コンピュータサイエンス入門（2012 年度・前期） レポート課題

以下に示す問 I~ IV に対する解答を、A4 レポート用紙にまとめて提出せよ。

提出期限と提出先: 2012 年 8 月 2 日 (木) 17 時、共通教育教務掛

諸注意

- 表紙に氏名・所属・学生番号を明記すること。
- 答案には問題の番号を明記すること。
- 問題はすべて講義内容に基づいて作成されている。講義での配布資料など、関連する情報は `http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~terui/cs2012.html` にも掲載する。問題に訂正がある場合には同ページに掲示するのでレポート提出前に確認すること。
- レポートの丸写しはしないこと。オリジナル・コピー共に不合格とすることがある。
- 難問も含まれているので無理して全部やる必要はない。ある程度できていれば優とする。

問 I (論理) 以下の論理式が **CL** で証明可能であることを示せ（証明図を書け）。

1. $(\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \neg\varphi)$
2. $(\varphi \to \psi) \to (\neg\varphi \vee \psi)$
3. $\forall x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \to (\forall y.\varphi(y)) \wedge (\forall z.\psi(z))$
4. $\forall x(\varphi(x) \to \psi(x)) \to \neg\psi(t) \to \exists z.\neg\varphi(z)$

問 II (算術)

1. 整数論におけるゴールドバッハの予想を算術の文を用いて表せ。
2. 61 ページで定義したコラッツ関数 col を考える。ゲーデルの β 関数を用いて次を満たす算術の論理式 $\varphi(x)$ を定義せよ：任意の自然数 $n \geq 1$ について

$$col(n) = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbb{N} \models \varphi(\mathsf{n}).$$

（ヒント：$col(n) = 1$ となるためにはどのような数列が存在すればよいかを考えよ。）

3. T を理論 $\mathbf{Q}$ の 1-無矛盾な再帰的拡大とする。このとき定理 3.27 により集合 $\mathsf{Prov}_T = \{\ulcorner\varphi\urcorner \mid \vdash_T \varphi\}$ は Σ_1 集合である。ゆえにある一変数 Σ_1 論理式 $\mathsf{prov}_T(x)$ が存在して、任意の論理式 φ について

$$\vdash_T \varphi \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbb{N} \models \mathsf{prov}_T([\varphi])$$

が成り立つ。（ただし $[\varphi]$ は φ のゲーデル数 $\ulcorner\varphi\urcorner$ を数項で表したものである。たとえば $\ulcorner\varphi\urcorner = 3$ のとき $[\varphi] = S(S(S(0)))$.）

また、本講義では証明していないが、対角化定理を用いれば、

$$\vdash_T G \leftrightarrow \neg\mathsf{prov}_T([G])$$

を満たす文 G（いわゆるゲーデル文）が構成できる。このとき次のことを示せ。

(i) $\nvdash_T G$（ヒント：Σ_1 完全性定理を用いよ）

(ii) $\nvdash_T \neg G$

問 III (ラムダ計算)

1. フィボナッチ数列を表す関数

$$fib(0) = fib(1) = 1, \qquad fib(n+2) = fib(n+1) + fib(n)$$

をラムダ項を使って定義せよ。（ヒント：61 ページを参考に、不動点 fix を用いよ。）

2. 二階直観主義命題論理 **IL2** において

$$A \vee B := \forall\alpha.(A \Rightarrow \alpha) \Rightarrow (B \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \alpha$$

と定義する。このとき 69 ページを参考にして、次の推論規則を **IL2** においてシミュレートせよ。

$$\frac{\vdash A}{\vdash A \vee B}\ (\vee I) \qquad \frac{\vdash A \vee B \quad A \vdash C \quad B \vdash C}{\vdash C}\ (\vee E)$$

つまり上のシークエントから下のシークエントにいたる証明図を書け。

3. 72 ページを参考にして、上問で得られた証明図にラムダ項を割り当てよ。それにより

$$\frac{\vdash M : A}{\vdash \mathsf{in}_1 M : A \vee B}\ (\vee I) \qquad \frac{\vdash N : A \vee B \quad x : A \vdash K[x] : C \quad y : B \vdash L[y] : C}{\vdash \delta(N, K[x], L[y]) : C}\ (\vee E)$$

となるラムダ項 $\mathsf{in}_1 M$, $\delta(N, K[x], L[y])$ を求めよ。ただしここで $M, N, K[x], L[y]$ は任意のラムダ項とする。

4. 上問の $\mathsf{in}_1 M$, $\delta(N, K[x], L[y])$ をうまくとれば

$$\delta(\mathsf{in}_1 M, K[x], L[y]) \longrightarrow_\beta^* K[M]$$

が成り立つことを示せ。（もしこれが成り立たなかったとしたら $\mathsf{in}_1 M$, $\delta(N, K[x], L[y])$ の取り方がよくなかったのである。これを満たすような $\mathsf{in}_1 M$, $\delta(N, K[x], L[y])$ を改めて求めよ。）

問 IV (エッセイ)　本講義で取り上げた話題について思うところがあれば自由に論じよ（半ページ以上）。（問 I — III がある程度できている自信があれば、本問には答えなくてよい。）

たとえば、標準的な数学は古典論理にのっとっているにもかかわらず、古典論理ではダメットの法則や酒場の法則など、一見不思議に見える論理式が証明できてしまうこと。また非構成的な証明が許されてしまうこと。一方、直観主義論理においては背理法のような基本的な論法すら制限されてしまうこと。チャーチ・テューリングのテーゼの妥当性。ゲーデル不完全性の意義。証明と計算の対応関係を主張するカリー・ハワード対応についてなどなど。または本講義を通してコンピュータやプログラミングについて考えたことがあれば、それを述べてくれてもよい。