

コンピュータサイエンス入門 (2012年度) 演習

1 古典論理と直観主義論理

定義により $\vdash_{\text{IL}} \varphi$ ならば $\vdash_{\text{CL}} \varphi$ であり、逆は成り立たない。ゆえに直観主義論理は古典論理よりも弱い論理であるように見える。確かに表面的にはその通りなのだが、よく考えてみればもっと別の見方をすることもできる。なぜならば古典論理は直観主義論理に埋め込むことができ、しかも直観主義論理は古典論理には識別できないような微細な事柄について識別できるからである。逆はそう簡単には成り立たない。ここでは演習を通じてこのあたりの事情について検討する。

練習問題 1.1 次の論理式が古典論理で証明可能なことを示せ。

1. $\varphi \vee \psi \leftrightarrow \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$
2. $\exists x.\varphi \leftrightarrow \neg\forall x.\neg\varphi$

(ヒント: $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \rightarrow \varphi \vee \psi$ を証明するには、まず $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi), \neg(\varphi \vee \psi) \vdash \perp$ を証明して (*abs*) 規則を使え。)

負の論理式 (negative formula) を以下のように定義する。

$$\varphi, \psi ::= \neg p(t_1, \dots, t_n) \mid \perp \mid \varphi \wedge \psi \mid \varphi \rightarrow \psi \mid \forall x.\varphi.$$

すなわち、原子論理式の否定と \perp から始めて、 $\wedge, \rightarrow, \forall$ を用いて構成できる論理式が負の論理式である。

練習問題 1.2 φ を論理式とするとき、負の論理式 φ_N が存在して

$$\vdash_{\text{CL}} \varphi \leftrightarrow \varphi_N$$

となることを簡単に説明せよ。(厳密な証明は与えなくてよい。練習問題 1.1 を使え。原子論理式 $p(t_1, \dots, t_n)$ と \top をどうするかが問題である。)

練習問題 1.3 φ を負の論理式とするとき、

$$(*) \vdash_{\text{IL}} \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$$

が成り立つことを証明せよ。証明は φ の構造についての帰納法による。すなわち、まず最も基本的な場合である、 $\neg p(t_1, \dots, t_n)$ と \perp について (*) が成り立つことを示せ。次に φ, ψ について (*) が成り立つと仮定すると (帰納法の仮定)、 $\varphi \wedge \psi, \varphi \rightarrow \psi, \forall x.\varphi$ についても (*) が成り立つことを示せ。

さて、古典論理と直観主義論理の唯一の違いは背理法、すなわち (abs) 規則が使えるかどうかである。しかし練習問題により、負の論理式については (abs) 規則を使わなくても同じことが推論できる：

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi \quad \frac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg\neg\varphi} \rightarrow I}{\Gamma \vdash \varphi} \rightarrow E$$

ゆえに負の論理式に制限すれば、古典論理と直観主義論理の区別は消滅してしまう。

定理 1.4 任意の φ について

$$\vdash_{\text{CL}} \varphi \iff \vdash_{\text{CL}} \varphi_N \iff \vdash_{\text{IL}} \varphi_N.$$

実際には上の定理を証明するにはもう少し厳密な論証が必要なのだがそれはさておきとして、上の定理によれば、

- 直観主義者は、古典主義者の言っていることを完璧に理解することができる。実際、古典主義者が「 $\varphi \vee \psi$ だ」と口にするたびに、直観主義者は「ああ、奴は $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ と言っているんだな」と脳内変換してあげればよい。 $\varphi \mapsto \varphi_N$ という脳内変換のもとで直観主義者は古典主義者と対等の証明能力を持つ。
- 直観主義者は「 $\varphi \vee \psi$ 」と「 $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ 」ということと完璧に区別して話すが、古典主義者にはその区別ができない。イギリス人のブラックジョークを日本人がなかなか理解できないのと同じように、直観主義者の微妙な言い回しを古典主義者は必ずしも理解できないのである。
- もちろん、そのような繊細な区別をすることが数学においてどの程度有用かは別問題である。ブラックジョーク同様、単なる自己満足にすぎないのかもしれない。(いやそうではない、というのが計算機科学とともに台頭した構成主義の考え方である。)

2 テューリング機械

練習問題 2.1 次のテューリング機械 $M = (\Sigma, Q, \delta, q_I, q_F)$ を考える。

- $\Sigma = \{0, 1, *, \sqcup\}$
- $Q = \{q_I, q_F, q_0, q_1, q_r, q_e\}$

- $\delta : \Sigma \times Q \rightarrow \Sigma \times Q \times \{\leftarrow, \rightarrow\}$ は次のように定義される :

$$\begin{aligned}
(0, q_l) &\mapsto (*, q_0, \leftarrow) & (0, q_r) &\mapsto (0, q_r, \rightarrow) \\
(1, q_l) &\mapsto (*, q_1, \leftarrow) & (1, q_r) &\mapsto (1, q_r, \rightarrow) \\
(*, q_l) &\mapsto (*, q_l, \rightarrow) & (*, q_r) &\mapsto (*, q_l, \rightarrow) \\
(\sqcup, q_l) &\mapsto (\sqcup, q_e, \leftarrow) & (\sqcup, q_r) &\mapsto (\sqcup, q_e, \leftarrow) \\
(0, q_0) &\mapsto (0, q_0, \leftarrow) & (0, q_1) &\mapsto (0, q_1, \leftarrow) \\
(1, q_0) &\mapsto (1, q_0, \leftarrow) & (1, q_1) &\mapsto (1, q_1, \leftarrow) \\
(*, q_0) &\mapsto (*, q_0, \leftarrow) & (*, q_1) &\mapsto (*, q_1, \leftarrow) \\
(\sqcup, q_0) &\mapsto (0, q_r, \rightarrow) & (\sqcup, q_1) &\mapsto (1, q_r, \rightarrow) \\
(0, q_e) &\mapsto (0, q_e, \leftarrow) \\
(1, q_e) &\mapsto (1, q_e, \leftarrow) \\
(*, q_e) &\mapsto (\sqcup, q_l, \leftarrow) \\
(\sqcup, q_e) &\mapsto (\sqcup, q_f, \rightarrow)
\end{aligned}$$

