceau étale constructible en Λ-modules plats sur η, $r > 0$ une pente logarithmique critique. On suppose que $(\mathscr{F}_{\overline{\eta}})^{G^r_{\log}} = 0$ et $(\mathscr{F}_{\overline{\eta}})^{G^{r+}_{\log}} = \mathscr{F}_{\overline{\eta}}$, de sorte que r soit l'unique pente logarithmique critique de $\mathscr{F}$. Alors $\mathtt{C}^{\log}_r(\mathscr{F})$ est un ensemble fini de points de $\overline{\Theta}^{\mathtt{t}}_r$ ne contenant pas l'origine (cf. 8.6).

Ces conjectures ne dependent pas du choix de ψ ; comme $\mathrm{Spec}(\Lambda)$ est connexe (5.6), un autre choix aura pour effet de multiplier $\mathtt{C}_r(\mathscr{F})$ et $\mathtt{C}^{\log}_r(\mathscr{F})$ par un entier premier à p.

9.5. Pour tout nombre rationnel r, on désigne par $\mathfrak{m}^{(r)}$ l'idéal fractionnaire de $\overline{R}$ formé des $x \in \overline{K}$ tel que $\mathtt{v}(x) \geq r$. On pose $\overline{\mathbf{T}} = \mathbf{V}(\Omega^1_R \otimes_R \overline{F})$, $\overline{\mathbf{T}}^{\mathtt{t}}$ le $\overline{s}$-fibré vectoriel dual et

$$\overline{\mathbf{T}}^{\mathtt{t}}_r \times_{\overline{s}} \mathbf{V}(\mathfrak{m}^{(-r)} \otimes_{\overline{R}} \overline{F}) \to \overline{\mathbf{T}}^{\mathtt{t}} \tag{9.5.1}$$

le morphisme de multiplication. On définit de même des variantes logarithmiques $\overline{\Theta}$, $\overline{\Theta}^{\mathtt{t}}$...

Définition 9.6. (i) Sous les hypothèses de 9.3, on appelle *variété caractéristique de $\mathscr{F}$* et on note $\mathtt{SS}(\mathscr{F})$ le cône de $\overline{\mathbf{T}}^{\mathtt{t}}$ engendré par $\mathtt{C}_r(\mathscr{F})$.

(ii) Sous les hypothèses de 9.4, on appelle *variété caractéristique logarithmique de $\mathscr{F}$* et on note $\mathtt{SS}_{\log}(\mathscr{F})$ le cône de $\overline{\Theta}^{\mathtt{t}}$ engendré par $\mathtt{C}^{\log}_r(\mathscr{F})$.

Remarque 9.7. La conjecture 9.3 (resp. 9.4) implique que $\mathtt{SS}(\mathscr{F})$ (resp. $\mathtt{SS}_{\log}(\mathscr{F})$) est de dimension un. Ces cônes ne dependent pas du choix de ψ.

9.8. On pose

$$\mathrm{H}^1(K) = \varinjlim_{n \geq 1} \mathrm{H}^1(K, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \tag{9.8.1}$$

où la limite inductive est prise relativement aux homomorphismes $\mathrm{H}^1(K, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^1(K, \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})$ déduits des homomorphismes $\cdot m \colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$. On définit de même les sous-groupes de $\mathrm{H}^1(K)$

$$\mathrm{H}^1(K)[p^\infty] = \varinjlim_{m\geq 1} \mathrm{H}^1(K, \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}), \tag{9.8.2}$$

$$\mathrm{H}^1(K)[p'] = \varinjlim_{(n,p)=1} \mathrm{H}^1(K, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}). \tag{9.8.3}$$

Pour $\chi \in \mathrm{H}^1(K)$, on rappelle dans (10.16) (resp. (11.15)) les définitions des conducteurs de Swan de Kato $\mathrm{sw}(\chi)$ et $\mathrm{rsw}(\chi)$ (resp. des conducteurs de Swan modifiés de Kato-Matsuda $\mathrm{sw}'(\chi)$ et $\mathrm{rsw}'(\chi)$).

9.9. Soient $n \geq 1$ un entier, $\chi \in \mathrm{H}^1(K, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. On suppose que n est un multiple de p et Λ contient une racine n-ème primitive de l'unité. On fixe un homomorphisme injectif $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \Lambda^\times$ tel que le composé $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \Lambda^\times$ avec la multiplication par n/p soit le caractère ψ (5.6). On note encore $\chi\colon G \to \Lambda^\times$ le caractère induit par χ et $\mathscr{F}$ le faisceau étale en Λ-modules de rang 1 associé sur η.

Théorème 9.10. *Les hypothèses étant celles de* (9.9)*, supposons de plus que* $\mathrm{sw}'(\chi) > 1$.

(i) *L'unique pente critique de $\mathscr{F}$ est l'entier $r = \mathrm{sw}'(\chi) + 1$.*

(ii) *La conjecture* (9.3) *est satisfaite par $\mathscr{F}$. Plus précisément, $\mathtt{C}_r(\mathscr{F})$ est le point de $\overline{\mathbf{T}}_r^{\mathtt{t}}$ défini par*

$$-\mathrm{rsw}'(\chi)\colon F \to \Omega^1_R \otimes_R (\mathfrak{m}^{-r}/\mathfrak{m}^{-r+1}).$$

Ce théorème est démontré dans la section 12.

Théorème 9.11. *Les hypothèses étant celles de* (9.9)*, supposons de plus que* $\mathrm{sw}(\chi) \geq 1$.

(i) *L'unique pente logarithmique critique de $\mathscr{F}$ est l'entier $r = \mathrm{sw}(\chi)$.*

(ii) *La conjecture* (9.4) *est satisfaite par $\mathscr{F}$. Plus précisément, $\mathtt{C}_r^{\log}(\mathscr{F})$ est le point de $\overline{\Theta}_r^{\mathtt{t}}$ défini par*

$$-\mathrm{rsw}(\chi)\colon F \to \Omega^1_R(\log) \otimes_R (\mathfrak{m}^{-r}/\mathfrak{m}^{-r+1}).$$

Ce théorème est démontré dans la section 13.

Corollaire 9.12. *Soient $\chi \in \mathrm{H}^1(K) \simeq \mathrm{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, $n \geq 0$ un entier, r un nombre rationnel tel que $n < r \leq n+1$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\chi \in \mathrm{fil}_n\mathrm{H}^1(K)$*, le n-ème cran de la filtration de Kato* (10.4.1) ;

(ii) $\chi(G_{\log}^{n+}) = 0$;
(iii) $\chi(G_{\log}^{r}) = 0$.

Il suffit de voir que si $\chi \neq 0$, alors $\chi(G_{\log}^{\mathrm{sw}(\chi)+}) = 0$ et $\chi(G_{\log}^{\mathrm{sw}(\chi)}) \neq 0$. Cela résulte de 9.11(i) si $\mathrm{sw}(\chi) \geq 1$, et de [11] 6.1 et [1] part I 3.15 si $\mathrm{sw}(\chi) = 0$.

Remarque 9.13. Conservons les hypothèses de 9.9 et supposons de plus que χ soit d'ordre p, autrement dit, que $\mathscr{F}$ soit un faisceau d'Artin-Schreier. Le groupe $\mathrm{H}^1(K, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ se calcule par la suite exacte d'Artin-Schreier ; en particulier, on a un homomorphisme surjectif canonique $\delta_1 \colon K \to \mathrm{H}^1(K, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ (10.2.1). Si f est un élément non-nul de K, le faisceau $\mathscr{F}$ associé au caractère $\chi = \delta_1(f)$ se trivialise par l'extension de K définie par l'équation $X^p - X - f = 0$. Posons $r = -\mathtt{v}(f)$ et supposons cet entier > 0 et premier à p. On verra dans la section 10 que l'on a $\mathrm{sw}(\chi) = r$ et que $\mathrm{rsw}(\chi)$ est la classe de la différentiellle $-df$, considérée comme un élément du sous-module $\mathfrak{m}^{-r}\Omega^1_R(\log)$ de Ω^1_K, dans le quotient $\Omega^1_R(\log) \otimes_R (\mathfrak{m}^{-r}/\mathfrak{m}^{-r+1})$. Il résulte alors du théorème 9.11 que l'unique pente logarithmique de $\mathscr{F}$ est r et que $\mathtt{C}_r^{\log}(\mathscr{F})$ est le point df du fibré cotangent logarithmique tordu $\Omega^1_R(\log) \otimes_R (\mathfrak{m}^{-r}/\mathfrak{m}^{-r+1})$.

Remarque 9.14. Soient X un k-schéma lisse, U un ouvert de X complémentaire d'un diviseur à croisements normaux stricts, $\mathscr{F}$ un faisceau étale localement constant constructible en Λ-modules libres de rang un sur U. Kato ([12] 7.1) a montré que son conducteur de Swan raffiné se globalise. Le théorème 9.11 montre alors que notre notion de variété caractéristique permet de reconstruire celle de Kato localement en les points génériques du diviseur de ramification de $\mathscr{F}$. Pour une comparaison avec l'aspect global de la théorie de Kato, on renvoie à [2] Section 4.

Théorème 9.15. *Les conjectures* (9.3) *et* (9.4) *sont vérifiées si* $F = k$.

Ce théorème est démontré dans 14.7.

§10. Ramification des Caractères d'Artin-Schreier-Witt

10.1. Soient $m \geq 0$ un entier, $\mathrm{W}_{m+1}(K)$ l'anneau des vecteurs de Witt de longueur $m+1$. Suivant [5, 11], pour tout entier n, on pose $\mathrm{fil}_n \mathrm{W}_{m+1}(K)$ le sous-ensemble de $\mathrm{W}_{m+1}(K)$ formé des éléments $(x_0, \dots, x_m)$ tel que

(10.1.1) $$p^{m-i}\mathtt{v}(x_i) \geq -n \text{ pour tout } 0 \leq i \leq m.$$

On obtient ainsi une filtration croissante exhaustive de $\mathrm{W}_{m+1}(K)$ par des sous-groupes ([5] 1). On pose

$$\mathrm{Gr}_n \mathrm{W}_{m+1}(K) = \mathrm{fil}_n \mathrm{W}_{m+1}(K) / \mathrm{fil}_{n-1} \mathrm{W}_{m+1}(K).$$

Soit $\mathrm{V} : \mathrm{W}_{m+1}(K) \to \mathrm{W}_{m+2}(K)$ l'homomorphisme de décalage. On a clairement

$$\mathrm{V}(\mathrm{fil}_n \mathrm{W}_{m+1}(K)) \subset \mathrm{fil}_n \mathrm{W}_{m+2}(K). \tag{10.1.2}$$

10.2. Soit $\mathrm{F} : \mathrm{W}_{m+1} \to \mathrm{W}_{m+1}$ l'endomorphisme de Frobenius. La suite exacte de $\eta_{\text{ét}}$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p^{m+1}\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{W}_{m+1} \xrightarrow{\mathrm{F}-1} \mathrm{W}_{m+1} \longrightarrow 0$$

induit par passage à la cohomologie un homomorphisme connectant surjectif

$$\delta_{m+1} : \mathrm{W}_{m+1}(K) \to \mathrm{H}^1(K, \mathbb{Z}/p^{m+1}\mathbb{Z}). \tag{10.2.1}$$

On vérifie immédiatement que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{W}_{m+1}(K) \arrow[r, "\delta_{m+1}"] \arrow[d, "\mathrm{V}"'] & \mathrm{H}^1(K, \mathbb{Z}/p^{m+1}\mathbb{Z}) \arrow[d, "\cdot p"] \\ \mathrm{W}_{m+2}(K) \arrow[r, "\delta_{m+2}"'] & \mathrm{H}^1(K, \mathbb{Z}/p^{m+2}\mathbb{Z}) \end{tikzcd} \tag{10.2.2}$$

est commutatif.

