

非古典論理におけるカット除去定理 の意味論的考察

照井 一成

国立情報学研究所・総合研究大学院大学

カット除去定理

- **カット規則**：シーケント計算における三段論法の表現、補題の使用

$$\frac{A \Rightarrow B \quad B \Rightarrow C}{A \Rightarrow C}$$

- LK に対する**カット除去定理 (Gentzen 34)**： LK で証明可能な論理式はカット規則を用いずに証明可能である。
- 証明論の**基本定理**。多くの帰結を持つ。計算機科学における「証明＝プログラム」パラダイムのもとでは、**カット除去手続**自体が重要な研究対象。
- **カットを使った証明**：自然、（一般に）短い
- **カットを使わない証明**：分析が容易
- **カット除去定理によって、自然な証明体系を分析し、証明に含まれる暗黙的な情報を引き出すことが可能になる。**

カット除去定理の意味論的証明

- A がカットを用いずに証明できないと仮定し、 A のカウンターモデル $\mathcal{M}$ を構成する。

$$\vdash_{cut-free} A \implies \mathcal{M} \not\models A \xRightarrow{\text{健全性}} \vdash A$$

- 50年代：Beth, Hintikka, Kanger, Schütte, ...
- (Schütte 60)：高階論理シークエント計算についてのカット除去定理を semi-valuation（3値意味論）の2値化問題に帰着させた。

$$\vdash_{cut-free} A \implies \mathcal{M}_3 \not\models A \xRightarrow{2\text{値化}} \mathcal{M}_2 \not\models A \xRightarrow{\text{健全性}} \vdash A$$

- 意味論的カット除去：（しばしば）簡潔、高階の場合に威力を発揮、
カット除去定理への意味論的洞察

非古典論理

- 「カット除去はなんでこんなにうまくいくのか？」
- これに答えるため、カット除去定理が成り立たないような変なシーケント計算も考え、うまく行く場合と行かない場合でどんな違いがあるのかを検討する。
- 非古典論理: 中間論理、様相論理、部分構造論理,...
- 部分構造論理: さまざまな構造規則を持つ／持たない論理
- さまざまな論理結合子についても考える

われわれの目標

- さまざまな構造規則や論理結合子を持つシーケント計算のクラスを考え、カット除去定理が成り立つための**必要十分条件**を与える。
 - **意味論的**: 相意味論 (Girard 86, Abrusci 90) に基づいて与えられる。**カット除去に関するカウンターモデル**について考えることが可能。
 - **モジュラー**: 各構造規則ごと、各論理結合子ごとに条件を挙げることが可能。カット除去定理の**モジュラーな証明**をサポートする。
- カット除去定理と**原子公理特性 (atomic axiom property)** の関係を意味論的に考察する。
 - カット除去: 複雑なカットは単純なカットで置き換えられる (β -reduction)
 - 原子公理特性: 複雑な始式は単純な始式で置き換えられる (η -expansion)

要旨

- **Part I: Full Lambek Calculus (FL, (Ono 94))** にさまざまな構造規則を加えてみる。
- 構造規則の集合 $\mathcal{R}$ に対して、二つの同値な条件を導入する：統語論的繁殖性と相意味論的繁殖性
- 次のことを示す。

$\text{FL} + \mathcal{R}$ でカット除去定理が成り立つ $\iff \mathcal{R}$ は統語論的繁殖性を満たす
 $\iff \mathcal{R}$ は意味論的繁殖性を満たす

- 副産物: 構造規則の補完

どんな構造規則の集合も、それと同値でしかもカット除去定理が成り立つような集合へと補完することができる。

要旨

- **Part II:** さまざまな構造規則や論理結合子を持つ単純シーケント計算のクラスを考える。
- 論理結合子に対する意味論的条件を導入する：整合性
- 任意の単純シーケント計算 $\mathbf{L}$ について次のことが成り立つ。

