

非古典論理におけるカット除去定理の意味論的考察

照井 一成（国立情報学研究所、総合研究大学院大学）

1 はじめに

カット除去定理— シークエント計算において証明可能な論理式はカット規則を用いずに証明可能である— は、言うまでもなく証明論の基本定理である。1934 年 Gentzen [4] により古典論理・直観主義論理のシークエント計算に対して証明されて以来、この定理は、様々な論理・シークエント計算に対して、様々な仕方で証明され（または反例が示され）、様々な仕方で利用されてきた。その重要性に鑑みれば、カット除去定理とは、ただ単に証明して利用すればよいというものではなく、それ自体重要な研究対象として積極的に取り上げられるべきものであることは明らかであろう。

ここでの我々の関心は、古典論理や直観主義論理をはじめとする（何らかの意味で）“自然な” 論理にある。自然な論理については大抵の場合カット除去定理が成立する（というよりも、カット除去定理の成立自体が“自然さ”の基準の一つですらある）。しかし、自然な論理について「なぜ」カット除去がこんなにうまくいくのかを理解するためには、敢えてカット除去がうまくいかないような“不自然な” 論理をも考えて、両者の違いがどこにあるのかを検討してみる必要がある。そこで、ここでは様々な非古典論理のシークエント計算を考え、カット除去定理が成立するための必要十分条件を与えることを試みる。

我々の条件は意味論的である。それは統語論的なカット除去に対して意味論的な視点から洞察を与うるものである。また、カット除去が成り立たないようなシークエント計算に対して、カット除去に関するカウンターモデルを与えることを可能とするものである。

我々の条件はモジュラーである。すなわち、各構造規則ごと、各論理結合子ごとに条件を挙げることが可能であるため、我々の条件に従ってカット除去定理を示していくならば、論理体系をちょっと拡張する度に新たにカット除去定理の証明を 1 からやり直さなければならない、という事態を回避することができる。

以下、第二章では、構造規則を持たない論理体系 **Full Lambek Calculus (FL, [10])** のシークエント計算を導入し、FLにさまざまな構造規則を加えたときにカット除去定理が

成立するための必要十分条件を与える。我々の条件は Girard [5] による構造規則の自然性テストに由来する。また十分性の証明は、岡田 [8, 9] による相意味論を用いたカット除去定理の証明法を分析することにより得られる。第三章では、様々な構造規則に加え、様々な命題論理結合子を加えたときに何が起こるかを検討する。

関連研究：[6, 11, 2] は様々な論理体系についてカット除去定理が成り立つための十分条件を与えているが、それは純粋に統語論的な性質のものであり、また必要条件については考慮されていない。[1] は標準的な構造規則を全て持つシーケント計算上でさまざまな命題論理結合子を考え、それらについてカット除去定理が成り立つための統語論的・意味論的必要十分条件を与えている。一方、我々のフレームワークは、様々な構造規則を組み合わせて得られる体系に対しても必要十分条件を与えることができるという点でより一般的である。

以下の記述では、わかりやすさを重視し、一般性や厳密性を一部犠牲にしている所がある。詳細については、論文 [12, 3] を参照されたい。

2 構造規則とカット除去定理

FLの論理式は命題定項 1 であるか、命題変数 $\alpha, \beta, \dots$ であるか、あるいは乗法的連言 $A \otimes B$ 、加法的選言 $A \oplus B$ 、左乗法的含意 $A \multimap B$ のいずれかの形をしている（ここでは線形論理の記法を用いる。また便宜上、上記以外の命題定項 $0, \top, \perp$ および論理結合子 $A \& B, A \multimap B$ は省いて説明を進める）。論理式を $A, B, C, \dots$ により表し、論理式の列を $\Gamma, \Delta, \Sigma, \dots$ により表す。FLのシーケントは $\Gamma \Rightarrow C$ の形である。