10.3. On pose

$$\mathrm{fil}_n \mathrm{H}^1(K, \mathbb{Z}/p^{m+1}\mathbb{Z}) = \delta_{m+1}(\mathrm{fil}_n \mathrm{W}_{m+1}(K)). \tag{10.3.1}$$

On obtient ainsi une filtration croissante exhaustive de $\mathrm{H}^1(K, \mathbb{Z}/p^{m+1}\mathbb{Z})$. On note

$$\mathrm{Gr}_n \mathrm{H}^1(K, \mathbb{Z}/p^{m+1}\mathbb{Z}) = \mathrm{fil}_n \mathrm{H}^1(K, \mathbb{Z}/p^{m+1}\mathbb{Z})/\mathrm{fil}_{n-1} \mathrm{H}^1(K, \mathbb{Z}/p^{m+1}\mathbb{Z}).$$

10.4. En vertu de (10.1.2) et (10.2.2), (10.3.1) définit par passage à la limite inductive une filtration croissante exhaustive $(\mathrm{fil}_n \mathrm{H}^1(K)[p^\infty])_{n\in\mathbb{Z}}$ de $\mathrm{H}^1(K)[p^\infty]$ (cf. 9.8). Pour $n \geq 0$, on pose

$$\mathrm{fil}_n \mathrm{H}^1(K) = \mathrm{H}^1(K)[p'] + \mathrm{fil}_n \mathrm{H}^1(K)[p^\infty]. \tag{10.4.1}$$

Pour $n \geq 1$, on a
(10.4.2)

$$\mathrm{Gr}_n \mathrm{H}^1(K) = \mathrm{fil}_n \mathrm{H}^1(K)/\mathrm{fil}_{n-1} \mathrm{H}^1(K) \simeq \mathrm{fil}_n \mathrm{H}^1(K)[p^\infty]/\mathrm{fil}_{n-1} \mathrm{H}^1(K)[p^\infty].$$

10.5. Soit $\mathrm{F} : \mathrm{W}_{\bullet+1}\Omega^1_K \to \mathrm{W}_\bullet\Omega^1_K$ l'endomorphisme de Frobenius du complexe de de Rham-Witt. L'homomorphisme

$$\mathrm{F}^m d : \mathrm{W}_{m+1}(K) \to \Omega^1_K \tag{10.5.1}$$

est donné par la formule

$$\mathrm{F}^m d(x_0, \dots, x_m) = \sum_{i=0}^{m} x_i^{p^{m-i}-1} dx_i. \tag{10.5.2}$$

En effet, posons $x = (x_0, \dots, x_m)$ et $x_+ = (x_1, \dots, x_m)$, de sorte que $x = x_0 + \mathrm{V}(x_+)$. En vertu de la relation $\mathrm{F}d\mathrm{V} = d : \mathrm{W}_m(K) \to \mathrm{W}_m\Omega^1_K$ ([9] I (2.18.3)), on a $\mathrm{F}^m d(x) = \mathrm{F}^m d(x_0) + \mathrm{F}^{m-1} d(x_+)$. Il suffit donc de vérifier que $\mathrm{F}^m d(x_0) = x_0^{p^m-1} dx_0$, ce qui résulte de [9] I (2.18.5).

10.6. On définit une filtration croissante exhaustive de Ω^1_K en posant, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{fil}_n\Omega^1_K$ l'image du morphisme canonique $\Omega^1_R(\log) \otimes_R \mathfrak{m}^{-n} \to \Omega^1_K$. On a alors

$$\mathrm{Gr}_n\Omega^1_K = \mathrm{fil}_n\Omega^1_K/\mathrm{fil}_{n-1}\Omega^1_K \simeq \Omega^1_F(\log) \otimes_F (\mathfrak{m}^{-n}/\mathfrak{m}^{-n+1}).$$

Il est clair que

$$\mathrm{F}^m d(\mathrm{fil}_n\mathrm{W}_{m+1}(K)) \subset \mathrm{fil}_n\Omega^1_K. \tag{10.6.1}$$

On en déduit un homomorphisme canonique

$$\mathrm{gr}_n(\mathrm{F}^m d) : \mathrm{Gr}_n\mathrm{W}_{m+1}(K) \to \mathrm{Gr}_n\Omega^1_K. \tag{10.6.2}$$

Il résulte de (10.1.2) et la relation $\mathrm{F}^{m+1}d\mathrm{V} = \mathrm{F}^m d : \mathrm{W}_{m+1}(K) \to \Omega^1_K$ qu'on a

$$\mathrm{gr}_n(\mathrm{F}^m d) = \mathrm{gr}_n(\mathrm{F}^{m+1} d) \circ \mathrm{V}. \tag{10.6.3}$$

Proposition 10.7 ([11] 3.2). *Pour tout entier $n \geq 1$, il existe un et un unique homomorphisme*

$$\psi_{m,n} : \mathrm{Gr}_n\mathrm{H}^1(K, \mathbb{Z}/p^{m+1}\mathbb{Z}) \to \mathrm{Gr}_n\Omega^1_K \tag{10.7.1}$$

rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Gr}_n\mathrm{W}_{m+1}(K) \arrow[r, "-\mathrm{gr}_n(\mathrm{F}^m d)"] \arrow[d, "\mathrm{gr}_n(\delta_{m+1})"'] & \mathrm{Gr}_n\Omega^1_K \\ \mathrm{Gr}_n\mathrm{H}^1(K, \mathbb{Z}/p^{m+1}\mathbb{Z}) \arrow[ur, "\psi_{m,n}"'] & \end{tikzcd} \tag{10.7.2}$$

L'homomorphisme δ_{m+1} induit un isomorphisme

$$\frac{\mathrm{fil}_n \mathrm{W}_{m+1}(K)}{\mathrm{fil}_{n-1}\mathrm{W}_{m+1}(K) + \mathrm{fil}_n \mathrm{W}_{m+1}(K) \cap (\mathrm{F}-1)\mathrm{W}_{m+1}(K)} \simeq \mathrm{Gr}_n \mathrm{H}^1(K, \mathbb{Z}/p^{m+1}\mathbb{Z}).$$

Il suffit donc de montrer que

$$\mathrm{F}^m d(\mathrm{fil}_n \mathrm{W}_{m+1}(K) \cap (\mathrm{F}-1)\mathrm{W}_{m+1}(K)) \subset \mathrm{fil}_{n-1}\Omega^1_K. \tag{10.7.3}$$

Soient $s \geq 1$ un entier, $y \in \mathrm{fil}_s \mathrm{W}_{m+1}(K) - \mathrm{fil}_{s-1}\mathrm{W}_{m+1}(K)$. On vérifie facilement que $\mathrm{F}(y) \in \mathrm{fil}_{ps}\mathrm{W}_{m+1}(K) - \mathrm{fil}_{ps-1}\mathrm{W}_{m+1}(K)$; d'où $x = \mathrm{F}(y) - y \in \mathrm{fil}_{ps}\mathrm{W}_{m+1}(K) - \mathrm{fil}_{ps-1}\mathrm{W}_{m+1}(K)$. On conclut que si $x = \mathrm{F}(y) - y \in \mathrm{fil}_n \mathrm{W}_{m+1}(K)$ alors $y \in \mathrm{fil}_{[\frac{n}{p}]}\mathrm{W}_{m+1}(K)$, où $[-]$ est la partie entière. La relation $d\mathrm{F} = p\mathrm{F}d : \mathrm{W}_{m+2}(K) \to \mathrm{W}_{m+1}\Omega^1_K$ ([9] I (2.18.2)) entraîne que $\mathrm{F}^m d(x) = -\mathrm{F}^m d(y)$. L'inclusion (10.7.3) résulte alors de (10.6.1) puisque $[\frac{n}{p}] \leq n-1$ pour $n \geq 1$.

10.8. Soit $n \geq 1$ un entier. Il résulte de (10.2.2), (10.6.3) et 10.7 qu'on a un triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Gr}_n \mathrm{H}^1(K, \mathbb{Z}/p^{m+1}\mathbb{Z}) \arrow[r, "\psi_{m,n}"] \arrow[d, ".p"'] & \mathrm{Gr}_n \Omega^1_K \\ \mathrm{Gr}_n \mathrm{H}^1(K, \mathbb{Z}/p^{m+2}\mathbb{Z}) \arrow[ur, "\psi_{m+1,n}"'] & \end{tikzcd} \tag{10.8.1}$$

Le foncteur "limite inductive" étant exact à droite, on en déduit un homomorphisme

$$\psi_n : \mathrm{Gr}_n \mathrm{H}^1(K) \to \mathrm{Gr}_n \Omega^1_K. \tag{10.8.2}$$

10.9. Pour tout entier $q \geq 0$, on pose $\mathrm{Z}^q\Omega^\bullet_F = \ker(d : \Omega^q_F \to \Omega^{q+1}_F)$, $\mathrm{B}^q\Omega^\bullet_F = d(\Omega^{q-1}_F)$,

$$\mathrm{C}^{-1} : \Omega^q_F \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(\Omega^\bullet_F) = \mathrm{Z}^q\Omega^\bullet_F / \mathrm{B}^q\Omega^\bullet_F \tag{10.9.1}$$

l'isomorphisme de Cartier inverse, $\mathrm{C} : \mathrm{Z}^q\Omega^\bullet_F \to \Omega^q_F$ l'opération de Cartier. Pour tout entier $r \geq 0$, on considère les sous-groupes

$$\mathrm{B}_r\Omega^q_F \subset \mathrm{Z}_r\Omega^q_F \subset \Omega^q_F$$

définis dans [9] 0 (2.2.2). On note $\mathrm{C}^r : \mathrm{Z}_r\Omega^q_F \to \Omega^q_F$ l'opération de Cartier itérée r fois.

Lemme 10.10. *Soient $(y_1,\dots,y_c)$ une p-base de F, $I_c=\{0,\dots,p-1\}^c$, $I'_c=I_c-\{(0,\dots,0)\}$. Pour $\underline{k}=(k_1,\dots,k_c)\in I_c$, on pose $\mathrm{y}^{\underline{k}}=\prod_{i=1}^c y_i^{k_i}$. Soit $r\geq 1$ un entier. Alors tout élément de $\mathrm{B}_r\Omega^1_F$ peut s'écrire d'une unique manière sous la forme*

$$\sum_{0\leq j\leq r-1}\sum_{\underline{k}\in I'_c} x_{\underline{k},j}^{p^{j+1}}(\mathrm{y}^{\underline{k}})^{p^j}\sum_{1\leq i\leq c} k_i\frac{dy_i}{y_i}, \tag{10.10.1}$$

où $x_{\underline{k},j}$ (pour $0\leq j\leq r-1$ et $\underline{k}\in I'_c$) sont des éléments de F.

L'énoncé est immédiat pour $r=1$. Par définition, (10.9.1) induit un isomorphisme $\mathrm{C}^{-1}\colon \mathrm{B}_r\Omega^1_F\xrightarrow{\sim}\mathrm{B}_{r+1}\Omega^1_F/\mathrm{B}_1\Omega^1_F$. Le lemme s'en déduit par récurrence sur r.

10.11. Soit $n=mp^r$ un entier ≥ 1 tel que $r\geq 0$ et $(m,p)=1$. On pose $Q_n\subset \mathrm{B}_{r+1}\Omega^1_F\oplus \mathrm{Z}_rF$ le sous-groupe formé des éléments (α,β) tel que

$$m\mathrm{C}^r(\alpha)=-d\mathrm{C}^r(\beta). \tag{10.11.1}$$

Observons qu'un élément $\beta\in F$ appartient à Z_rF si et seulement s'il existe $\gamma\in F$ tel que $\beta=\gamma^{p^r}$. Donc (10.11.1) est équivalente à la condition $m\mathrm{C}^r(\alpha)=-d\gamma$ et on a la suite exacte

$$0\longrightarrow \mathrm{B}_r\Omega^1_F\xrightarrow{\ i\ } Q_n\xrightarrow{\ j\ }\mathrm{Z}_rF\longrightarrow 0 \tag{10.11.2}$$

où $i(\alpha)=(\alpha,0)$ et $j(\alpha,\beta)=\beta$.

Compte tenu de (10.6.1), on définit l'homomorphisme de groupes

$$t_{n,\pi}: Q_n\to \Omega^1_F(\log)\otimes_F(\mathfrak{m}^{-n}/\mathfrak{m}^{-n+1})\simeq \mathrm{Gr}_n\Omega^1_K \tag{10.11.3}$$

par la formule

$$t_{n,\pi}(\alpha,\beta)=(\alpha+\beta d\log[\pi])\otimes[\pi^{-n}] \tag{10.11.4}$$

où $[\pi^{-n}]\in\mathfrak{m}^{-n}/\mathfrak{m}^{-n+1}$ désigne la classe de π^{-n}.

Lemme 10.12. *Soit $n=mp^r$ un entier ≥ 1 tel que $r\geq 0$ et $(m,p)=1$.*

(i) *L'homomorphisme $t_{n,\pi}$ est injectif d'image dans $\mathrm{Gr}_n\Omega^1_K$ indépendante du choix de π ; on la note $\mathrm{BGr}_n\Omega^1_K$.*

(ii) *Avec les notations de* (10.10), *tout élément de $\mathrm{BGr}_n\Omega^1_K$ peut s'écrire d'une unique manière sous la forme*

$$\left(\sum_{0\leq j\leq r-1}\sum_{\underline{k}\in I'_c} x_{\underline{k},j}^{p^{j+1}}(\mathrm{y}^{\underline{k}})^{p^j}\sum_{1\leq i\leq c} k_i\frac{dy_i}{y_i}+x^{p^r-1}dx-mx^{p^r}d\log[\pi]\right)\otimes[\pi^{-n}] \tag{10.12.1}$$

où $x_{\underline{k},j}$ (pour $0 \leq j \leq r-1$ et $\underline{k} \in I'_c$) et x sont des éléments de F.