モジュラーカット除去 $\iff$ 繁殖性+整合性

- また、原子公理特性の必要十分条件を与える： $\mathbf{L}$ の構造規則が繁殖性を満たすとき

原子公理特性 $\iff$ 整合性の逆

- カット除去と原子公理特性は意味論的に言っても逆の性質であることが確認できる。

背景

- ジラール・テスト (Girard 99):
 - 構造規則の自然さの基準
 - カット除去との関連が予想されたが証明はされなかった。
 - 繁殖性はジラール・テストに由来する。
- 相意味論を用いたカット除去定理の証明 (Okada 96, 99, etc.):
 - 相意味論：ほとんどシンタックス (“abstract nonsense” by Girard)
 - さまざまなシークエント計算のカット除去定理について統一的な意味論的証明を与えることができる。
 - ジラール・テスト（改）は岡田の論法を用いるための十分条件になっている。

Full Lambek Calculus FL

- 論理式: $A \oplus B, A \otimes B, A \multimap B, \mathbf{1}$ ($A \& B, B \multimap A, \top, \mathbf{0}$ は省略)
- シークエント: $\Gamma \Rightarrow C$ (Γ, Δ : 論理式の列)
- 推論規則:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Delta_1, A, \Delta_2 \Rightarrow C}{\Delta_1, \Gamma, \Delta_2 \Rightarrow C} \text{ cut}$$

$$\frac{}{A \Rightarrow A} \text{ init}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Delta \Rightarrow B}{\Gamma, \Delta \Rightarrow A \otimes B} \otimes r$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Delta_1, B, \Delta_2 \Rightarrow C}{\Delta_1, \Gamma, A \multimap B, \Delta_2 \Rightarrow C} \multimap l$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \multimap B} \multimap r$$

$$\frac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \Rightarrow C}{\Gamma_1, A \otimes B, \Gamma_2 \Rightarrow C} \otimes$$

$$\frac{\Gamma_1, A, \Gamma_2 \Rightarrow C \quad \Gamma_1, B, \Gamma_2 \Rightarrow C}{\Gamma_1, A \oplus B, \Gamma_2 \Rightarrow C} \oplus l$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow A \oplus B} \oplus r_1$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \oplus B} \oplus r_2$$

記法とFLの基本的性質

- カット除去定理: **FL**で証明可能なシーケントはカットを用いずに証明可能。
- $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ を 論理式の集合とするとき、 $\mathcal{A} \vdash_{\mathbf{FL}} \mathcal{B} \iff$ 全ての $A \in \mathcal{A}$ について $\Rightarrow A$ を公理として加えたとき全ての $B \in \mathcal{B}$ が証明可能。

$$\begin{aligned} \bigotimes \Gamma &\equiv A_1 \otimes \cdots \otimes A_n && \text{if } \Gamma \equiv A_1, \dots, A_n \quad (n \geq 1) \\ &\equiv \mathbf{1} && \text{if } \Gamma \equiv \emptyset \end{aligned}$$

- $\bigotimes \Sigma, \Gamma \Rightarrow C \iff \Sigma, \Gamma \Rightarrow C$
- $\Gamma \Rightarrow A \multimap B \iff A, \Gamma \Rightarrow B$
- $\bigoplus \Phi, \Gamma \Rightarrow B \iff (\forall A \in \Phi) A, \Gamma \Rightarrow B$
- $B \otimes (\bigoplus \Phi) \otimes C \multimap \bigoplus_{A \in \Phi} (B \otimes A \otimes C)$

構造規則の例

● Gentzen の規則:

Exchange:

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \Rightarrow C}{\Gamma, B, A, \Delta \Rightarrow C} \mathbf{e}$$

$$B \otimes A \multimap A \otimes B$$

Weakening:

$$\frac{\Gamma, \Delta \Rightarrow C}{\Gamma, A, \Delta \Rightarrow C} \mathbf{w}$$

$$A \multimap \mathbf{1}$$

Contraction:

$$\frac{\Gamma, A, A, \Delta \Rightarrow C}{\Gamma, A, \Delta \Rightarrow C} \mathbf{c}$$

$$A \multimap A \otimes A$$

● その他 :

