

レポート課題

照井 一成

京都大学数理解析研究所

提出期限：平成 21 年 12 月 14 日（月）

提出先：理学部数学教室事務室

質問等：terui@kurims.kyoto-u.ac.jp

1. ゴールドバッハの予想（2 より大きいどんな偶数も二つの素数の和で表すことができる）を算術の論理式を用いて表せ。それはどの程度の複雑さの論理式と同値か？（ Σ_1 論理式、 Π_2 論理式等）
2. 次のことを証明せよ。任意の Δ_1 関数 $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ に対して、次の性質を満たす Π_1 論理式 $G_f(x, y)$ が存在する：

- 任意の $n \in \mathbb{N}$ について、 $f(n) = m \iff G_f(\bar{n}, \bar{m})$ は真である。

このことを用いて補題 11 の後半を証明せよ。

3. $T = \emptyset$ とする（すなわち T は一階述語論理）とき、次のことは一般には成り立たないことを示せ。任意の論理式 $A(x), B(x)$ について

$$\vdash_T \forall x(A(x) \vee B(x)) \rightarrow (\forall x A(x) \vee \forall x B(x)).$$

（たとえば、 $\vdash_T A$ ならば $\vdash_{\text{PA}} A$ であること、ならびに定理 22 を用いよ。）

4. 本講義で取り上げた話題（たとえばコンピュータと数学、パラドックスと数学の基礎付け、不完全性定理の意義など）をひとつ取り上げ、講義の自分なりの理解を示しつつ、自由に論じよ。