(i) L'injectivité est évidente. Soient $(\alpha, \beta) \in Q_n$, $\gamma \in F$ tel que $\gamma^{p^r} = \beta$, $a \in F^\times$, $\widetilde{a} \in R^\times$ un relèvement de a. On a alors $a^{-n}\beta = (a^{-m}\gamma)^{p^r} \in \mathrm{Z}_r F$; $a^{-n}\beta d\log(a) \in \mathrm{Z}_r\Omega^1_F$ ([9] 0 2.8.8) ;

$$\begin{aligned} a^{-n}\alpha + a^{-n}\beta d\log[\widetilde{a}\pi] &= a^{-n}\alpha + a^{-n}\beta d\log(a) + a^{-n}\beta d\log[\pi]; \\ m\mathrm{C}^r(a^{-n}\alpha + a^{-n}\beta d\log(a)) &= ma^{-m}\mathrm{C}^r(\alpha) + ma^{-m}\gamma d\log(a) \\ &= -a^{-m}d\gamma + m\gamma a^{-m-1}da = -d(\gamma a^{-m}). \end{aligned}$$

On en déduit que $(a^{-n}\alpha + a^{-n}\beta d\log(a), a^{-n}\beta) \in Q_n$ et

$$t_{n,\pi}(\alpha,\beta) = t_{n,\widetilde{a}\pi}(a^{-n}\alpha + a^{-n}\beta d\log(a), a^{-n}\beta), \tag{10.12.2}$$

ce qui achève la preuve.

(ii) Cela résulte de 10.10.

10.13. Soit $n = mp^r$ un entier ≥ 1 tel que $r \geq 0$ et $(m,p) = 1$. On pose $M_{-1} = 0$ et pour tout entier $j \geq 0$, M_j l'image de $\delta_{j+1}(\mathrm{fil}_n\mathrm{W}_{j+1}(K))$ dans $\mathrm{Gr}_n\mathrm{H}^1(K)$ (10.2.1). Les M_j forment une filtration croissante exhaustive de $\mathrm{Gr}_n\mathrm{H}^1(K)$. Pour $a \in K$ et $j \geq 0$ un entier, on pose $\theta_j(a) = \delta_{j+1}((a,0,\ldots,0)) \in \mathrm{H}^1(K)$. On a clairement

$$\theta_j(a^p) = \theta_j(a). \tag{10.13.1}$$

Pour tout $x \in M_j$, il existe $a \in K$ tel que $p^j\mathtt{v}(a) \geq -n$ et $x - \theta_j(a) \in M_{j-1}$. On en déduit que $M_r = \mathrm{Gr}_n\mathrm{H}^1(K)$, et pour tout $0 \leq j \leq r$, θ_j induit un homomorphisme surjectif de groupes

$$\mathfrak{m}^{-np^{-j}}/\mathfrak{m}^{-np^{-j}+1} \to M_j/M_{j-1}. \tag{10.13.2}$$

Si $r \geq 1$, $0 \leq j \leq r-1$ et $a \in \mathfrak{m}^{-np^{-j-1}}$, alors $\theta_j(a^p) = \theta_j(a) \in \mathrm{fil}_{n/p}\mathrm{H}^1(K) \subset \mathrm{fil}_{n-1}\mathrm{H}^1(K)$; d'où la classe de $\theta_j(a^p)$ est nulle dans M_j.

Proposition 10.14 ([11] 3.2 et 3.3). *Pour tout entier $n \geq 1$, le morphisme ψ_n* (10.8.2) *induit un isomorphisme*

$$\psi_n \colon \mathrm{Gr}_n\mathrm{H}^1(K) \xrightarrow{\sim} \mathrm{BGr}_n\Omega^1_K.$$

On écrit $n = mp^r$ avec $r \geq 0$ et $(m,p) = 1$. On fixe pour tout élément $x \in F$ un relèvement $\widetilde{x} \in R$. Reprenons les notations de (10.10), de plus, pour

$\underline{k} = (k_1, \dots, k_c) \in I_c$, posons $\widetilde{\mathrm{y}}^{\underline{k}} = \prod_{i=1}^{c} \widetilde{y}_i^{k_i}$. En vertu de 10.12, il existe une et une unique application

$$\rho_n : \mathrm{BGr}_n\Omega^1_K \to \mathrm{Gr}_n\mathrm{H}^1(K)$$

qui envoie l'élément (10.12.1) sur la classe de (cf. 10.13)

$$\sum_{0\le j\le r-1} \sum_{\underline{k}\in I'_c} \theta_j(\widetilde{x}^p_{\underline{k},j}\widetilde{\mathrm{y}}^{\underline{k}}\pi^{-np^{-j}}) + \theta_r(\widetilde{x}\pi^{-m}). \tag{10.14.1}$$

Il résulte de 10.13 que l'application ρ_n est surjective ; noter que dans (10.14.1), on peut se limiter à des sommes pour $\underline{k} \in I'_c$ (plutôt que $\underline{k} \in I_c$).

Pour $0 \le j \le r-1$, $a \in R$ et $\overline{a}$ la classe de a dans F, on a les relations

$$\mathrm{gr}_n(\mathrm{F}^j d)((a\pi^{-np^{-j}}, 0, \dots, 0)) = (\overline{a}^{p^j-1}d\overline{a}) \otimes [\pi^{-n}] \tag{10.14.2}$$

$$\mathrm{gr}_n(\mathrm{F}^r d)((a\pi^{-m}, 0, \dots, 0)) = (\overline{a}^{p^r-1}d\overline{a} - m\overline{a}^{p^r}d\log[\pi]) \otimes [\pi^{-n}] \tag{10.14.3}$$

dans $\mathrm{BGr}_n\Omega^1_K$. On en déduit aussitôt que $\psi_n \circ \rho_n$ est l'identité de $\mathrm{BGr}_n\Omega^1_K$. Comme ρ_n est surjectif, ψ_n et ρ_n sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre. En particulier, ρ_n est un homomorphisme de groupes qui ne dépend d'aucun choix.

Remarque 10.15. On n'utilisera de 10.14 que l'injectivité de ψ_n.

Définition 10.16. Soit $\chi \in \mathrm{H}^1(K)$. On appelle *conducteur de Swan de* χ et on note $\mathrm{sw}(\chi)$ le plus petit entier $n \ge 0$ tel que $\chi \in \mathrm{fil}_n\mathrm{H}^1(K)$.

Si $\mathrm{sw}(\chi) \ge 1$, on appelle *conducteur de Swan raffiné de* χ et on note $\mathrm{rsw}(\chi)$ l'image de la classe de χ par l'homomorphisme

$$\psi_{\mathrm{sw}(\chi)} : \mathrm{Gr}_{\mathrm{sw}(\chi)}\mathrm{H}^1(K) \to \mathrm{Gr}_{\mathrm{sw}(\chi)}\Omega^1_K.$$

§11. Ramification des Caractères d'Artin-Schreier-Witt : la Variante de Matsuda

11.1. Soit $m \ge 0$ un entier. Suivant [16], pour tout entier $n \ge 0$, on pose

$$\mathrm{fil}'_n\mathrm{W}_{m+1}(K) = \mathrm{V}^{m+1-m'}(\mathrm{fil}_{n+1}\mathrm{W}_{m'}(K)) + \mathrm{fil}_n\mathrm{W}_{m+1}(K), \tag{11.1.1}$$

où $m' = \min(\mathrm{ord}_p(n+1), m+1)$. Il résulte de (10.1.2) que $(\mathrm{fil}'_n\mathrm{W}_{m+1}(K))_{n\in\mathbb{N}}$ est une filtration croissante exhaustive de $\mathrm{W}_{m+1}(K)$. Pour $n \ge 1$, on note

$$\mathrm{Gr}'_n\mathrm{W}_{m+1}(K) = \mathrm{fil}'_n\mathrm{W}_{m+1}(K)/\mathrm{fil}'_{n-1}\mathrm{W}_{m+1}(K).$$

Lemme 11.2. *Pour tout entier $n \ge 0$, on a* $\mathrm{V}(\mathrm{fil}'_n\mathrm{W}_{m+1}(K)) \subset \mathrm{fil}'_n\mathrm{W}_{m+2}(K)$.

Si $\min(\mathrm{ord}_p(n+1), m+1) = \min(\mathrm{ord}_p(n+1), m+2)$, l'assertion résulte aussitôt de (10.1.2). Sinon, $\mathrm{ord}_p(n+1) > m+1$, auquel cas $\mathrm{fil}'_n \mathrm{W}_{m+1}(K) = \mathrm{fil}_{n+1}\mathrm{W}_{m+1}(K)$ et $\mathrm{fil}'_n \mathrm{W}_{m+2}(K) = \mathrm{fil}_{n+1}\mathrm{W}_{m+2}(K)$; donc l'assertion résulte encore de (10.1.2).

11.3. Pour tout entier $n \geq 0$, on pose (cf. (10.2.1))

$$\mathrm{fil}'_n \mathrm{H}^1(K, \mathbb{Z}/p^{m+1}\mathbb{Z}) = \delta_{m+1}(\mathrm{fil}'_n \mathrm{W}_{m+1}(K)). \tag{11.3.1}$$

On obtient ainsi une filtration croissante exhaustive de $\mathrm{H}^1(K, \mathbb{Z}/p^{m+1}\mathbb{Z})$. Pour $n \geq 1$, on note

$$\mathrm{Gr}'_n \mathrm{H}^1(K, \mathbb{Z}/p^{m+1}\mathbb{Z}) = \mathrm{fil}'_n \mathrm{H}^1(K, \mathbb{Z}/p^{m+1}\mathbb{Z})/\mathrm{fil}'_{n-1}\mathrm{H}^1(K, \mathbb{Z}/p^{m+1}\mathbb{Z}).$$

11.4. En vertu de (10.2.2) et 11.2, (11.3.1) définit par passage à la limite inductive une filtration croissante exhaustive $(\mathrm{fil}'_n \mathrm{H}^1(K)[p^\infty])_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathrm{H}^1(K)[p^\infty]$ (cf. 9.8). Pour $n \geq 0$, on pose

$$\mathrm{fil}'_n \mathrm{H}^1(K) = \mathrm{H}^1(K)[p'] + \mathrm{fil}'_n \mathrm{H}^1(K)[p^\infty]. \tag{11.4.1}$$

Pour $n \geq 1$, on a

(11.4.2)

$$\mathrm{Gr}'_n \mathrm{H}^1(K) = \mathrm{fil}'_n \mathrm{H}^1(K)/\mathrm{fil}'_{n-1}\mathrm{H}^1(K) \simeq \mathrm{fil}'_n \mathrm{H}^1(K)[p^\infty]/\mathrm{fil}'_{n-1}\mathrm{H}^1(K)[p^\infty].$$

11.5. On définit une filtration croissante exhaustive de Ω^1_K en posant, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{fil}'_n \Omega^1_K$ l'image du morphisme canonique $\Omega^1_R \otimes_R \mathfrak{m}^{-n-1} \to \Omega^1_K$. On a alors

$$\mathrm{Gr}'_n \Omega^1_K = \mathrm{fil}'_n \Omega^1_K / \mathrm{fil}'_{n-1}\Omega^1_K \simeq \Omega^1_R \otimes_R (\mathfrak{m}^{-n-1}/\mathfrak{m}^{-n}). \tag{11.5.1}$$

Lemme 11.6. *Pour tout entier $n \geq 0$, on a*

$$\mathrm{F}^m d(\mathrm{fil}'_n \mathrm{W}_{m+1}(K)) \subset \mathrm{fil}'_n \Omega^1_K.$$

Comme $d\log(x) \in \mathfrak{m}^{-1}\Omega^1_R$ pour tout $x \in K^\times$, la relation (10.5.2) entraîne que

$$\mathrm{F}^m d(\mathrm{fil}_n \mathrm{W}_{m+1}(K)) \subset \mathrm{fil}'_n \Omega^1_K. \tag{11.6.1}$$

Posons $m' = \min(\mathrm{ord}_p(n+1), m+1)$ et montrons que $\mathrm{F}^m d\mathrm{V}^{m+1-m'}(\mathrm{fil}_{n+1}\mathrm{W}_{m'}(K)) \subset \mathrm{fil}'_n \Omega^1_K$. On peut se borner au cas où $m' \geq 1$. Compte tenu de la relation $\mathrm{F}^m d\mathrm{V}^{m+1-m'} = \mathrm{F}^{m'-1}d : \mathrm{W}_{m'}(K) \to \Omega^1_K$, il suffit de montrer que si $m+1 \leq \mathrm{ord}_p(n+1)$, alors

$$\mathrm{F}^m d(\mathrm{fil}_{n+1}\mathrm{W}_{m+1}(K)) \subset \mathrm{fil}'_n\Omega^1_K. \tag{11.6.2}$$

Soit $(x_0, \dots, x_m) \in \mathrm{fil}_{n+1}\mathrm{W}_{m+1}(K)$. Si $p^{m-i}\mathtt{v}(x_i) = -n-1$ pour un entier $0 \leq i \leq m$, alors $\mathtt{v}(x_i)$ est un multiple de p car $\mathrm{ord}_p(n+1) \geq m+1$; donc $d\log(x_i) = 0$. L'inclusion (11.6.2) s'ensuit compte tenu de (11.6.1).