$\Gamma \equiv A_1, \dots, A_n$ ($n \geq 1$) のとき $\otimes \Gamma$ は $A_1 \otimes \dots \otimes A_n$ を表す。また Γ が空列のときには、 1 を表すものとする。

FLの推論規則は以下の通りである。

$$\begin{array}{c}
\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Delta_1, A, \Delta_2 \Rightarrow C}{\Delta_1, \Gamma, \Delta_2 \Rightarrow C} \text{ cut} \qquad \frac{}{A \Rightarrow A} \text{ init} \\
\\
\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Delta_1, B, \Delta_2 \Rightarrow C}{\Delta_1, \Gamma, A \multimap B, \Delta_2 \Rightarrow C} \multimap l \qquad \frac{A, \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \multimap B} \multimap r \qquad \frac{}{\Gamma_1, 1, \Gamma_2 \vdash C} 1l \\
\\
\frac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \Rightarrow C}{\Gamma_1, A \otimes B, \Gamma_2 \Rightarrow C} \otimes l \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Delta \Rightarrow B}{\Gamma, \Delta \Rightarrow A \otimes B} \otimes r \qquad \frac{}{\vdash 1} 1r \\
\\
\frac{\Gamma_1, A, \Gamma_2 \Rightarrow C \quad \Gamma_1, B, \Gamma_2 \Rightarrow C}{\Gamma_1, A \oplus B, \Gamma_2 \Rightarrow C} \oplus l \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow A \oplus B} \oplus r_1 \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \oplus B} \oplus r_2
\end{array}$$

FLについてはカット除去定理が成り立つ。すなわち、カットを用いて証明可能な論理式

はカットを用いずとも証明可能である。 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ を論理式の集合とする。各 $A \in \mathcal{A}$ について $\Rightarrow A$ を公理として FL に付け加えた体系において各 $B \in \mathcal{B}$ が証明可能なとき、 $\mathcal{B}$ は $\mathcal{A}$ から FL 上で導出可能であるという。

FL は構造規則を全く持たない論理である。これに様々な構造規則を付け加えることにより、様々な論理体系を得ることができる。最初に Gentzen により導入された標準的な構造規則は、次のものである。

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \Rightarrow C}{\Gamma, B, A, \Delta \Rightarrow C} \mathbf{e} \quad \frac{\Gamma, \Delta \Rightarrow C}{\Gamma, A, \Delta \Rightarrow C} \mathbf{w} \quad \frac{\Gamma, A, A, \Delta \Rightarrow C}{\Gamma, A, \Delta \Rightarrow C} \mathbf{c}$$

FL+e は直観主義線形論理の加法乗法部分体系に相当する。さらに c を付け加えれば、関連性論理 (の一体系) が得られる。FL+e+c+w は直観主義論理に他ならない。その他にも例えば次のような構造規則が提案されている：

$$\frac{\Gamma, \Phi, \Phi, \Delta \Rightarrow C}{\Gamma, \Phi, \Delta \Rightarrow C} \mathbf{seq-c} \quad \frac{\Gamma, A, \Delta \Rightarrow C}{\Gamma, A, A, \Delta \Rightarrow C} \mathbf{exp} \quad \frac{\Gamma, \Phi_1, \Delta \Rightarrow C \quad \Gamma, \Phi_2, \Delta \Rightarrow C}{\Gamma, \Phi_1, \Phi_2, \Delta \Rightarrow C} \mathbf{min}$$

seq-c は c と異なり、任意の長さの論理式の列を一気に縮約することができる。exp は expansion、min は mingle と呼ばれている [13, 7]。これらはそれぞれ

$$\begin{array}{ll} \widehat{\mathbf{e}}: & B \otimes A \multimap A \otimes B \quad \widehat{\mathbf{w}}: & A \multimap \mathbf{1} \\ \widehat{\mathbf{c}}: & A \multimap A \otimes A \quad \widehat{\mathbf{seq-c}}: & \bigotimes \Phi \multimap (\bigotimes \Phi) \otimes (\bigotimes \Phi) \\ \widehat{\mathbf{exp}}: & A \otimes A \multimap A \quad \widehat{\mathbf{min}}: & (\bigotimes \Phi_1) \otimes (\bigotimes \Phi_2) \multimap (\bigotimes \Phi_1) \oplus (\bigotimes \Phi_2) \end{array}$$