Seq-Contraction

$$\frac{\Gamma, \Phi, \Phi, \Delta \Rightarrow C}{\Gamma, \Phi, \Delta \Rightarrow C} \mathbf{seq-c}$$

$$\otimes \Phi \multimap (\otimes \Phi) \otimes (\otimes \Phi)$$

Expansion

$$\frac{\Gamma, A, \Delta \Rightarrow C}{\Gamma, A, A, \Delta \Rightarrow C} \mathbf{exp}$$

$$A \otimes A \multimap A$$

Mingle

$$\frac{\Gamma, \Phi_1, \Delta \Rightarrow C \quad \Gamma, \Phi_2, \Delta \Rightarrow C}{\Gamma, \Phi_1, \Phi_2, \Delta \Rightarrow C} \mathbf{min}$$

$$(\otimes \Phi_1) \otimes (\otimes \Phi_2) \multimap (\otimes \Phi_1) \oplus (\otimes \Phi_2)$$

構造規則の一般形

● 加法的構造規則:

$$\frac{\Gamma, \Phi_1, \Delta \Rightarrow C \quad \dots \quad \Gamma, \Phi_n, \Delta \Rightarrow C}{\Gamma, \Phi_0, \Delta \Rightarrow C} \mathbf{r} \quad (n \geq 1)$$

ただし、(*) $\{\Phi_1, \dots, \Phi_n\} \subseteq \{\Phi_0\}$

● 公理化:

$$\hat{\mathbf{r}} \equiv \bigotimes \Phi_0 \multimap (\bigotimes \Phi_1) \oplus \dots \oplus (\bigotimes \Phi_n)$$

● 条件 (*) より

1. どんな加法的構造規則も直観主義論理において導出可能である。
2. **FL**+加法的構造規則において、**カット除去定理** $\implies$ 部分論理式性

構造規則の事例集合

- $\hat{r}$ は公理スキーマであり、実際には論理式の無限集合 $\text{inst}(r)$ (事例集合) を表す。例えば

$$\text{inst}(c) = \{A \multimap A \otimes A \mid A \text{ は論理式} \}$$

- 論理式の種類を制限することにより、原子事例集合 $\text{atom}(c)$, $\otimes$ 事例集合 $\text{tensor}(c)$, $\oplus$ 事例集合 $\text{plus}(c)$ が定義できる：

$$\text{atom}(c) = \{ \alpha \multimap \alpha \otimes \alpha \mid \alpha \text{ は命題変数} \}$$

$$\text{tensor}(c) = \{ \alpha \otimes \beta \multimap (\alpha \otimes \beta) \otimes (\alpha \otimes \beta) \mid \alpha, \beta \text{ は命題変数} \}$$

$$\text{plus}(c) = \{ \alpha \otimes \beta \multimap (\alpha \oplus \beta) \otimes (\alpha \oplus \beta) \mid \alpha, \beta \text{ は命題変数} \}$$

- その他の加法的構造規則についても同様。

構造規則とカット除去

- **FL + c** についてはカット除去が成り立たない：

$$\frac{\frac{\overline{A \Rightarrow A} \quad \overline{B \Rightarrow B}}{A, B \Rightarrow A \otimes B} \quad \frac{\frac{\overline{A \otimes B \Rightarrow A \otimes B} \quad \overline{A \otimes B \Rightarrow A \otimes B}}{A \otimes B, A \otimes B \Rightarrow (A \otimes B) \otimes (A \otimes B)} \quad \text{c}}{A \otimes B \Rightarrow (A \otimes B) \otimes (A \otimes B)} \quad \text{cut}$$

⇓

$$\frac{\frac{\overline{A \Rightarrow A} \quad \overline{B \Rightarrow B}}{A, B \Rightarrow A \otimes B} \quad \frac{\overline{A \Rightarrow A} \quad \overline{B \Rightarrow B}}{A, B \Rightarrow A \otimes B}}{A, B, A, B \Rightarrow (A \otimes B) \otimes (A \otimes B)} \quad \text{???}$$