11.7. En vertu de 11.6, pour tout $n \geq 1$, $\mathrm{F}^m d$ induit un homomorphisme canonique

$$\mathrm{gr}'_n(\mathrm{F}^m d) : \mathrm{Gr}'_n\mathrm{W}_{m+1}(K) \to \mathrm{Gr}'_n\Omega^1_K. \tag{11.7.1}$$

Il résulte de 11.2 et la relation $\mathrm{F}^{m+1}d\mathrm{V} = \mathrm{F}^m d : \mathrm{W}_{m+1}(K) \to \Omega^1_K$ qu'on a

$$\mathrm{gr}'_n(\mathrm{F}^m d) = \mathrm{gr}'_n(\mathrm{F}^{m+1}d) \circ \mathrm{V}. \tag{11.7.2}$$

Proposition 11.8 ([16] 3.2.1)**.** *Pour tout entier $n > 1$ (resp. $n \geq 1$ si $p \neq 2$), il existe un et un unique homomorphisme*

$$\phi_{m,n} : \mathrm{Gr}'_n\mathrm{H}^1(K, \mathbb{Z}/p^{m+1}\mathbb{Z}) \to \mathrm{Gr}'_n\Omega^1_K \tag{11.8.1}$$

rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Gr}'_n\mathrm{W}_{m+1}(K) \arrow[r, "-\mathrm{gr}'_n(\mathrm{F}^m d)"] \arrow[d, "\mathrm{gr}'_n(\delta_{m+1})"'] & \mathrm{Gr}'_n\Omega^1_K \\ \mathrm{Gr}'_n\mathrm{H}^1(K, \mathbb{Z}/p^{m+1}\mathbb{Z}) \arrow[ur, "\phi_{m,n}"'] & \end{tikzcd} \tag{11.8.2}$$

L'homomorphisme δ_{m+1} (10.2.1) induit un isomorphisme

$$\frac{\mathrm{fil}'_n\mathrm{W}_{m+1}(K)}{\mathrm{fil}'_{n-1}\mathrm{W}_{m+1}(K) + \mathrm{fil}'_n\mathrm{W}_{m+1}(K) \cap (\mathrm{F}-1)\mathrm{W}_{m+1}(K)} \simeq \mathrm{Gr}'_n\mathrm{H}^1(K, \mathbb{Z}/p^{m+1}\mathbb{Z}).$$

Il suffit donc de montrer que

$$\mathrm{F}^m d(\mathrm{fil}'_n\mathrm{W}_{m+1}(K) \cap (\mathrm{F}-1)\mathrm{W}_{m+1}(K)) \subset \mathrm{fil}'_{n-1}\Omega^1_K. \tag{11.8.3}$$

Soit $y \in \mathrm{W}_{m+1}(K)$ tel que $x = \mathrm{F}(y) - y \in \mathrm{fil}'_n\mathrm{W}_{m+1}(K)$. Comme $x \in \mathrm{fil}_{n+1}\mathrm{W}_{m+1}(K)$, alors $y \in \mathrm{fil}_{[\frac{n+1}{p}]}\mathrm{W}_{m+1}(K) \subset \mathrm{fil}'_{[\frac{n+1}{p}]}\mathrm{W}_{m+1}(K)$, où $[-]$ est la partie entière (voir preuve de 10.7). La relation $d\mathrm{F} = p\mathrm{F}d : \mathrm{W}_{m+2}(K) \to$

$\mathrm{W}_{m+1}\Omega^1_K$ ([9] I (2.18.2)) entraîne que $\mathrm{F}^m d(x) = -\mathrm{F}^m d(y)$. L'inclusion (11.8.3) résulte alors de 11.6 puisque $[\frac{n+1}{p}] \leq n-1$ sous les hypothèses de la proposition.

11.9. Soit $n > 1$ un entier (resp. $n \geq 1$ si $p \neq 2$). Il résulte de (10.2.2), (11.7.2) et 11.8 qu'on a un triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Gr}'_n\mathrm{H}^1(K, \mathbb{Z}/p^{m+1}\mathbb{Z}) \arrow[r, "\phi_{m,n}"] \arrow[d, ".p"'] & \mathrm{Gr}'_n\Omega^1_K \\ \mathrm{Gr}'_n\mathrm{H}^1(K, \mathbb{Z}/p^{m+2}\mathbb{Z}) \arrow[ur, "\phi_{m+1,n}"'] & \end{tikzcd} \tag{11.9.1}$$

Le foncteur "limite inductive" étant exact à droite, on en déduit un homomorphisme

$$\phi_n : \mathrm{Gr}'_n\mathrm{H}^1(K) \to \mathrm{Gr}'_n\Omega^1_K. \tag{11.9.2}$$

11.10. Soient $n \geq 1$ un entier, $r = \mathrm{ord}_p(n+1)$, $r' = \mathrm{ord}_p(n)$. On pose $\mathrm{BGr}'_n\Omega^1_K$ le sous-groupe de $\mathrm{Gr}'_n\Omega^1_K \simeq \Omega^1_R \otimes_R \mathfrak{m}^{-n-1}/\mathfrak{m}^{-n}$ (11.5.1) engendré par les éléments de l'une des formes suivantes

$$a^{p^j-1}da \otimes [\pi^{-n-1}] \ \ (\text{pour } 0 \leq j \leq r-1), \qquad a^{p^{r'}} d\pi \otimes [\pi^{-n-1}]$$

où $a \in R$ et $[\pi^{-n-1}]$ désigne la classe de π^{-n-1}. Pour $0 \leq j \leq r-1$, $a \in R$ et $b \in R^\times$, on a

$$\begin{aligned} b^{n+1}a^{p^j-1}da &= (b^{(n+1)p^{-j}}a)^{p^j-1}d(b^{(n+1)p^{-j}}a) \\ b^{n+1}a^{p^{r'}}d(b^{-1}\pi) &= (b^{np^{-r'}}a)^{p^{r'}}d\pi \mod \pi. \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{BGr}'_n\Omega^1_K$ est indépendant du choix de π.

Lemme 11.11. *Soient $n \geq 1$ un entier, $r = \mathrm{ord}_p(n+1)$, $r' = \mathrm{ord}_p(n)$. Soient $(b_1, \ldots, b_c)$ des éléments de R relevant une p-base de F, $I_c = \{0, \ldots, p-1\}^c$, $I'_c = I_c - \{(0, \ldots, 0)\}$. Pour $\underline{k} = (k_1, \ldots, k_c) \in I_c$, on pose $\mathsf{b}^{\underline{k}} = \prod_{i=1}^c b_i^{k_i}$. On fixe pour chaque élément x de F un relèvement $\widetilde{x}$ dans R. Alors tout élément de $\mathrm{BGr}'_n\Omega^1_K$ peut s'écrire d'une unique manière sous la forme*

$$\left(\sum_{0\leq j\leq r-1} \sum_{\underline{k}\in I'_c} \widetilde{x}_{\underline{k},j}^{p^{j+1}} (\mathsf{b}^{\underline{k}})^{p^j} \sum_{1\leq i\leq c} k_i \frac{db_i}{b_i} + \widetilde{x}^{p^{r'}} d\pi \right) \otimes [\pi^{-n-1}] \tag{11.11.1}$$

où $x_{\underline{k},j}$ (pour $0 \leq j \leq r-1$ et $\underline{k} \in I'_c$) et x sont des éléments de F.

L'assertion est immédiate si $r = 0$. Supposons $r \geq 1$; donc $r' = 0$ et on a une suite exacte (dépendante du choix de π)

$$0 \to F \to \mathrm{BGr}'_n \Omega^1_K \to \mathrm{B}_r \Omega^1_F \to 0. \tag{11.11.2}$$

La proposition résulte alors de 10.10.

11.12. Soient $n \geq 1$ un entier, $r = \mathrm{ord}_p(n+1)$, $r' = \mathrm{ord}_p(n)$. On a

$$\begin{aligned} \mathrm{fil}'_n \mathrm{W}_{j+1}(K) &= \mathrm{fil}_{n+1} \mathrm{W}_{j+1}(K) \quad (\text{pour } 0 \leq j \leq r-1), \\ \mathrm{fil}'_n \mathrm{W}_{j+1}(K) &= \mathrm{fil}_n \mathrm{W}_{j+1}(K) + \mathrm{V}^{j+1-r} \mathrm{fil}_{n+1} \mathrm{W}_r(K) \quad (\text{pour } j \geq r). \end{aligned}$$

On pose $M'_{-1} = 0$ et pour tout entier $j \geq 0$, M'_j l'image de $\delta_{j+1}(\mathrm{fil}'_n \mathrm{W}_{j+1}(K))$ dans $\mathrm{Gr}'_n \mathrm{H}^1(K)$ (10.2.1). Les M'_j forment une filtration croissante exhaustive de $\mathrm{Gr}'_n \mathrm{H}^1(K)$ (11.2). On rappelle que pour $a \in K$ et $j \geq 0$, on a noté $\theta_j(a) = \delta_{j+1}((a, 0, \ldots, 0)) \in \mathrm{H}^1(K)$ (10.13).

Supposons d'abord que $r \geq 1$; donc $r' = 0$ et $M'_{r-1} = \mathrm{Gr}'_n \mathrm{H}^1(K)$. Si $0 \leq j \leq r-1$ et $a \in \mathfrak{m}^{-(n+1)p^{-j}}$, alors $\theta_j(a) \in \mathrm{fil}'_n \mathrm{H}^1(K)$ et sa classe dans $\mathrm{Gr}'_n \mathrm{H}^1(K)$ appartient évidemment à M'_j. On voit aussitôt que θ_j induit un homomorphisme surjectif de groupes

$$\mathfrak{m}^{-(n+1)p^{-j}} \to M'_j / M'_{j-1}. \tag{11.12.1}$$

On a $\mathrm{fil}'_{n-1} \mathrm{W}_{j+1}(K) = \mathrm{fil}_{n-1} \mathrm{W}_{j+1}(K)$ pour tout $j \geq 0$. Donc le noyau de (11.12.1) contient $\mathfrak{m}^{-(n+1)p^{-j}+1}$ si $1 \leq j \leq r-1$, et $\mathfrak{m}^{-n+1}$ si $j = 0$.

Supposons ensuite que $r \geq 1$ et ($n > 1$ pour $p = 2$) ; donc $n+1 \leq p(n-1)$. Si $0 \leq j \leq r-1$ et $a \in \mathfrak{m}^{-(n+1)p^{-j-1}}$, alors $\theta_j(a^p) = \theta_j(a)$ (10.13.1) et $\theta_j(a) \in \mathrm{fil}'_{n-1} \mathrm{H}^1(K)$; d'où la classe de $\theta_j(a^p)$ est nulle dans M'_j.

Supposons enfin que $r = 0$; alors $M'_{r'} = \mathrm{Gr}'_n \mathrm{H}^1(K)$. On a

$$\begin{aligned} \mathrm{fil}'_{n-1} \mathrm{W}_{j+1}(K) &= \mathrm{fil}_n \mathrm{W}_{j+1}(K) = \mathrm{fil}'_n \mathrm{W}_{j+1}(K) \quad (\text{pour } 0 \leq j \leq r'-1), \\ \mathrm{fil}'_{n-1} \mathrm{W}_{r'+1}(K) &= \mathrm{V}(\mathrm{fil}_n \mathrm{W}_{r'}(K)) + \mathrm{fil}_{n-1} \mathrm{W}_{r'+1}(K). \end{aligned}$$

On en déduit que $M'_j = 0$ pour $0 \leq j \leq r'-1$, et l'application déduite de $\theta_{r'}$

$$\mathfrak{m}^{-np^{-r'}} / \mathfrak{m}^{-np^{-r'}+1} \to M'_{r'} \tag{11.12.2}$$

est un homomorphisme surjectif de groupes.