と FL 上で公理化できる。

より一般的に、次の形の規則 R を加法的構造規則と呼ぶことにする：

$$\frac{\Gamma, \Phi_1, \Delta \Rightarrow C \quad \cdots \quad \Gamma, \Phi_n, \Delta \Rightarrow C}{\Gamma, \Phi_0, \Delta \Rightarrow C} R \quad (n \geq 1)$$

ただし、条件 (*) $\{\Phi_1, \dots, \Phi_n\} \subseteq \{\Phi_0\}$ が満たされているものとする。公理の形で表せば、

$$\widehat{R} \equiv \bigotimes \Phi_0 \multimap (\bigotimes \Phi_1) \oplus \cdots \oplus (\bigotimes \Phi_n)$$

となる。条件 (*) により、

1. どんな加法的構造規則も直観主義論理において導出可能である。
2. FL にこれらの加法的構造規則を加えたときにカット除去定理が成り立つならば、同時に部分論理式特性 (subformula property) も成り立つ。

注意すべきなのは、上の推論規則や公理はスキーマとして取り扱われているという点である。例えば $\hat{e}$ は、実際には論理式の集合 $\{B \otimes A \multimap A \otimes B \mid A, B \text{ は論理式}\}$ ($\hat{e}$ の事例集合) を表している。ここで A, B を原子論理式に制限した場合、すなわち集合 $\{\beta \otimes \alpha \multimap \alpha \otimes \beta \mid \alpha, \beta \text{ は命題変数}\}$ を $\hat{e}$ の原子事例集合と呼ぶことにする。また A, B を $\gamma \otimes \delta$ の形の論理式、あるいは $\gamma \oplus \delta$ の形の論理式に制限した場合、すなわち集合

$$\begin{aligned} & \{(\beta_1 \otimes \beta_2) \otimes (\alpha_1 \otimes \alpha_2) \multimap (\alpha_1 \otimes \alpha_2) \otimes (\beta_1 \otimes \beta_2) \mid \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \text{ は命題変数}\} \\ & \{(\beta_1 \oplus \beta_2) \otimes (\alpha_1 \oplus \alpha_2) \multimap (\alpha_1 \oplus \alpha_2) \otimes (\beta_1 \oplus \beta_2) \mid \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \text{ は命題変数}\} \end{aligned}$$

をそれぞれ $\hat{e}$ の $\otimes$ 事例集合、 $\oplus$ 事例集合と呼ぶことにする^{*1}。一般の加法的構造規則についても同様である。

さて具体例に戻ろう。次のことが知られている：

- c と seq-c はFL上で同値である（一方から他方が導出可能である）。しかし、カット除去定理はFL+ seq-c については成り立つが、FL+ c については成り立たない。
- exp と min はFL上で同値である。しかし、カット除去定理はFL+ min については成り立つが、FL+ exp については成り立たない。

このように、構造規則はたとえ論理的に同値であろうとも、カット除去に関して異なる振る舞いをすることがある。ここでの目的は、この相違を「カット除去」という概念とは独立に特徴付けることにある。鍵となるのは、次の事実である：

- $\widehat{\text{seq-c}}$ の $\otimes$ 事例集合は $\widehat{\text{seq-c}}$ の原子事例集合からFL上で導出できる。しかし同様のことは $\hat{c}$ については成り立たない。（次のことに注意： $\widehat{\text{seq-c}}$ と $\hat{c}$ は同じ事例集合を持つが、原子事例集合は異なる。例えば $\alpha \otimes \beta \multimap (\alpha \otimes \beta) \otimes (\alpha \otimes \beta)$ は $\widehat{\text{seq-c}}$ の原子事例ではあるが $\hat{c}$ の原子事例ではない。）すなわち $\widehat{\text{seq-c}}$ は原子事例集合から $\otimes$ 事例集合へと“繁殖”するが、 $\hat{c}$ はそうではない。
- FL上で、 $\widehat{\text{min}}$ の $\oplus$ 事例集合は $\widehat{\text{min}}$ の原子事例集合からFL上で導出できる。しかし同様のことは $\widehat{\text{exp}}$ については成り立たない。