構造規則とカット除去

- 一方、**FL** + **seq-c** についてはカット除去が成り立つ：

$$\frac{\Gamma, \Phi, \Phi, \Delta \Rightarrow C}{\Gamma, \Phi, \Delta \Rightarrow C} \text{ seq-c}$$

$$\frac{\frac{\overline{A \Rightarrow A} \quad \overline{B \Rightarrow B}}{A, B \Rightarrow A \otimes B} \quad \frac{\overline{A \Rightarrow A} \quad \overline{B \Rightarrow B}}{A, B \Rightarrow A \otimes B}}{A, B, A, B \Rightarrow (A \otimes B) \otimes (A \otimes B)} \text{ seq-c}$$

$$\frac{}{A, B \Rightarrow (A \otimes B) \otimes (A \otimes B)}$$

- c** と **seq-c** は **FL** 上で同値。両者の違いを **カット除去** という言葉を用いずに表すことは可能か？

構造規則とカット除去

● $\text{atom}(\mathbf{c}) \not\vdash_{\mathbf{FL}} \text{tensor}(\mathbf{c})$:

$$\alpha \multimap \alpha \otimes \alpha, \beta \multimap \beta \otimes \beta \not\vdash_{\mathbf{FL}} \alpha \otimes \beta \multimap (\alpha \otimes \beta) \otimes (\alpha \otimes \beta)$$

● $\text{atom}(\text{seq-}\mathbf{c}) \vdash_{\mathbf{FL}} \text{tensor}(\text{seq-}\mathbf{c})$:

$$\alpha \otimes \beta \multimap (\alpha \otimes \beta) \otimes (\alpha \otimes \beta) \vdash_{\mathbf{FL}} \alpha \otimes \beta \multimap (\alpha \otimes \beta) \otimes (\alpha \otimes \beta)$$

(自明。長さ n の **seq-c** の $\otimes$ 事例は、長さ $2n$ の **seq-c** の原子事例と等しいから)

● **seq-c** は **atom** から $\otimes$ へと繁殖するが、**c** はそうではない。

構造規則とカット除去

- **FL + exp** についてはカット除去が成り立たない：

$$\frac{\frac{\overline{B \Rightarrow B}}{B \Rightarrow A \oplus B} \quad \frac{\frac{\overline{A \Rightarrow A}}{A \Rightarrow A \oplus B} \quad \frac{\overline{A \oplus B \Rightarrow A \oplus B}}{A \oplus B, A \oplus B \Rightarrow A \oplus B}}{A, A \oplus B \Rightarrow A \oplus B} \text{ cut} \quad \text{exp cut}}{A, B \Rightarrow A \oplus B} \text{ cut}$$

⇓

$$\frac{\frac{\overline{A \Rightarrow A}}{A \Rightarrow A \oplus B} \quad \frac{\overline{B \Rightarrow B}}{B \Rightarrow A \oplus B}}{A, B \Rightarrow A \oplus B} ???$$

構造規則とカット除去

- 一方、**FL** + **min** についてはカット除去が成り立つ：

$$\frac{\Gamma, \Phi_1, \Delta \Rightarrow C \quad \Gamma, \Phi_2, \Delta \Rightarrow C}{\Gamma, \Phi_1, \Phi_2, \Delta \Rightarrow C} \text{min}$$

$$\frac{\frac{\overline{A \Rightarrow A}}{A \Rightarrow A \oplus B} \quad \frac{\overline{B \Rightarrow B}}{B \Rightarrow A \oplus B}}{A, B \Rightarrow A \oplus B} \text{min}$$

- **exp** と **min** は **FL** 上で同値。両者の違いを **カット除去** という言葉を用いずに表すことは可能か？

構造規則とカット除去

● **atom(min) $\vdash_{\mathbf{FL}}$ plus(min)**

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 \otimes \beta_1 \multimap \alpha_1 \oplus \beta_1 \\ \alpha_1 \otimes \beta_2 \multimap \alpha_1 \oplus \beta_2 \\ \alpha_2 \otimes \beta_1 \multimap \alpha_2 \oplus \beta_1 \\ \alpha_2 \otimes \beta_2 \multimap \alpha_2 \oplus \beta_2 \end{array} \right\} \vdash_{\mathbf{FL}} (\alpha_1 \oplus \alpha_2) \otimes (\beta_1 \oplus \beta_2) \multimap (\alpha_1 \oplus \alpha_2) \oplus (\beta_1 \oplus \beta_2)$$