Proposition 11.13 ([16] 3.2.3). *Pour tout entier $n > 1$ (resp. $n \geq 1$ si $p \neq 2$), le morphisme ϕ_n (11.9.2) induit un isomorphisme*

$$\phi_n \colon \mathrm{Gr}'_n \mathrm{H}^1(K) \xrightarrow{\sim} \mathrm{BGr}'_n \Omega^1_K.$$

On pose $r = \mathrm{ord}_p(n+1)$ et $r' = \mathrm{ord}_p(n)$. Avec les notations de 11.11, il existe une et une unique application

$$\kappa_n \colon \mathrm{BGr}'_n\Omega^1_K \to \mathrm{Gr}_n\mathrm{H}^1(K)$$

qui envoie l'élément (11.11.1) sur la classe de (cf. 11.12)

$$\sum_{0\leq j\leq r-1}\sum_{\underline{k}\in I'_c}\theta_j(\widetilde{x}^p_{\underline{k},j}\mathsf{b}^{\underline{k}}\pi^{-(n+1)p^{-j}}) - \frac{1}{np^{-r'}}\theta_{r'}(\widetilde{x}\pi^{-np^{-r'}}). \tag{11.13.1}$$

Il résulte de 11.12 que l'application κ_n est surjective ; on distinguera les cas $r = 0$, et $r \geq 1$ qui entraîne que $r' = 0$.

Pour $0 \leq j \leq r-1$ et $a \in R$, on a les relations

$$\mathrm{gr}'_n(\mathrm{F}^j d)((a\pi^{-(n+1)p^{-j}}, 0, \ldots, 0)) = (a^{p^j-1}da)\otimes[\pi^{-n-1}] \tag{11.13.2}$$

$$\mathrm{gr}'_n(\mathrm{F}^{r'} d)((a\pi^{-np^{-r'}}, 0, \ldots, 0)) = -(np^{-r'}a^{p^{r'}}d\pi)\otimes[\pi^{-n-1}] \tag{11.13.3}$$

dans $\mathrm{BGr}_n\Omega^1_K$. On en déduit aussitôt que $\phi_n \circ \kappa_n$ est l'identité de $\mathrm{BGr}'_n\Omega^1_K$. Comme κ_n est surjectif, ϕ_n et κ_n sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre. En particulier, κ_n est un homomorphisme de groupes qui ne dépend d'aucun choix.

Remarque 11.14. On n'utilisera de 11.13 que l'injectivité de ϕ_n.

Définition 11.15. Soit $\chi \in \mathrm{H}^1(K)$. On appelle *conducteur de Swan modifié de* χ et on note $\mathrm{sw}'(\chi)$ le plus petit entier $n \geq 0$ tel que $\chi \in \mathrm{fil}'_n\mathrm{H}^1(K)$.

Si $\mathrm{sw}(\chi) > 1$ (resp. $\mathrm{sw}(\chi) \geq 1$ et $p \neq 2$), on appelle *conducteur de Swan modifié raffiné de* χ et on note $\mathrm{rsw}'(\chi)$ l'image de la classe de χ par l'homomorphisme

$$\phi_{\mathrm{sw}'(\chi)} \colon \mathrm{Gr}'_{\mathrm{sw}'(\chi)}\mathrm{H}^1(K) \to \mathrm{Gr}'_{\mathrm{sw}'(\chi)}\Omega^1_K.$$

§12. Démonstration du théorème 9.10

12.1. Nous démontrons en premier lieu des résultats préliminaires sur les vecteurs de Witt. On définit une suite de polynômes $Q_n \in \mathbb{Z}[\frac{1}{p}][X_0, \ldots, X_n, Y_0, \ldots, Y_n]$ (pour $n \in \mathbb{N}$) par la relation de récurrence

$$\sum_{i=0}^{n} p^i(X_i(1+Y_i))^{p^{n-i}} = \sum_{i=0}^{n} p^i X_i^{p^{n-i}} + \sum_{i=0}^{n} p^i Q_i^{p^{n-i}}. \tag{12.1.1}$$

Le lemme suivant est immédiat.

Lemme 12.2. (i) *Le polynôme Q_n appartient à l'idéal de* $\mathbb{Z}[X_0, \dots, X_n, Y_0, \dots, Y_n]$ *engendré par* $(Y_0, \dots, Y_n)$, *et la différence* $Q_n - \sum_{i=0}^{n} X_i^{p^{n-i}} Y_i$ *appartient à l'idéal engendré par* $(Y_i Y_j)_{0 \le i,j \le n}$.

(ii) *Si on affecte à la variable X_i le poids p^i et à la variable Y_i le poids* 0, *le polynôme Q_n devient homogène de degré p^n.*

(iii) *Soient A un anneau commutatif,* $x = (x_0, \dots, x_n)$, $y = (y_0, \dots, y_n)$ *deux éléments de A^{n+1}. Posons* $x'_i = x_i(1 + y_i)$ *et* $x' = (x'_0, \dots, x'_n)$. *On a alors la relation suivante dans* $\mathrm{W}_{n+1}(A)$

$$x' - x = (Q_0(x, y), Q_1(x, y), \dots, Q_n(x, y)).$$

12.3. Dans cette section, on désigne par $(X, \mathtt{x})$ le k-schéma pointé et $\xi \colon S \to X$ le k-morphisme du (6.1), par D un diviseur effectif de S. On note X_0 l'adhérence schématique de $\mathtt{x}$ dans X (qui est un diviseur de Cartier) et U l'ouvert complémentaire de X_0 dans X. On pose $r = \mathtt{v}(D)$ (5.5), $\mathbf{T}_D = \mathbf{V}(\Omega^1_R \otimes_R \mathscr{O}_D(D))$ et $\overline{\mathbf{T}}_D = \mathbf{T}_D \times_D \overline{s}$. Appliquons la construction (3.6) au morphisme ξ ; on désigne par $(X \times_k S)_{(D)}$ la dilatation de $X \times_k S$ le long du graphe de ξ d'épaisseur D. On a alors un diagramme commutatif canonique à carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd} \mathbf{T}_D \arrow[r] \arrow[d] & (X \times_k S)_{(D)} \arrow[d] & X \times_k \eta \arrow[l] \arrow[d] \\ D \arrow[r] & S & \eta \arrow[l] \end{tikzcd} \tag{12.3.1}$$

On note κ le point générique de $\mathbf{T}_D$, $R_{\mathbb{K}}$ le séparé complété de l'anneau local de $(X \times_k S)_{(D)}$ en κ (qui est un anneau de valuation discrète), $\mathbb{K}$ son corps des fractions, $\mathfrak{m}_{\mathbb{K}}$ son idéal maximal. La projection canonique $(X \times_k S)_{(D)} \to S$ étant lisse, elle induit un homomorphisme $u \colon R \to R_{\mathbb{K}}$ vérifiant $\mathfrak{m}_{\mathbb{K}} = u(\mathfrak{m})R_{\mathbb{K}}$. On note encore $\mathtt{v} \colon \mathbb{K}^\times \to \mathbb{Z}$ la valuation qui prolonge $\mathtt{v}$ sur K (5.2). Compte tenu de l'interprétation modulaire de $\mathbf{T}_D$, le point κ est uniquement déterminé par un R-homomorphisme

$$t \colon \Omega^1_R \to \mathfrak{m}^r_{\mathbb{K}} / \mathfrak{m}^{2r}_{\mathbb{K}}. \tag{12.3.2}$$

Appliquant le produit tensoriel $\otimes_R (\mathfrak{m}^{-n-1}/\mathfrak{m}^{-n})$ (pour $n \in \mathbb{Z}$), on obtient un F-homomorphisme

$$t_n \colon \mathrm{Gr}'_n \Omega^1_K \to \mathfrak{m}^{-n+r-1}_{\mathbb{K}} / \mathfrak{m}^{-n+r}_{\mathbb{K}} = \mathrm{Gr}_{n-r+1} \mathrm{W}_1(\mathbb{K}). \tag{12.3.3}$$

La première projection $(X \times_k S)_{(D)} \to X$ envoie κ sur $\mathtt{x}$. On en déduit un second homomorphisme $v \colon R \to R_{\mathbb{K}}$.

Lemme 12.4. (i) *Pour tout $x \in R$, on a $v(x) - u(x) \in \mathfrak{m}_{\mathbb{K}}^r$ et*

$$v(x) - u(x) \equiv t(d(x)) \mod \mathfrak{m}_{\mathbb{K}}^{r+1}. \tag{12.4.1}$$

(ii) *Pour tout $x \in K^{\times}$, on a*

$$\mathtt{v}\left(\frac{v(x)}{u(x)} - 1\right) \geq r - 1. \tag{12.4.2}$$

(iii) *Supposons $r \geq 2$. Alors on a, pour tout $x \in K^{\times}$,*

$$\frac{v(x)}{u(x)} - 1 \equiv t_0(d\log(x)) \mod \mathfrak{m}_{\mathbb{K}}^r. \tag{12.4.3}$$

L'assertion (i) est évidente. L'assertion (ii) est évidente pour les unités et les uniformisantes de R ; elle résulte en général de la relation, pour tout $x, y \in K$,

$$v(xy) - u(xy) = v(x)(v(y) - u(y)) + u(y)(v(x) - u(x)). \tag{12.4.4}$$

Il résulte encore de cette relation que si (12.4.3) est satisfaite par x et y, elle l'est aussi par $1/x$ et xy, car $r \geq 2$. Comme (12.4.3) est satisfaite par les unités et les uniformisantes de R, elle est alors satisfaite en général.

Lemme 12.5. *Supposons $r \geq 3$. Soient $m, n \geq 0$ deux entiers, $x = (x_0, \ldots, x_m) \in \mathrm{fil}'_n \mathrm{W}_{m+1}(K)$, $y = (y_0, \ldots, y_m) \in \mathbb{K}^{m+1}$, où $y_i = \frac{v(x_i)}{u(x_i)} - 1$ si $x_i \neq 0$ et $y_i = 0$ si $x_i = 0$. Alors on a*

$$p^{m-i}\mathtt{v}(Q_i(u(x), y)) \geq -n + r, \qquad \forall\ 0 \leq i < m, \tag{12.5.1}$$

$$\mathtt{v}(Q_m(u(x), y)) \geq -n + r - 1, \tag{12.5.2}$$

$$\mathtt{v}\left(Q_m(u(x), y) - \sum_{j=0}^{m} x_j^{p^{m-j}} y_j\right) \geq -n + r. \tag{12.5.3}$$

Soit $0 \leq i \leq m$ un entier. Si $x \in \mathrm{fil}_n \mathrm{W}_{m+1}(K)$, alors

$$p^{m-i}\mathtt{v}(Q_i(u(x), y)) \geq -n + p^{m-i}(r - 1)$$

en vertu de (12.4.2) et 12.2, ce qui démontre (12.5.1) et (12.5.2). De même, on a

$$\mathtt{v}\left(Q_m(u(x), y) - \sum_{j=0}^{m} x_j^{p^{m-j}} y_j\right) \geq -n + 2(r - 1) \geq -n + r,$$

ce qui prouve (12.5.3).

Soit $x \in \mathrm{V}^{m+1-m'}(\mathrm{fil}_{n+1}\mathrm{W}_{m'}(K)) \subset \mathrm{fil}_{n+1}\mathrm{W}_{m+1}(K)$, où $m' = \inf(\mathrm{ord}_p(n+1), m+1)$. On a

$$p^{m-i}\mathtt{v}\left(Q_i(u(x),y) - \sum_{j=0}^{i} x_j^{p^{i-j}} y_j\right) \geq -n-1+2p^{m-i}(r-1) \geq -n+r,$$

ce qui démontre (12.5.3). On dira que i est ordinaire si $p^{m-i}\mathtt{v}(x_i) \geq -n$; i est exceptionnel si $p^{m-i}\mathtt{v}(x_i) = -n-1$. Si i est exceptionnel, alors $i \geq m+1-m'$; donc $\mathrm{ord}_p(\mathtt{v}(x_i)) \geq 1$ et $\mathtt{v}(y_i) \geq r$ (12.4.3). Soit $0 \leq j \leq i$. Si j est ordinaire, alors

$$p^{m-i}\mathtt{v}(x_j^{p^{i-j}} y_j) \geq -n + p^{m-i}(r-1).$$

Si j est exceptionnel, alors

$$p^{m-i}\mathtt{v}(x_j^{p^{i-j}} y_j) \geq -n-1+p^{m-i}r.$$

Les relations (12.5.1) et (12.5.2) s'en déduisent aussitôt.

Remarque 12.6. Il résulte de la preuve de 12.5 que la condition $r \geq 2$ suffit sauf peut être pour (12.5.3) si $x \notin \mathrm{fil}_n\mathrm{W}_{m+1}(K)$.