これらの観察を一般化することにより次の定義が得られる。以下、 $\mathcal{R}$ は何らかの加法的構造規則の集合を表すものとする。また、 $\hat{\mathcal{R}} = \{\hat{R} \mid R \in \mathcal{R}\}$ とし、 $\hat{\mathcal{R}}$ の各元の原子事例集合の和を単に $\hat{\mathcal{R}}$ の原子事例集合と呼ぶことにする。 $\otimes$ 事例集合、 $\oplus$ 事例集合についても同様である。

^{*1} [12] では任意の n について $\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_n, \alpha_1 \oplus \dots \oplus \alpha_n$ の形の論理式からなる事例を考えていたが、 $n = 2$ の場合だけ考えれば十分であることが、Felix Bou 氏により指摘された。

定義 1 $\mathcal{R}$ が統語論的繁殖性 (syntactic propagation property) を満たすのは次の場合である： $\widehat{\mathcal{R}}$ の $\otimes$ 事例集合および $\oplus$ 事例集合は $\widehat{\mathcal{R}}$ の原子事例集合から FL 上で導出できる。

すると次のことが成り立つ。FL+ $\mathcal{R}$ についてカット除去定理が成り立つならば、 $\mathcal{R}$ は統語論的繁殖性を満たす。このことの証明においては、カット除去定理が部分論理式特性を含意するという事実が本質的である。

次に繁殖性という性質を意味論的に表現する方法を考える。そのために、FL に対する相意味論 [10] を導入する*²。

相構造 (phase structure) $\mathbf{P} = (\mathbf{M}, C)$ とは自由モノイド $\mathbf{M} = \langle M, \cdot, 1 \rangle$ と次の性質を満たす閉包演算子 $C : \wp(M) \longrightarrow \wp(M)$ の組のことである：任意の $X, Y \subseteq M$ について

$$\begin{aligned} X &\subseteq C(X) & X &\subseteq Y \implies C(X) \subseteq C(Y) \\ C(C(X)) &\subseteq C(X) & C(X) \bullet C(Y) &\subseteq C(X \bullet Y) \end{aligned}$$

ここで $X \bullet Y = \{x \cdot y \mid x \in X, y \in Y\}$ 。 $X = C(X)$ を満たす集合 $X \subseteq M$ を閉集合といい、閉集合全ての集合を $\mathcal{CL}_{\mathbf{P}}$ により表す。また $A(\mathbf{M})$ を $\mathbf{M}$ の生成元の集合とすると、各 $a \in A(\mathbf{M})$ について $C(\{a\})$ の形の閉集合を原子的閉集合といい、原子的閉集合全ての集合を $ATOM_{\mathbf{P}}$ により表す。

相構造 $\mathbf{P} = (\mathbf{M}, C)$ が与えられたとき、各論理結合子は $\mathcal{CL}_{\mathbf{P}}$ 上の関数として次のように解釈することができる：

$$\begin{aligned} \mathbf{1} &= C(\{1\}) & X \otimes Y &= C(X \bullet Y) \\ X \oplus Y &= C(X \cup Y) & X \multimap Y &= \{y \mid \forall x \in X, x \cdot y \in Y\}, \end{aligned}$$