● **atom(exp) $\not\vdash_{\mathbf{FL}}$ plus(exp)**

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 \otimes \alpha_1 \multimap \alpha_1 \\ \alpha_2 \otimes \alpha_2 \multimap \alpha_2 \end{array} \right\} \not\vdash_{\mathbf{FL}} (\alpha_1 \oplus \alpha_2) \otimes (\alpha_1 \oplus \alpha_2) \multimap (\alpha_1 \oplus \alpha_2)$$

● **min** は atom から $\oplus$ へと繁殖するが、**exp** はそうではない。

統語論的繁殖性

- $\mathcal{R}$: 加法的構造規則の集合
- $\text{atom}(\mathcal{R}) = \bigcup_{r \in \mathcal{R}} \text{atom}(R)$ 、 $\text{tensor}(r)$, $\text{plus}(r)$ も同様。
- 定義: $\mathcal{R}$ が統語論的繁殖性を満たす $\iff \text{atom}(\mathcal{R}) \vdash_{\mathbf{FL}} \text{tensor}(\mathcal{R})$ かつ $\text{atom}(\mathcal{R}) \vdash_{\mathbf{FL}} \text{plus}(\mathcal{R})$
- 命題: $\mathbf{FL} + \mathcal{R}$ についてカット除去定理が成り立つ $\implies \mathcal{R}$ は統語論的繁殖性を満たす。

カット除去 $\Rightarrow$ 統語論的繁殖性

- 証明のアイデア: $A_0 \in \mathbf{plus}(\mathcal{R})$ とすると、 A_0 は次の形

$$\bigotimes \vec{X}_0 \multimap (\bigotimes \vec{X}_1) \oplus \cdots \oplus (\bigotimes \vec{X}_n) [\gamma_i \oplus \delta_i / X_i]$$

- A_0 は負の部分論理式はすべて原子論理式であるような論理式 A_1 に書き換えることができる:

$$(A \otimes B \multimap C) \multimap A \multimap (B \multimap C)$$

$$(A \oplus B \multimap C) \multimap (A \multimap C) \& (B \multimap C)$$

- A_1 は $\mathbf{FL} + \mathcal{R}$ で証明可能。仮定より $\mathbf{FL} + \mathcal{R}$ についてカット除去定理が成り立つので、(正負別の) 部分論理式性により、 A_1 はシークエントの左辺には原子論理式しか現れないような証明を持つ。
- 特に構造規則 $\mathcal{R}$ は原子論理式についてしか用いられない。
- よって $\mathbf{atom}(\mathcal{R}) \vdash_{\mathbf{FL}} \mathbf{plus}(\mathcal{R})$ が成り立つ。

Intermezzo

● これまでに

カット除去定理 $\implies$ 統語論的繁殖性

を示した。次に相意味論を導入し

統語論的繁殖性 $\implies$ 相意味論的繁殖性

を示す。

相意味論

- 相構造 (phase structure) $\mathbf{P} = (\mathbf{M}, C)$ とは自由モノイド $\mathbf{M} = \langle M, \cdot, 1 \rangle$ と閉包演算子 $C : \wp(M) \longrightarrow \wp(M)$ の組のことである：任意の $X, Y \subseteq M$ について

$$X \subseteq C(X)$$

$$X \subseteq Y \implies C(X) \subseteq C(Y)$$

$$C(C(X)) \subseteq C(X)$$

$$C(X) \bullet C(Y) \subseteq C(X \bullet Y)$$

ここで $X \bullet Y = \{x \cdot y \mid x \in X, y \in Y\}$ 。

- $\mathcal{CL}_{\mathbf{P}}$: $X = C(X)$ となる集合 (閉集合) 全ての集合
- $\mathcal{ATOM}_{\mathbf{P}}$: $C(\{a\})$ の形の閉集合 (原子的閉集合) 全ての集合。ここで a は $\mathbf{M}$ の生成元。