Proposition 12.7. *Supposons $r = \mathtt{v}(D) \geq 3$. Pour tout entiers $m \geq 0$ et $n \geq r-1$, l'homomorphisme de groupes*

(12.7.1) $$v - u\colon \mathrm{W}_{m+1}(K) \to \mathrm{W}_{m+1}(\mathbb{K})$$

envoie $\mathrm{fil}'_n\mathrm{W}_{m+1}(K)$ dans $\mathrm{fil}_{n-r+1}\mathrm{W}_{m+1}(\mathbb{K})$ et le diagramme

(12.7.2)
$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Gr}'_n\mathrm{W}_{m+1}(K) & \xrightarrow{\mathrm{gr}(v-u)} & \mathrm{Gr}_{n-r+1}\mathrm{W}_{m+1}(\mathbb{K}) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{gr}'(\mathrm{F}^m d)} & & \Big\uparrow{\scriptstyle \mathrm{gr}(\mathrm{V}^m)} \\
\mathrm{Gr}'_n\Omega^1_K & \xrightarrow[t_n]{} & \mathrm{Gr}_{n-r+1}\mathrm{W}_1(\mathbb{K})
\end{array}$$

est commutatif.

Cela résulte de 12.2(iii), 12.5 et (12.4.3).

Lemme 12.8. *Supposons $r = \mathtt{v}(D) \geq 2$. Soient $n \geq 1$ un entier premier à p, $\chi \in \mathrm{H}^1(K, \mu_n)$. Alors on a $v^*(\chi) = u^*(\chi)$ dans $\mathrm{H}^1(\mathbb{K}, \mu_n)$.*

En vertu de (12.4.2), pour tout $x \in K^\times$, $v(x)/u(x) \in 1+\mathfrak{m}_{\mathbb{K}}$; c'est donc une puissance n-ème de $R_{\mathbb{K}}$. La proposition résulte alors de la théorie de Kummer.

Proposition 12.9. *Soient $n \geq 1$ un entier, n' le plus grand diviseur de n premier à p. On suppose que K contient une racine primitive n'-ème de l'unité. Soit $\chi \in \mathrm{H}^1(K, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ tel que $\mathrm{sw}'(\chi) \geq 2$ et $r = \mathtt{v}(D) = \mathrm{sw}'(\chi) + 1$. Alors n est un multiple de p et $v^*(\chi) - u^*(\chi)$ est l'image de l'élément $-t_{\mathrm{sw}'(\chi)}(\mathrm{rsw}'(\chi))$ par l'homomorphisme composé*

$$\begin{aligned} R_{\mathbb{K}}/\mathfrak{m}_{\mathbb{K}} &\to \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(R_{\mathbb{K}}/\mathfrak{m}_{\mathbb{K}}), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(R_{\mathbb{K}}), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \\ &\to \mathrm{H}^1(\mathbb{K}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^1(\mathbb{K}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}), \end{aligned}$$

où la première flèche est l'homomorphisme d'Artin-Schreier et la dernière flèche est induite par la multiplication par n/p sur les coefficients.

Cela résulte de 12.7 et 12.8.

12.10. On conserve dans la suite de cette section les hypothèses de (12.9), de plus on fixe un homomorphisme injectif $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \Lambda^\times$ tel que le composé $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \Lambda^\times$ avec la multiplication par n/p soit le caractère ψ (5.6). On considère $-\mathrm{rsw}'(\chi)$ comme un $\overline{F}$-point de $\overline{\mathbf{T}}^{\mathrm{t}}_D$, ou de façon équivalente comme une forme linéaire $f \colon \overline{\mathbf{T}}_D \to \mathbb{A}^1_{\bar{s}}$. On pose $\mathscr{L}_\chi = f^*(\mathscr{L}_\psi)$, où $\mathscr{L}_\psi$ est le faisceau d'Artin-Schreier associé à ψ ([15] 1.1.3). On désigne par $\mathscr{F}$ le faisceau étale localement constant constructible en Λ-modules de rang 1 sur η associé au caractère χ. En vertu de 6.2, quitte à remplacer $(X, \mathtt{x})$ par un objet de $\mathfrak{E}$, il existe $\chi_U \in \mathrm{H}^1(U, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ tel que $\xi_U^*(\chi_U) = \chi$. Posons $\mathscr{G}$ le faisceau étale localement constant constructible en Λ-modules de rang 1 sur U associé au caractère χ_U.

Comme $r = \mathtt{v}(D) \geq 3$, $X_0 \times_k \eta$ est fermé dans $(X \times_k S)_{(D)}$ (3.7). Soit $(X \times_k S)^\circ_{(D)}$ l'ouvert complémentaire de $X_0 \times_k \eta$ dans $(X \times_k S)_{(D)}$, de sorte qu'on ait un diagramme commutatif canonique à carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd} \mathbf{T}_D \arrow[r] \arrow[d] & (X \times_k S)^\circ_{(D)} \arrow[d] & U \times_k \eta \arrow[l] \arrow[d] \\ D \arrow[r] & S & \eta \arrow[l] \end{tikzcd}$$

On note $\Psi_D : \mathbf{D}^+(U \times_k \eta) \to \mathbf{D}^+(\overline{\mathbf{T}}_D)$ le foncteur des cycles proches.

Proposition 12.11. *Le complexe $\Psi_D(\mathscr{H}(\mathscr{F}, \mathscr{G}))$ (5.7) est isomorphe à $\mathscr{L}_\chi[0]$.*

Le morphisme $(X \times_k S)^\circ_{(D)} \to S$ étant lisse, il suffit de montrer que $\mathscr{H}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ se prolonge en un faisceau localement constant constructible sur

$(X \times_k S)^{\circ}_{(D)}$ dont la restriction à $\overline{\mathbf{T}}_D$ est isomorphe à $\mathscr{L}_\chi$. Cela résulte de 12.9 par le théorème de pureté de Zariski-Nagata (SGA 2 X 3.4) et SGA 1 V 8.2.

12.12. Soit L la sous-extension de $\overline{K}$ fixée par le noyau du caractère $\chi\colon G \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. En vertu de 6.2, quitte à remplacer $(X, \mathtt{x})$ par un objet de $\mathfrak{C}$, il existe un morphisme fini $f\colon Y \to X$ et un diagramme cartésien

(12.12.1)
$$\begin{tikzcd} S_L \arrow[r, "\rho"] \arrow[d] & Y \arrow[d, "f"] \\ S \arrow[r, "\xi"'] & X \end{tikzcd}$$

tels que ρ induise un isomorphisme entre les groupes d'automorphismes $\mathrm{Aut}_X(Y) \simeq \mathrm{Aut}_K(L) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et f soit étale au dessus de U de classe $\chi_U \in \mathrm{H}^1(U, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Donc Y a un unique point $\mathtt{y}$ au dessus de $\mathtt{x}$, et son anneau local complété est isomorphe à R_L. On désigne par $H_{(D)}$ le schéma défini par le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} H_{(D)} \arrow[r] \arrow[d, "f_{(D)}"'] & Y \times_k S \arrow[d, "f \times_k S"] \\ (X \times_k S)^{\circ}_{(D)} \arrow[r] & X \times_k S \end{tikzcd}$$

par $H'_{(D)}$ la normalisation de $H_{(D)} \times_S S_L$ dans $Y_U \times_k \eta_L$ et par $f'_{(D)}\colon H'_{(D)} \to (X \times_k S)^{\circ}_{(D)} \times_S S_L$ le morphisme déduit de $f_{(D)}$.

Proposition 12.13. (i) *Le morphisme $f'_{(D)}$ est étale, et il induit un revêtement étale non-trivial de $\mathbf{T}_D \times_S S_L$.*

(ii) *On a $\chi(G^{r+}) = 0$ et $\chi(G^r) \neq 0$, où $r = \mathrm{sw}'(\chi) + 1$.*

(i) Soit κ' le point générique de $\mathbf{T}_D \times_S S_L$. Le complété séparé de l'anneau local de $(X \times_k S)_{(D)} \times_S S_L$ en κ' s'identifie à $R_{\mathbb{K}} \otimes_R R_L$. Il résulte de 12.9 que $f'_{(D)}$ est étale en tout point au dessus de κ' et le revêtement étale induit par $f'_{(D)}$ au dessus de κ' est non-trivial (11.13 et 11.14). On en déduit par le théorème de pureté de Zariski-Nagata que $f'_{(D)}$ est un revêtement étale.

(ii) On sous-entend par complété formel d'un S-schéma son complété formel le long de sa fibre spéciale. Considérons le diagramme cartésien

(12.13.1)
$$\begin{tikzcd} S_L \arrow[r, "\theta"] \arrow[d] & Y \times_k S \arrow[d, "f \times_k S"] \\ S \arrow[r, "\gamma"'] & X \times_k S \end{tikzcd}$$

induit par (12.12.1), où γ est le graphe de ξ. On note $\mathfrak{X}$ (resp. $\mathfrak{Y}$) le complété formel de $X \times_k S$ (resp. $Y \times_k S$) et $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$ (resp. $\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}$) sa fibre rigide au sens de Raynaud. Pour tout nombre rationnel $j \geq 0$, on désigne par $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{(j)}$ (resp. $\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}_{(j)}$) le voisinage tubulaire de γ (resp. θ) de rayon j ([1] part II 1.2) ; c'est un sous-domaine affinoïde de $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$ (resp. $\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}$). On a $\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}_{(j)} = \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{(j)} \times_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}} \mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}$; on note $f^{\mathrm{rig}}_{(j)} \colon \mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}_{(j)} \to \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{(j)}$ la projection canonique. Le complété formel de $(X \times_k S)^{\circ}_{(D)}$ est un modèle formel de $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{(r)}$. Les morphismes $f_{(D)}$ et $f'_{(D)}$ étant finis, leurs complétés formels sont alors des modèles formels des morphismes $f^{\mathrm{rig}}_{(r)}$ et $f^{\mathrm{rig}}_{(r)} \otimes_K L$ respectivement. La filtration $(G^j)_{j \in \mathbb{Q}_{\geq 0}}$ de G est définie dans [1] de sorte que

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/\chi(G^j) \simeq \pi_0(\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}_{(j),\overline{K}}),$$

où le terme de droite désigne l'ensemble des composantes connexes géométriques de $\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}_{(j)}$. Par conséquent, la proposition (ii) résulte de (i) ([1] part I, 4.3).

12.14. Venons maintenant à la preuve du théorème 9.10. Soit $\overline{k}$ une clôture algébrique de k. Il suffit de démontrer 9.10 après avoir remplacé S par une composante connexe de $S_{\overline{k}}$. Donc on peut supposer que K contient une racine primitive n'-ème de l'unité, où n' est le plus grand diviseur de n premier à p. Il résulte alors de 12.13(ii) que $r = \mathrm{sw}'(\chi) + 1$ est l'unique pente critique de $\mathscr{F}$. Compte tenu de la démonstration de 7.7, on a un isomorphisme canonique $\nu_D(\mathscr{H}(\mathscr{F}_{\overline{\eta}}, \mathscr{F}_!)) \simeq \Psi_D(\mathscr{H}(\mathscr{F}, \mathscr{G}))$; donc en vertu de 12.11, on a $\nu_D(\mathscr{H}(\mathscr{F}_{\overline{\eta}}, \mathscr{F}_!)) \simeq \mathscr{L}_\chi[0]$. Par ailleurs, il résulte par exemple de [15] 1.2.3.2 et 1.2.2.1, que la transformée de Fourier du faisceau $\mathscr{L}_\chi = f^*(\mathscr{L}_\psi)$ est un faisceau de support la section de $\overline{\mathbf{T}}^{\mathrm{t}}_D$ associée au morphisme $f \colon \overline{\mathbf{T}}_D \to \mathbb{A}^1_k$ (c'est à dire la section $-\mathrm{rsw}'(\chi)$), d'où l'assertion 9.10(ii).