命題変数の集合を Var により表す。関数 $f : Var \longrightarrow \mathcal{CL}_{\mathbf{P}}$ を $\mathbf{P}$ 上の付値と呼び、特に $f : Var \longrightarrow ATOM_{\mathbf{P}}$ を原子的付値と呼ぶ。付値 f が与えられれば、上の操作により任意の論理式 A に対して閉集合 $f(A)$ を割り当てることができる。 A が $(\mathbf{P}, f)$ において真であるのは $1 \in f(A)$ が成り立つときである。すると $A \multimap B$ が真であることと $f(A) \subseteq f(B)$ であることは一致する。 A が $\mathbf{P}$ において妥当 (原子的に妥当) であるのは、 A が $\mathbf{P}$ 上のどんな付値 f (どんな原子的付値 f) においても真となるときである。 $\mathbf{P}$ 上で $\widehat{\mathcal{R}}$ の元が全て妥当 (原子的に妥当) であるとき、 $\mathbf{P}$ を $\mathcal{R}$ 相構造 (原子的 $\mathcal{R}$ 相構造) と呼ぶ。すると次の形の完全性定理が成り立つ：任意の論理式 A について、FL+ $\mathcal{R}$ で A が証明可能なことと、全ての $\mathcal{R}$ 相構造において A が妥当であることは一致する。

以上の準備のもとで、繁殖性は次のように意味論的に表現することができる (元のアイデアは Girard[5] による)。

*² 話を単純にするため、以下では自由モノイドに基づく相構造のみを考える。

定義 2 $\mathcal{R}$ が相意味論的繁殖性 (phase-semantic propagation property) を満たすのは、全ての原子的 $\mathcal{R}$ 相構造が $\mathcal{R}$ 相構造であるときである。

すると、統語論的繁殖性が相意味論的繁殖性を含意することがわかる。実際、どんな閉集合 X も原子閉集合から $\otimes$ と $\oplus$ を用いて次のように表すことができる：

$$X = \bigoplus_{x \in X} \bigotimes_{x=a_1 \cdots a_n} C(\{a_i\}) \quad (a_i \in A(\mathbf{M}))$$

よって $\mathcal{R}$ が統語論的繁殖性を満たせば (すなわち $\otimes$ と $\oplus$ について “繁殖” すれば) $\mathcal{R}$ の原子的妥当性は妥当性を含意するのである。

最後に、相意味論的繁殖性がカット除去定理を含意することを述べておく。鍵となるのは、岡田 [8, 9] による相意味論を用いたカット除去定理の証明法である。岡田の方法に従えば、任意の $\mathcal{R}$ について、次の性質を満たす相構造 $\mathbf{P}_{\mathcal{R}}$ を構成することができる：

1. $\mathbf{P}_{\mathcal{R}}$ は原子的 $\mathcal{R}$ 相構造である。
2. $\mathbf{P}_{\mathcal{R}}$ で妥当な論理式は、 $\mathbf{FL}+\mathcal{R}$ でカット規則を用いずに証明可能である。

さて、 $\mathcal{R}$ が相意味論的繁殖性を満たすならば、1. により $\mathbf{P}_{\mathcal{R}}$ は $\mathcal{R}$ 相構造である。ゆえに健全性により、もしも論理式 A が $\mathbf{FL}+\mathcal{R}$ で証明可能ならば、 A は $\mathbf{P}_{\mathcal{R}}$ において妥当である。よって 2. により A は $\mathbf{FL}+\mathcal{R}$ でカット規則を用いずに証明可能である。

以上をまとめると、次の定理が得られる。

定理 3 $\mathcal{R}$ を加法的構造規則の集合とすると、次の 3 つは同値である。

1. $\mathbf{FL}+\mathcal{R}$ についてカット除去定理が成り立つ。
2. $\mathcal{R}$ が統語論的繁殖性を満たす。
3. $\mathcal{R}$ が相意味論的繁殖性を満たす。

この定理の応用として、構造規則の完備化を与えることができる。

定理 4 どんな加法的構造規則の集合 $\mathcal{R}$ についても $\mathbf{FL}$ 上でそれと同値な集合 $\mathcal{R}^*$ が存在し、 $\mathbf{FL}+\mathcal{R}^*$ についてはカット除去定理が成り立つ。