相意味論

- 論理結合子は $\mathcal{CL}_P$ 上で次のように解釈される。

$$\begin{aligned} \mathbf{1} &= C(\{1\}) & X \otimes Y &= C(X \bullet Y) \\ X \oplus Y &= C(X \cup Y) & X \multimap Y &= \{y \mid \forall x \in X, x \cdot y \in Y\}, \end{aligned}$$

- 付値 $f : Var \longrightarrow \mathcal{CL}_P$. ここで Var は命題変数の集合.
- $(P, f) \models A \iff 1 \in f(A)$
- 特に、 $(P, f) \models A \multimap B \iff f(A) \subseteq f(B)$
- $P \models A \iff P$ 上の全ての付値 f について $(P, f) \models A$
- $P \models \mathcal{R} \iff$ 全ての $r \in \mathcal{R}$ について $P \models \text{inst}(r)$. このとき P は $\mathcal{R}$ 相構造であるという。
- 完全性定理: $\mathbf{FL} + \mathcal{R}$ で A が証明可能 $\iff$ 全ての $\mathcal{R}$ 相構造 P について $P \models A$

相意味論的繁殖性

- 原子的付値 $f : Var \longrightarrow \mathcal{ATOM}_{\mathbf{P}}$.
- 付値 f は任意の論理式に拡張できる。
- $\mathbf{P} \models_{\text{atom}} A \iff \mathbf{P}$ 上の全ての原子的付値 f について $(\mathbf{P}, f) \models A$
- 定義: $\mathcal{R}$ が相意味論的繁殖性を満たすのは、全ての相構造 $\mathbf{P}$ について、 $\mathbf{P} \models_{\text{atom}} \mathcal{R} \implies \mathbf{P} \models \mathcal{R}$
- 命題: $\mathcal{R}$ は統語論的繁殖性を満たす $\implies \mathcal{R}$ は相意味論的繁殖性を満たす
- 証明の鍵: どんな閉集合 X も次のように表すことができる：

$$X = \bigoplus_{x \in X} C(\{x\}) = \bigoplus_{x \in X} \bigotimes_{x = a_1 \cdots a_n} C(\{a_i\}) \quad (a_i \in \mathcal{A})$$

- よって $\mathcal{R}$ が統語論的繁殖性を満たせば（すなわち atom から $\otimes$ と $\oplus$ へと繁殖すれば）、 $\mathbf{P} \models_{\text{atom}} \mathcal{R} \implies \mathbf{P} \models \mathcal{R}$

Intermezzo

● これまでに

カット除去 $\implies$ 統語論的繁殖性
 $\implies$ 相意味論的繁殖性

を示した。Part I の最後に

相意味論的繁殖性 $\implies$ カット除去

を示す。そのために (Okada 96, 99, etc.) による相意味論を用いたカット除去法を援用する。

カット除去のための相構造

- 加法的構造規則の集合 $\mathcal{R}$ を固定する。
- $\mathbf{P}_{\mathcal{R}} = (\mathcal{F}^*, C)$ を次のように定義する。
- $\mathcal{F}^* : \mathbf{FL}$ の論理式により生成される自由モノイド。各要素は Γ, Δ の形。空列 $\emptyset$ が単位元。
- $C : \wp(\mathcal{F}^*) \longrightarrow \wp(\mathcal{F}^*)$ の定義

$$[\Gamma _ \Delta \Rightarrow C] = \{ \Sigma \mid \Gamma, \Sigma, \Delta \Rightarrow C \text{ は } \mathbf{FL} + \mathcal{R} \text{ で} \\ \text{カットを用いずに証明可能} \},$$

$$Y \in \mathcal{CL}_{\mathbf{P}} \iff Y = \bigcap_{i \in \Lambda} [\Gamma_i _ \Delta_i \Rightarrow C_i]$$

$$Cl(X) = X \text{ を含む最小の閉集合}$$

- 特に、 $Y \in \mathcal{ATOM}_{\mathbf{P}} \iff Y = C(\{A\})$
- すると、 $C(\{A\}) \subseteq [\Gamma _ \Delta \Rightarrow D] \iff \Gamma, A, \Delta \Rightarrow D$ はカットを用いずに $\mathbf{FL} + \mathcal{R}$ で証明可能。