$M(10110)$ の値を求めよ。 M はどんな働きをするチューリング機械であると言えるか？

どんなチューリング機械 $M = (\Sigma, Q, \delta, q_l, q_f)$ も何らかの $0-1$ 列 $w \in \{0, 1\}^*$ でコード化できる。 w に対応するチューリング機械を M_w と書く。 (w がチューリング機械のコードにもなっていないときには、適当なダミーのチューリング機械をとって M_w とする)。すると言語

$$L := \{w \mid M_w(w) = 1\}$$

は再帰的枚挙可能である。実際 $w \in L$ かどうかを判定するには、まず w に対応する機械 M_w を構築し、入力 w を与え、計算をシミュレートし、 M_w が 1 を出力するかどうかを調べればよい。チャーチ・チューリングのテーゼにより、 L を受理するチューリング機械 M_L が存在する。計算のシミュレーションは停止せず永遠に続く場合もあることに注意。それゆえ M_L は L を受理はするが決定はしない。

練習問題 2.2 L は再帰的ではないことを証明せよ。(ヒント: 仮に L が再帰的だとすると、 L を決定するチューリング機械 M が存在するはずである。 M をすこしいじれば \bar{L} を決定するチューリング機械が存在することを示せ。あとは典型的な対角線論法である。)

3 β 関数を用いた原始再帰的定義

ゲーデルの β 関数を用いて指数関数 x^y を次のように定義したことを思い出そう。

$$x^y = z \quad \equiv \quad \exists w. \beta(w, 1) = 1 \wedge \forall 1 \leq i \leq y (\beta(w, i+1) = x \cdot \beta(w, i)) \wedge \beta(w, y+1) = z.$$

ただし

$$\forall 1 \leq i \leq y. \varphi \quad \equiv \quad \forall i \leq y (1 \leq i \rightarrow \varphi).$$

練習問題 3.1

1. 階乗関数 $x! = z$ を表す算術の論理式を定義せよ。

2. フィボナッチ数列 $fib(x) = z$ を表す算術の論理式を定義せよ。ただし

$$fib(0) = 0, \quad fib(1) = 1, \quad fib(i+2) = fib(i) + fib(i+1).$$

(細かい点だが、 β 関数の定義の都合上 $\beta(w, 0)$ は意味のある値を返さないことに注意。意味があるのは $\beta(w, 1), \beta(w, 2), \dots$ である。)

4 小学生 Q の証明能力

まずは等号についておさらいしておく。11 ページで挙げた等号についての推論規則は、算術の言語に合わせて書くと次のようになる。

$$\frac{}{\Gamma \vdash t = t} \text{ (eq1)} \quad \frac{\Gamma \vdash t_1 = u_1 \quad \Gamma \vdash t_2 = u_2}{\Gamma \vdash t_1 + t_2 = u_1 + u_2} \text{ (eq2)}$$

[1em]

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 = u_1 \quad \Gamma \vdash t_2 = u_2}{\Gamma \vdash t_1 \cdot t_2 = u_1 \cdot u_2} \text{ (eq2)} \quad \frac{\Gamma \vdash t_1 = u_1 \quad \Gamma \vdash t_2 = u_2 \quad \Gamma \vdash t_1 = t_2}{\Gamma \vdash u_1 = u_2} \text{ (eq3)}$$

(eq1), (eq3) を用いれば $\vdash_{\mathbf{IL}} t = u \rightarrow u = t$ が成り立つことはすでに述べた通りである。同様に、 $\vdash_{\mathbf{IL}} t = u \wedge u = v \rightarrow t = v$ も成り立つ。

練習問題 4.1 $t, u, v(x)$ を算術の項とするととき、

$$(*) \vdash_{\mathbf{IL}} t = u \rightarrow v(t) = v(u)$$

が成り立つことを示せ。 $(v$ の構成に関する帰納法による。まず v が変数のときは自明である。次に $v_1(x), v_2(x)$ について $(*)$ が成り立つと仮定して、 $v(x) \equiv v_1(x) + v_2(x)$ および $v(x) \equiv v_1(x) \cdot v_2(x)$ についても $(*)$ が成り立つことを示せばよい。)

練習問題 4.2 t, u を算術の項、 $\varphi(x)$ を算術の論理式とするととき、

$$(*) \vdash_{\mathbf{IL}} t = u \rightarrow \varphi(t) \rightarrow \varphi(u)$$

が成り立つことを示せ。

補題 3.17 の特別な場合として、次の練習問題を挙げておく。

練習問題 4.3 Q は次の文を証明できることを示せ。

1. $2 \neq 3$
2. $2 + 1 = 3$
3. $\forall x(x \leq 1 \rightarrow x = 0 \vee x = 1)$

ただし $t \leq u$ は $\exists z.z + t = u$ の省略表現とする。(たとえば 1 を示すには、シークエント $Q \vdash_{\mathbf{CL}} S(S(0)) = S(S(S(0))) \rightarrow \perp$ の証明図を書けばよい。)