本稿では [12] に従って加法的構造規則のみを扱ってきたが、より一般的な構造規則のクラスについても (強い形の) カット除去の必要十分条件を与えることが可能である [3]。

3 命題論理結合子とカット除去定理

次にFLを離れ、様々な命題論理結合子を持つシーケント計算について検討する。例えば、**init**、**cut** 規則に加え、(不自然な)論理結合子 $A \sqcap B$ ならびに次の推論規則を持つシーケント計算 $L_{\sqcap}$ を考える。

$$\frac{\Sigma \Rightarrow A \quad \Sigma \Rightarrow B}{\Sigma \Rightarrow A \sqcap B} (\sqcap, r) \quad \frac{\Gamma, A, B, \Delta \Rightarrow C}{\Gamma, A \sqcap B, \Delta \Rightarrow C} (\sqcap, l)$$

構造規則を持たないため、 $L_{\sqcap}$ は (モジュラー) カット除去を満たさない (「モジュラー」については後述)。

$$\frac{\frac{\frac{\vdots}{\Sigma \Rightarrow A} \quad \frac{\vdots}{\Sigma \Rightarrow B}}{\Sigma \Rightarrow A \sqcap B} \quad \frac{\frac{\vdots}{\Gamma, A, B, \Delta \Rightarrow C}}{\Gamma, A \sqcap B, \Delta \Rightarrow C}}{\Gamma, \Sigma, \Delta \Rightarrow C} (Cut) \not\Rightarrow \frac{\frac{\vdots}{\Sigma \Rightarrow A} \quad \frac{\frac{\frac{\vdots}{\Sigma \Rightarrow B} \quad \frac{\vdots}{\Gamma, A, B, \Delta \Rightarrow C}}{\Gamma, A, \Sigma, \Delta \Rightarrow C}}{\Gamma, \Sigma, \Sigma, \Delta \Rightarrow C}}{\Gamma, \Sigma, \Delta \Rightarrow C} (???)$$

また原子的公理特性 (atomic axiom property) も満たさない。ここで原子的公理特性とは、どんな公理 $A \Rightarrow A$ も原子論理式に関する公理 $\alpha_1 \Rightarrow \alpha_1, \dots, \alpha_n \Rightarrow \alpha_n$ からカットを用いずに証明できるという性質である。

$$\frac{\frac{\frac{\alpha \Rightarrow \alpha}{\alpha, \beta \Rightarrow \alpha} (???) \quad \frac{\beta \Rightarrow \beta}{\alpha, \beta \Rightarrow \beta} (???)}{\alpha, \beta \Rightarrow \alpha \sqcap \beta}}{\alpha \sqcap \beta \Rightarrow \alpha \sqcap \beta}$$

一方で、

- $L_{\sqcap}$ に **seq-c** を加えれば、(モジュラー) カット除去を満たすが、原子的公理特性は依然として成り立たない。
- $L_{\sqcap}$ に **w** を加えれば、原子的公理特性は成り立つが、(モジュラー) カット除去は依然として成り立たない。

直感的に言って、(モジュラー) カット除去と原子的公理特性は正反対の性質である。なぜ **seq-c** を加えると一方が成り立ち、**w** を加えると他方が成り立つのだろうか？この状況を一般的かつ意味論的に捉えることはできるのだろうか？

まず着目すべきなのは、 $A \sqcap B$ はシークエントの左辺においては $A \otimes B$ のように振舞い、シークエントの右辺においては $A \& B$ (加法的連言) のように振舞うという点である。ゆえに相構造 $\mathbf{P} = (\mathbf{M}, C)$ が与えられたとき、 $\sqcap$ に二つの解釈 (左解釈・右解釈) を与えるのが自然に思われる。すなわち、任意の $X, Y \in \mathcal{CL}_{\mathbf{P}}$ について

$$\begin{aligned} X \sqcap_{\mathbf{P}}^l Y &= X \otimes Y = C(X \bullet Y) \\ X \sqcap_{\mathbf{P}}^r Y &= X \& Y = X \cap Y \end{aligned}$$