相意味論的繁殖性 $\implies$ カット除去

● 補題 1: $\mathbf{P}_{\mathcal{R}} \models_{\text{atom}} \mathcal{R}$

● 岡田の補題: $A_i \in X_i \subseteq \llbracket _ \Rightarrow A_i \rrbracket$ ($i = 1, 2$) とすると、

$$A_1 \otimes A_2 \in X_1 \otimes X_2 \subseteq \llbracket _ \Rightarrow A_1 \otimes A_2 \rrbracket$$

$\oplus, \multimap$ 等についても同様。

● 系: $\mathbf{P}_{\mathcal{R}} \models A$ ならば、 A は $\mathbf{FL} + \mathcal{R}$ でカット規則を用いずに証明可能である。

● 命題: $\mathcal{R}$ は相意味論的繁殖性を満たす $\implies \mathbf{FL} + \mathcal{R}$ についてカット除去定理が成り立つ。

● 証明: $\mathcal{R}$ が相意味論的繁殖性を満たすならば、補題 1 により $\mathbf{P}_{\mathcal{R}}$ は $\mathcal{R}$ 相構造である。ゆえに

$$\mathbf{FL} + \mathcal{R} \vdash A \xRightarrow{\text{健全性}} \mathbf{P}_{\mathcal{R}} \models A \xRightarrow{\text{完全性}} \mathbf{FL} + \mathcal{R} \vdash_{\text{cut-free}} A$$

Part I の主要定理

- **定理:** $\mathcal{R}$ を加法的構造規則の集合とするとき、次の 3 つは同値である。
 1. $\mathbf{FL} + \mathcal{R}$ についてカット除去定理が成り立つ。
 2. $\mathcal{R}$ が統語論的繁殖性を満たす。
 3. $\mathcal{R}$ が相意味論的繁殖性を満たす。
- **系:** カット除去は和について閉じている。すなわち、もしもカット除去定理が $\mathbf{FL} + \mathcal{R}_1$ と $\mathbf{FL} + \mathcal{R}_2$ について成り立つならば、 $\mathbf{FL} + \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2$ についても成り立つ。

構造規則の補完

- 列化により $\otimes$ への繁殖性を得られる：

$$\frac{\Gamma, A, A, \Delta \Rightarrow C}{\Gamma, A, \Delta \Rightarrow C} \mathbf{c} \implies \frac{\Gamma, \Phi, \Phi, \Delta \Rightarrow C}{\Gamma, \Phi, \Delta \Rightarrow C} \mathbf{seq-c}$$

- 下式の線形化により $\oplus$ への繁殖性を得られる：

$$\frac{\Gamma, A, \Delta \Rightarrow C}{\Gamma, A, A, \Delta \Rightarrow C} \mathbf{exp} \implies \frac{\Gamma, A, \Delta \Rightarrow C \quad \Gamma, B, \Delta \Rightarrow C}{\Gamma, A, B, \Delta \Rightarrow C} \mathbf{min}_1$$

- これらの補完テクニックは一般に適用できる。
- 系: どんな加法的構造規則の集合 $\mathcal{R}$ も、次が成り立つような集合 $\mathcal{R}^*$ へと補完できる：
 - $\mathcal{R}$ と $\mathcal{R}^*$ は **FL** 上で同値。
 - **FL** + $\mathcal{R}^*$ についてカット除去定理が成り立つ。

Part I の注釈

● ここでは加法的構造規則

$$\frac{\Gamma, \Phi_1, \Delta \Rightarrow C \quad \dots \quad \Gamma, \Phi_n, \Delta \Rightarrow C}{\Gamma, \Phi_0, \Delta \Rightarrow C} R$$