§13. Démonstration du Théorème 9.11

13.1. Dans cette section, on désigne par $(X, \mathtt{x})$ le k-schéma pointé et $\xi \colon S \to X$ le k-morphisme du (6.1), par D un diviseur effectif de S. On note X_0 l'adhérence schématique de $\mathtt{x}$ dans X (qui est un diviseur de Cartier) et U l'ouvert complémentaire de X_0 dans X. On pose $X \times^{\log}_k S$ le produit fibré logarithmique relativement aux diviseurs de Cartier X_0 sur X et s sur S (4.3), $r = \mathtt{v}(D)$ (5.5), $\Theta_D = \mathbf{V}(\Omega^1_R(\log) \otimes_R \mathscr{O}_D(D))$ et $\overline{\Theta}_D = \Theta_D \times_D \overline{s}$. Comme $\xi^{-1}(X_0) = s$, on peut appliquer la construction (4.6) au morphisme ξ ; on désigne par $(X \times^{\log}_k S)_{(D)}$ la dilatation de $X \times^{\log}_k S$ le long du graphe de ξ d'épaisseur D. On a alors un diagramme commutatif canonique à carrés cartésiens

$$
\begin{tikzcd}
\Theta_D \arrow[r] \arrow[d] & (X \times_k^{\log} S)_{(D)} \arrow[d] & U \times_k \eta \arrow[l] \arrow[d] \\
D \arrow[r] & S & \eta \arrow[l]
\end{tikzcd}
\tag{13.1.1}
$$

On note κ le point générique de Θ_D, $R_{\mathbb{K}}$ le séparé complété de l'anneau local de $(X \times_k^{\log} S)_{(D)}$ en κ, $\mathbb{K}$ son corps des fractions, $\mathfrak{m}_{\mathbb{K}}$ son idéal maximal. La projection canonique $(X \times_k^{\log} S)_{(D)} \to S$ étant lisse, elle induit un homomorphisme $u\colon R \to R_{\mathbb{K}}$ vérifiant $\mathfrak{m}_{\mathbb{K}} = u(\mathfrak{m})R_{\mathbb{K}}$. On note encore $\mathtt{v}\colon \mathbb{K}^\times \to \mathbb{Z}$ la valuation qui prolonge $\mathtt{v}$ sur K (5.2). Le point κ est uniquement déterminé par un R-homomorphisme

$$
t\colon \Omega^1_R(\log) \to \mathfrak{m}^r_{\mathbb{K}}/\mathfrak{m}^{2r}_{\mathbb{K}}. \tag{13.1.2}
$$

Appliquant le produit tensoriel $\otimes_R(\mathfrak{m}^{-n}/\mathfrak{m}^{-n+1})$ (pour $n \in \mathbb{Z}$), on obtient un F-homomorphisme

$$
t_n\colon \mathrm{Gr}_n\Omega^1_K \to \mathfrak{m}_{\mathbb{K}}^{-n+r}/\mathfrak{m}_{\mathbb{K}}^{-n+r+1} = \mathrm{Gr}_{n-r}\mathrm{W}_1(\mathbb{K}). \tag{13.1.3}
$$

La première projection $(X \times_k^{\log} S)_{(D)} \to X$ envoie κ sur $\mathtt{x}$. On en déduit un second homomorphisme $v\colon R \to R_{\mathbb{K}}$.

Lemme 13.2. *Pour tout $x \in K^\times$, on a $\mathtt{v}(v(x)/u(x) - 1) \geq r$ et*

$$
\frac{v(x)}{u(x)} - 1 \equiv t(d\log(x)) \mod \mathfrak{m}_{\mathbb{K}}^{r+1}.
$$

Compte tenu de la relation (12.4.4), on peut se borner aux cas où x est une unité de R ou $x = \pi$, car $r \geq 1$. Le premier cas est évident (cf. 12.4(i)). Le second se déduit d'une relation analogue et évidente dans l'anneau $R \otimes_k R[\mathtt{u}, \mathtt{u}^{-1}]/(\pi \otimes 1 - 1 \otimes \pi \cdot \mathtt{u})$.

Lemme 13.3. *Soient $m, n \geq 0$ deux entiers, $x = (x_0, \dots, x_m) \in \mathrm{fil}_n\mathrm{W}_{m+1}(K)$, $y = (y_0, \dots, y_m) \in \mathbb{K}^{m+1}$, où $y_i = \frac{v(x_i)}{u(x_i)} - 1$ si $x_i \neq 0$ et $y_i = 0$ si $x_i = 0$. Alors on a*

$$
p^{m-i}\mathtt{v}(Q_i(u(x), y)) \geq -n + p^{m-i}r, \qquad \forall\ 0 \leq i \leq m, \tag{13.3.1}
$$

$$
\mathtt{v}\left(Q_m(u(x), y) - \sum_{j=0}^{m} x_j^{p^{m-j}} y_j\right) \geq -n + 2r \geq -n + r + 1. \tag{13.3.2}
$$

Cela résulte de 13.2 en calquant la preuve de 12.5.

Proposition 13.4. *Pour tout entiers $m \geq 0$ et $n \geq r$, l'homomorphisme de groupes*

$$v - u\colon \mathrm{W}_{m+1}(K) \to \mathrm{W}_{m+1}(\mathbb{K}) \tag{13.4.1}$$

envoie $\mathrm{fil}_n\mathrm{W}_{m+1}(K)$ *dans* $\mathrm{fil}_{n-r}\mathrm{W}_{m+1}(\mathbb{K})$ *et le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Gr}_n\mathrm{W}_{m+1}(K) \arrow[r, "\mathrm{gr}(v-u)"] \arrow[d, "\mathrm{gr}(\mathrm{F}^m d)"'] & \mathrm{Gr}_{n-r}\mathrm{W}_{m+1}(\mathbb{K}) \\ \mathrm{Gr}_n\Omega^1_K \arrow[r, "t_n"'] & \mathrm{Gr}_{n-r}\mathrm{W}_1(\mathbb{K}) \arrow[u, "\mathrm{gr}(\mathrm{V}^m)"'] \end{tikzcd} \tag{13.4.2}$$

est commutatif.

Cela résulte de 12.2(iii), 13.2 et 13.3.

Lemme 13.5. *Soient $n \geq 1$ un entier premier à p, $\chi \in \mathrm{H}^1(K, \mu_n)$. Alors on a $v^*(\chi) = u^*(\chi)$ dans $\mathrm{H}^1(\mathbb{K}, \mu_n)$.*

En vertu de 13.2, pour tout $x \in K^\times$, $v(x)/u(x) \in 1 + \mathfrak{m}_{\mathbb{K}}$; c'est donc une puissance n-ème de $R_{\mathbb{K}}$. La proposition résulte alors de la théorie de Kummer.

Proposition 13.6. *Soient $n \geq 1$ un entier, n' le plus grand diviseur de n premier à p. On suppose que K contient une racine primitive n'-ème de l'unité. Soit $\chi \in \mathrm{H}^1(K, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ tel que $\mathrm{sw}(\chi) \geq 1$ et $r = \mathtt{v}(D) = \mathrm{sw}(\chi)$. Alors n est un multiple de p et $v^*(\chi) - u^*(\chi)$ est l'image de l'élément $-t_{\mathrm{sw}(\chi)}(\mathrm{rsw}(\chi))$ par l'homomorphisme composé*

$$\begin{aligned} R_{\mathbb{K}}/\mathfrak{m}_{\mathbb{K}} &\to \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(R_{\mathbb{K}}/\mathfrak{m}_{\mathbb{K}}), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(R_{\mathbb{K}}), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \\ &\to \mathrm{H}^1(\mathbb{K}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^1(\mathbb{K}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}), \end{aligned}$$

où la première flèche est l'homomorphisme d'Artin-Schreier et la dernière flèche est induite par la multiplication par n/p sur les coefficients.

Cela résulte de 13.4 et 13.5.

13.7. On conserve dans la suite de cette section les hypothèses de (13.6), de plus on fixe un homomorphisme $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \Lambda^\times$ tel que le composé $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \Lambda^\times$ avec la multiplication par n/p soit le caractère ψ (5.6). On considère $-\mathrm{rsw}(\chi)$ comme un $\overline{F}$-point de $\overline{\Theta}^{\mathfrak{t}}_D$, ou de façon équivalente comme une forme linéaire $f\colon \overline{\Theta}_D \to \mathbb{A}^1_{\overline{s}}$. On pose $\mathscr{L}_\chi = f^*(\mathscr{L}_\psi)$, où $\mathscr{L}_\psi$ est le faisceau d'Artin-Schreier associé à ψ ([15] 1.1.3). On désigne par $\mathscr{F}$ le faisceau étale localement constant constructible en Λ-modules de rang 1 sur η associé au caractère χ. En vertu de 6.2, quitte à remplacer $(X, \mathtt{x})$ par un objet de $\mathfrak{E}$, il existe $\chi_U \in \mathrm{H}^1(U, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ tel que $\xi_U^*(\chi_U) = \chi$. Posons $\mathscr{G}$ le faisceau étale localement constant constructible en Λ-modules de rang 1 sur U associé au caractère χ_U. On note $\Psi_D : \mathbf{D}^+(U \times_k \eta) \to \mathbf{D}^+(\overline{\Theta}_D)$ le foncteur des cycles proches pour le morphisme $(X \times_k^{\log} S)_{(D)} \to S$.

Proposition 13.8. *Le complexe* $\Psi_D(\mathscr{H}(\mathscr{F}, \mathscr{G}))$ (5.7) *est isomorphe à* $\mathscr{L}_\chi[0]$.

Le morphisme $(X \times_k^{\log} S)_{(D)} \to S$ étant lisse, il suffit de montrer que $\mathscr{H}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ se prolonge en un faisceau localement constant constructible sur $(X \times_k^{\log} S)_{(D)}$ dont la restriction à $\overline{\Theta}_D$ est isomorphe à $\mathscr{L}_\chi$. Cela résulte de 13.6 par le théorème de pureté de Zariski-Nagata (SGA 2 X 3.4) et SGA 1 V 8.2.

13.9. Soit L la sous-extension de $\overline{K}$ fixée par le noyau du caractère $\chi \colon G \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. En vertu de 6.3, quitte à remplacer $(X, \mathtt{x})$ par un objet de $\mathfrak{E}$, il existe un morphisme fini $f \colon Y \to X$ et un diagramme cartésien

(13.9.1)
$$\begin{tikzcd} S_L \arrow[r, "\rho"] \arrow[d] & Y \arrow[d, "f"] \\ S \arrow[r, "\xi"'] & X \end{tikzcd}$$

tels que ρ induise un isomorphisme entre les groupes d'automorphismes $\mathrm{Aut}_X(Y) \simeq \mathrm{Aut}_K(L) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et f soit étale au dessus de U de classe $\chi_U \in \mathrm{H}^1(U, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. On désigne par H et $H_{(D)}$ les schémas définis par le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} H_{(D)} \arrow[r] \arrow[d, "h_{(D)}"'] & H \arrow[r] \arrow[d, "h"] & Y \arrow[d, "f"] \\ (X \times_k^{\log} S)_{(D)} \arrow[r] & (X \times_k^{\log} S) \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

par $H'_{(D)}$ la normalisation de $H_{(D)} \times_S S_L$ dans $Y_U \times_k \eta_L$ et par $h'_{(D)} \colon H'_{(D)} \to (X \times_k^{\log} S)_{(D)} \times_S S_L$ le morphisme déduit de $h_{(D)}$.

Proposition 13.10. (i) *Le morphisme* $h'_{(D)}$ *est étale, et il induit un revêtement étale non-trivial de* $\Theta_D \times_S S_L$.

(ii) *On a* $\chi(G_{\log}^{r+}) = 0$ *et* $\chi(G_{\log}^r) \neq 0$, *où* $r = \mathrm{sw}(\chi)$

(i) Soit κ' le point générique de $\Theta_D \times_S S_L$. Le complété séparé de l'anneau local de $(X \times_k^{\log} S)_{(D)} \times_S S_L$ en κ' s'identifie à $R_{\mathbb{K}} \otimes_R R_L$. Il résulte de 13.6 que $h'_{(D)}$ est étale en tout point au dessus de κ' et le revêtement étale induit par $h'_{(D)}$ au dessus de κ' est non-trivial (10.14 et 10.15). On en déduit par le théorème de pureté de Zariski-Nagata que $h'_{(D)}$ est un revêtement étale.

(ii) On sous-entend par complété formel d'un S-schéma son complété formel le long de sa fibre spéciale. Considérons le diagramme cartésien

(13.10.1)
$$\begin{tikzcd} S_L \arrow[r, "\theta"] \arrow[d] & H \arrow[d, "h"] \\ S \arrow[r, "\gamma^{\log}"'] & (X \times_k^{\log} S) \end{tikzcd}$$

induit par (13.9.1), où $\gamma^{\log}$ est le graphe logarithmique de ξ (4.3). On note $\mathfrak{X}$ (resp. $\mathfrak{Y}$) le complété formel de $(X \times_k^{\log} S)$ (resp. H) et $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$ (resp. $\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}$) sa fibre rigide. Pour tout nombre rationnel $j \geq 0$, on désigne par $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{(j)}$ (resp. $\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}_{(j)}$) le voisinage tubulaire de $\gamma^{\log}$ (resp. θ) de rayon j ([1] II 1.2). On a $\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}_{(j)} = \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{(j)} \times_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}} \mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}$; on note $h^{\mathrm{rig}}_{(j)} \colon \mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}_{(j)} \to \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{(j)}$ la projection canonique. Le complété formel de $(X \times_k^{\log} S)_{(D)}$ est un modèle formel de $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{(r)}$. Les morphismes $h_{(D)}$ et $h'_{(D)}$ étant finis, leurs complétés formels sont alors des modèles formels des morphismes $h^{\mathrm{rig}}_{(r)}$ et $h^{\mathrm{rig}}_{(r)} \otimes_K L$ respectivement. La filtration $(G^j_{\log})_{j \in \mathbb{Q}_{\geq 0}}$ de G est définie dans [1] de sorte que

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/\chi(G^j_{\log}) \simeq \pi_0(\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}_{(j),\overline{K}}),$$

où le terme de droite désigne l'ensemble des composantes connexes géométriques de $\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}_{(j)}$. Par conséquent, la proposition (ii) résulte de (i) ([1] part I, 4.3).