とする。すると、

- もしも $\mathbf{P}$ が seq-c 相構造ならば (すなわちどんな $Z \in \mathcal{CL}_{\mathbf{P}}$ についても $Z \subseteq Z \otimes Z$ が成り立つならば)

$$X \sqcap_{\mathbf{P}}^r Y = X \& Y \subseteq (X \& Y) \otimes (X \& Y) \subseteq X \otimes Y = X \sqcap_{\mathbf{P}}^l Y$$

- もしも $\mathbf{P}$ が w 相構造ならば (すなわちどんな $Z \in \mathcal{CL}_{\mathbf{P}}$ についても $Z \subseteq \mathbf{1}$ が成り立つならば)

$$X \sqcap_{\mathbf{P}}^l Y = X \otimes Y \subseteq (X \otimes \mathbf{1}) \& (\mathbf{1} \otimes Y) = X \& Y = X \sqcap_{\mathbf{P}}^r Y$$

つまり、少なくとも論理結合子 $\sqcap$ について言えば、カット除去と「右解釈は左解釈に含まれる」という性質が対応していそうであり、原子的公理特性と「左解釈は右解釈に含まれる」という性質が対応していそうである。このことは一般に成り立つのだろうか？ 答えは「ほぼ」イエスである。

なぜ「ほぼ」かといえは、病理的な形でカット除去定理を満たすシークエント計算が存在するからである。 $\mathbf{L}_{\sqcap}$ はその典型例である。上で示したとおり、 $\mathbf{L}_{\sqcap}$ は $(\sqcap, r)$ と $(\sqcap, l)$ の間のカット除去がうまくいかないが、それにもかかわらずカット除去定理が成り立ってしまう。なぜならば **init** から始めて **cut**, $(\sqcap, r)$ に従って推論を進める限り、シークエントの左辺はちょうど1つの論理式しか含まず、 $(\sqcap, l)$ は実際には決して使われることがないからである。このような病理的なケースを除外するためには、より強い形のカット除去を考える必要がある。

$\mathbf{L}$ を **init**, **cut**, 何らかの (加法的) 構造規則の集合、および (ある種の自然な制約を満たす) 命題論理規則の集合により定義されるシークエント計算とする (これを単純シークエント計算と呼ぶ)。このとき $\mathbf{L}$ がモジュラーカット除去を満たすのは次の場合である：原子論理式からなるシークエントの集合 S が与えられ、 S は **cut** 規則について閉じているものとする (S は非論理的公理の集合とみなすことができる)。もしもシークエント $\Gamma \Rightarrow C$ が S から導出可能ならば、それは S からカット規則を用いずに導出可能である。

モジュラーカット除去は通常のカット除去定理を含意し（後者は $S = \emptyset$ の場合に相当する）、通常のカット除去定理よりも真に強い性質である。実際 $L_{\square}$ はモジュラーカット除去を満たさない。

いま、 L を（加法的）構造規則の集合 $\mathcal{R}$ を持つ単純シーケント計算とし、 P を相構造とする。このとき、 L の各論理結合子 $\star(A_1, \dots, A_m)$ に対して左解釈 $\star_P^l : \mathcal{CL}_P^m \rightarrow \mathcal{CL}_P$ 、右解釈 $\star_P^r : \mathcal{CL}_P^m \rightarrow \mathcal{CL}_P$ を（ $\star$ の左推論規則、右推論規則に従って）自然に与えることができる。

L の論理結合子 $\star$ が整合的（coherent）であるのは、任意の $\mathcal{R}$ 相構造 P 、任意の $\vec{X} \equiv X_1, \dots, X_m \in \mathcal{CL}_P$ について、

$$\star_P^r(\vec{X}) \subseteq \star_P^l(\vec{X})$$

が成り立つときである。また、この逆、すなわち

$$\star_P^l(\vec{X}) \subseteq \star_P^r(\vec{X})$$

が成り立つとき、 $\star$ は厳密（strict）であるという。このとき、次の二つが同値になる：

- L はモジュラーカット除去を満たす。
- $\mathcal{R}$ は相意味論的繁殖性を満たし、 L の全ての論理結合子は整合的である。

また、 $\mathcal{R}$ が相意味論的繁殖性を満たすときには、次の二つが同値になる：

- L は原子的公理特性を満たす。
- L の全ての論理結合子は厳密である。

整合性と厳密性は正反対の性質であることに注意されたい。よって構造規則が繁殖性を満たすようなシーケント計算に限って言えば、モジュラーカット除去と原子的公理特性は意味論的に正反対の性質であるということがわかる。

以上、（モジュラー）カット除去の意味論的特徴づけについて、アイデアのみを駆け足で紹介した。詳細については [3] を参照されたい。なお、ここでは $\Gamma \Rightarrow C$ の形のシーケントのみを取り扱ってきたが、より一般に $\Gamma \Rightarrow \Delta$ の形のシーケントを許し、さらに一般化された一階量化結合子 $\star[\vec{x}](A_1, \dots, A_m)$ （ここで $\vec{x}$ は束縛変数）を許すシーケント計算についての研究が現在進行中である。

参考文献

- [1] A. Avron and I. Lev. Canonical Propositional Gentzen-Type Systems. *Proceedings of IJCAR'01*, vol. 2083 LNCS, pp. 529–543, 2001.
- [2] A. Ciabattoni. Automated Generation of Analytic Calculi for Logics with Linearity. *Proceedings of CSL'04*, vol. 3210 LNCS, pp. 503–517, 2004.
- [3] A. Ciabattoni and K. Terui. Towards a semantic characterization of cut-elimination. *Studia Logica*, vol. 82, pp. 95–119, 2006.
- [4] G. Gentzen. Untersuchungen über das Logische Schliessen. *Math. Zeitschrift*, vol. 39, pp. 176–210, 405–431, 1935.
- [5] J.-Y. Girard. On the meaning of logical rules I: syntax vs. semantics. In U. Berger and H. Schwichtenberg, editors, *Computational Logic*, pp. 215–272. Heidelberg Springer-Verlag, 1999.
- [6] D. Miller and E. Pimental. Using Linear Logic to reason about sequent systems. *Proceedings of Tableaux'02*, vol. 2381 LNCS, pp. 2–23, 2002.
- [7] M. Ohnishi and K. Matsumoto. A system for strict implication. *Annals of the Japan Association for Philosophy of Science*, vol. 2, pp. 183 – 188, 1964.
- [8] M. Okada. Phase semantics for higher order completeness, cut-elimination and normalization proofs (extended abstract). In J.-Y. Girard, M. Okada, and A. Scedrov, editors, *ENTCS (Electronic Notes in Theoretical Computer Science) vol.3: A Special Issue on the Linear Logic 96, Tokyo Meeting*. Elsevier-ENTCS, 1996.
- [9] M. Okada. A uniform semantic proof for cut-elimination and completeness of various first and higher order logics. *Theoretical Computer Science*, vol. 281, pp. 471– 498, 2002.
- [10] H. Ono. Semantics for substructural logics. In K. Došen and P. Schröder-Heister, editors, *Substructural logics*, pp. 259–291. Oxford University Press, 1994.
- [11] G. Restall. *An Introduction to Substructural Logics*. Routledge, London, 1999.
- [12] K. Terui. Which Structural Rules Admit Cut Elimination? — An Algebraic Criterion. Submitted, 2005. Available at research.nii.ac.jp/~terui/cut.pdf.
- [13] J. van Benthem. *Language in Action: Categories, Lambdas and Dynamic Logic*. (Studies in Logic 130). North-Holland, Amsterdam, 1991.