13.11. On peut maintenant démontrer le théorème 9.11 en calquant la preuve de 9.10 (cf. 12.14).

§14. Ramification des Corps Locaux à Corps Résiduel Parfait

14.1. On suppose que $F = k$ et on se propose de calculer pour une Λ-représentation finie de G les invariants de ramification définis dans cet article en termes d'invariants plus classiques. Pour tout nombre rationnel $r > 0$, on sait ([1] part I 3.7 et 3.15) que $G^{r+1} = G^r_{\log}$ est le r-ème sous-groupe de ramification supérieure "classique"de G ([17] IV Section 3).

14.2. Pour tout nombre rationnel r, on pose $\mathrm{N}_r = \mathfrak{m}^{(r)} \otimes_{\overline{R}} \overline{F}$ (cf. 9.5) ; c'est un $\overline{F}$-espace vectoriel de dimension 1 dont le dual est canoniquement isomorphe à N_{-r} ; donc $\mathbf{V}(\mathrm{N}_r)(\overline{F}) = \mathrm{N}_{-r}$. On observe que si $r > 0$, $\overline{\mathbf{T}}_r$ s'identifie canoniquement à $\mathbf{V}(\mathrm{N}_{1-r})$, et $\overline{\Theta}_r$ à $\mathbf{V}(\mathrm{N}_{-r})$ grâce à (5.4.3).

14.3. Pour tout nombre rationnel r, on désigne par $\pi_1^{\mathrm{iso}}(\mathbf{V}(\mathrm{N}_r))$ le quotient du groupe fondamental de $\mathbf{V}(\mathrm{N}_r)$ qui classifie les isogénies étales de groupes algébriques ; c'est un groupe profini, abélien et annulé par p. On rappelle que l'isogénie de Lang $\mathbb{A}^1_{\overline{s}} \to \mathbb{A}^1_{\overline{s}}$, définie par $x \mapsto x^p - x$, est une base du $\overline{F}$-vectoriel $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\pi_1^{\mathrm{iso}}(\mathbb{A}^1_{\overline{s}}), \mathbb{F}_p)$. On en déduit un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\pi_1^{\mathrm{iso}}(\mathbf{V}(\mathrm{N}_r)), \mathbb{F}_p) \simeq \mathbf{V}(\mathrm{N}_{-r})(\overline{F}) = \mathrm{N}_r. \tag{14.3.1}$$

L'action de G sur $\overline{K}$ induit une action sur N_r et donc sur $\pi_1^{\mathrm{iso}}(\mathbf{V}(\mathrm{N}_r))$.

Théorème 14.4 ([1] part II 6.3(2))**.** *Pour tout nombre rationnel $r > 0$, on a un isomorphisme canonique G-équivariant*

$$\pi_1^{\mathrm{iso}}(\mathbf{V}(\mathrm{N}_{-r})) \simeq G^r_{\log}/G^{r+}_{\log}, \tag{14.4.1}$$

où l'action de G sur $G^r_{\log}/G^{r+}_{\log}$ est induite par la conjugaison.

14.5. Soient L une extension galoisienne finie de K de groupe $\overline{G}$, $(\overline{G}^j_{\log})_{j\in\mathbb{Q}_{\geq 0}}$ la filtration de ramification supérieure logarithmique de $\overline{G}$, r le *conducteur logarithmique* de L sur K, c'est à dire l'unique nombre rationnel $r \geq 0$ tel que $\overline{G}^r_{\log} \neq 0$ et $\overline{G}^{r+}_{\log} = 0$. On suppose que L/K est sauvagement ramifiée, de sorte que $r > 0$. On sait qu'il existe un diviseur D de S_L tel que $\mathtt{v}(D) = r$ (5.5).

On désigne par $(X, \mathtt{x})$ le k-schéma pointé et $\xi\colon S \to X$ le k-morphisme du (6.1), par X_0 l'adhérence schématique de $\mathtt{x}$ dans X (qui est un diviseur de Cartier) et par U l'ouvert complémentaire de X_0 dans X. On pose $q\colon S_L \to S$ la flèche canonique, $X \times^{\log}_k S_L$ le produit fibré logarithmique relativement aux diviseurs de Cartier X_0 sur X et $q^{-1}(s)$ sur S_L (4.3). Comme $\xi^{-1}(X_0) = s$, on peut appliquer la construction (4.6) au morphisme $\xi \circ q$; on désigne par $(X \times^{\log}_k S_L)_{(D)}$ la dilatation de $X \times^{\log}_k S_L$ le long du graphe de $\xi \circ q$ d'épaisseur D. On a alors un diagramme commutatif canonique à carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd} \Theta_D \arrow[r] \arrow[d] & (X \times^{\log}_k S_L)_{(D)} \arrow[d] & U \times_k \eta_L \arrow[l] \arrow[d] \\ D \arrow[r] & S_L & \eta_L \arrow[l] \end{tikzcd} \tag{14.5.1}$$

où $\Theta_D = \mathbf{V}(\Omega^1_R(\log) \otimes_R \mathscr{O}_D(D))$.

En vertu de 6.2, quitte à remplacer $(X, \mathtt{x})$ par un objet de $\mathfrak{C}$, il existe un morphisme fini $f\colon Y \to X$ et un diagramme cartésien

(14.5.2)
$$\begin{tikzcd} S_L \arrow[r, "\rho"] \arrow[d] & Y \arrow[d, "f"] \\ S \arrow[r, "\xi"'] & X \end{tikzcd}$$

tels que ρ induise un isomorphisme entre les groupes d'automorphismes $\mathrm{Aut}_X(Y) \simeq \mathrm{Aut}_K(L) = \overline{G}$ et f soit étale au dessus de U. On désigne par $H_{(D)}$ la normalisation de $(X \times^{\log}_k S_L)_{(D)}$ dans $Y_U \times_k \eta_L$ et par $f_{(D)}\colon H_{(D)} \to (X \times^{\log}_k S_L)_{(D)}$ le morphisme canonique.

Proposition 14.6. *Le morphisme $f_{(D)}$ est étale ; il induit sur chaque composante connexe au dessus de $\overline{\Theta}_D = \mathbf{V}(\mathrm{N}_{-r})$ une isogénie étale de groupe $\overline{G}^r_{\log}$; l'homomorphisme $\pi_1^{\mathrm{iso}}(\mathbf{V}(\mathrm{N}_{-r})) \to \overline{G}^r_{\log}$ ainsi défini est compatible à* (14.4.1).

Cela résulte de [1] part II 5.9(3), 6.3(2) et 5.10.

14.7. Venons maintenant à la preuve du théorème 9.15. On se limite à démontrer l'énoncé logarithmique (9.4), l'énoncé (9.3) étant équivalent (la preuve de cet équivalence est similaire à [1] part I 9.11(ii) ou part II 6.4.1). Soient $\overline{G}$ l'image de l'homomorphisme $\chi\colon G \to \mathrm{Aut}_\Lambda(\mathscr{F}_{\overline{\eta}})$, L la sous-extension de $\overline{K}$ fixée par le noyau de χ. On reprend pour cet extension la construction (14.5). Posons $\mathscr{G}$ le faisceau étale localement constant constructible en Λ-modules sur U associé à la représentation χ (via le revêtement étale f_U). On note $\Psi_D : \mathbf{D}^+(U \times_k \eta_L) \to \mathbf{D}^+(\overline{\Theta}_D)$ le foncteur des cycles proches pour le morphisme $(X \times^{\log}_k S_L)_{(D)} \to S_L$. On a alors un isomorphisme canonique $\nu^{\log}_D(\mathscr{F} \boxtimes \Lambda) \simeq \Psi_D(\mathscr{G} \boxtimes \Lambda)$ (cf. la preuve de 7.7). D'après 14.6, $\mathscr{G} \boxtimes \Lambda$ se prolonge en un faisceau localement constant constructible sur $(X \times^{\log}_k S_L)_{(D)}$. D'autre part, $(X \times^{\log}_k S_L)_{(D)} \to S_L$ est lisse. La conjecture 9.4 résulte alors de 14.6.

14.8. On rappelle que $\mathrm{Spec}(\Lambda)$ est connexe (5.6). Soient $\mathscr{F}$ un faisceau étale constructible en Λ-modules sur η, $r > 0$ une pente logarithmique critique de $\mathscr{F}$ (9.2). On rappelle que $G^r_{\log}/G^{r+}_{\log}$ est un $\mathbb{F}_p$-vectoriel et qu'on a fixé un caractère non-trivial $\psi\colon \mathbb{F}_p \to \Lambda^\times$. Donc l'action de $G^r_{\log}/G^{r+}_{\log}$ sur $(\mathscr{F}_{\overline{\eta}})^{G^{r+}_{\log}}$

détermine un ensemble fini de caractères $G^r_{\log}/G^{r+}_{\log} \to \mathbb{F}_p$, ce qui induit par (14.3.1) et (14.4.1) un sous-ensemble fini $\Sigma_r(\mathscr{F})$ de N_{-r}.

Proposition 14.9. *Soient $\mathscr{F}$ un faisceau étale constructible en Λ-modules plats sur η, r sa plus grande pente logarithmique critique. Supposons que $\mathscr{F}$ soit sauvagement ramifié, de sorte que $r > 0$. Alors on a $\Sigma_r(\mathscr{F}) = \mathtt{C}_{r+1}(\mathscr{F}) = \widetilde{\mathtt{C}}_r(\mathscr{F})$ (14.2).*

Il suffit de calquer (14.7).

Références

[1] A. Abbes and T. Saito, Ramification of local fields with imperfect residue fields, Amer. J. Math. **124** (2002), no. 5, 879–920; ibid. II, Doc. Math. (2003), Extra Vol., 5–72 (electronic).

[2] ———, The characteristic class and ramification of an ℓ-adic étale sheaf, Invent. Math. **168** (2007), 567–612.

[3] M. Artin, Algebraic approximation of structures over complete local rings, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. No. 36 (1969), 23–58.

[4] S. Bosch, W. Lütkebohmert and M. Raynaud, *Néron models*, Springer, Berlin, 1990.

[5] J.-L. Brylinski, Théorie du corps de classes de Kato et revêtements abéliens de surfaces, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **33** (1983), no. 3, 23–38.

[6] P. Deligne, Théorèmes de finitude en cohomologie ℓ-adique, dans *Cohomologie étale*, SGA $4\frac{1}{2}$, LNM **569**, Springer-Verlag (1977), 233–261.

[7] ———, Le formalisme des cycles évanescents, dans *Groupes de Monodromie en géométrie algébrique*, SGA 7 II, LNM **340**, Springer-Verlag (1973), 82–115.

[8] K. Fujiwara, Theory of tubular neighborhood in étale topology, Duke Math. J. **80** (1995), no. 1, 15–57.

[9] L. Illusie, Complexe de de Rham-Witt et cohomologie cristalline, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **12** (1979), no. 4, 501–661.

[10] M. Kashiwara and P. Schapira, *Sheaves on manifolds*, Springer, Berlin, 1990.

[11] K. Kato, Swan conductors for characters of degree one in the imperfect residue field case, in *Algebraic K-theory and algebraic number theory (Honolulu, HI, 1987)*, 101–131, Contemp. Math., 83, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.

[12] ———, Class field theory, $\mathscr{D}$-modules, and ramification on higher-dimensional schemes. I, Amer. J. Math. **116** (1994), no. 4, 757–784.

[13] K. Kato and T. Saito, On the conductor formula of Bloch, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. No. 100 (2004), 5–151.

[14] ———, Ramification theory for varieties over a perfect field, Ann. Math. **168** (2008), 33–96.

[15] G. Laumon, Transformation de Fourier, constantes d'équations fonctionnelles et conjecture de Weil, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. No. 65 (1987), 131–210.

[16] S. Matsuda, On the Swan conductor in positive characteristic, Amer. J. Math. **119** (1997), no. 4, 705–739.

[17] J.-P. Serre, *Corps locaux*, Deuxieme edition, Hermann, Paris, 1968.

[18] J.-L. Verdier, Spécialisation de faisceaux et monodromie modérée, dans *Analyse et topologies sur les espaces singuliers, II, III (Luminy, 1981)*, 332–364, Astérisque, 101-102, Soc. Math. France, Paris, 1981.