を扱ったが、一般の構造規則

$$\frac{\Phi_1 \Rightarrow \Xi_1 \quad \dots \quad \Phi_n \Rightarrow \Xi_n}{\Phi_0 \Rightarrow \Xi_0} R$$

も別の仕方で取り扱い可能である (Ciabattoni-Terui 06)。

Part II: 変な結合子 $\sqcap$

- 論理結合子 $\sqcap$ (**tend**) を次の規則により定義する:

$$\frac{\Sigma \Rightarrow A \quad \Sigma \Rightarrow B}{\Sigma \Rightarrow A \sqcap B} (\sqcap, r) \qquad \frac{\Gamma, A, B, \Delta \Rightarrow C}{\Gamma, A \sqcap B, \Delta \Rightarrow C} (\sqcap, l)$$

- $L_{\sqcap}$: **init**, **cut**, $(\sqcap, r)$, $(\sqcap, l)$

- $L_{\sqcap}$ では、 $A \sqcap B$ についてのカットを A, B についてのカットに還元できず、 $A \sqcap B$ についての始式を A, B についての始式に還元できない。

$$\frac{\frac{\frac{\vdots}{\Sigma \Rightarrow A} \quad \frac{\vdots}{\Sigma \Rightarrow B}}{\Sigma \Rightarrow A \sqcap B} \quad \frac{\frac{\vdots}{\Gamma, A, B, \Delta \Rightarrow C}}{\Gamma, A \sqcap B, \Delta \Rightarrow C}}{\Gamma, \Sigma, \Delta \Rightarrow C} \text{ cut} \quad \not\Rightarrow \quad \frac{\frac{\vdots}{\Sigma \Rightarrow A} \quad \frac{\frac{\frac{\vdots}{\Sigma \Rightarrow B} \quad \frac{\vdots}{\Gamma, A, B, \Delta \Rightarrow C}}{\Gamma, A, \Sigma, \Delta \Rightarrow C}}{\Gamma, \Sigma, \Sigma, \Delta \Rightarrow C}}{\Gamma, \Sigma, \Delta \Rightarrow C} (???)$$

$$\frac{\frac{A \Rightarrow A}{A, B \Rightarrow A} (???) \quad \frac{B \Rightarrow B}{A, B \Rightarrow B} (???)}{A, B \Rightarrow A \sqcap B} \quad \frac{A, B \Rightarrow A \sqcap B}{A \sqcap B \Rightarrow A \sqcap B}$$

変な結合子 $\sqcap$

- $L_{\sqcap} + \mathbf{seq-c}$ は、カット除去はうまくいくが、始式の還元はうまくいかない。
- $L_{\sqcap} + \mathbf{w}$ は、始式の還元はうまくいくが、カット除去については問題が残る。
- 直感的に言って、カット除去と始式の還元は正反対の操作である。なぜ $\mathbf{seq-c}$ を加えると一方が成り立ち、 $\mathbf{w}$ を加えると他方が成り立つのだろうか？この状況を一般的かつ意味論的に捉えることはできるのだろうか？

変な結合子 $\sqcap$

- $\sqcap$ は左辺では $\otimes$ のようであり、右辺では $\&$ のようである。
- 相構造 $\mathbf{P}$ 上で、 $\sqcap$ に二つの解釈（左解釈・右解釈）を与えてみる。任意の $X, Y \in \mathcal{CL}_{\mathbf{P}}$ について

$$X \sqcap_{\mathbf{P}}^l Y = X \otimes Y = C(X \bullet Y)$$

$$X \sqcap_{\mathbf{P}}^r Y = X \& Y = X \cap Y$$

- もしも $\mathbf{P} \models \mathbf{seq-c}$ ならば（すなわちどんな $Z \in \mathcal{CL}_{\mathbf{P}}$ についても $Z \subseteq Z \otimes Z$ が成り立つならば）

$$X \sqcap_{\mathbf{P}}^r Y = X \& Y \subseteq (X \& Y) \otimes (X \& Y) \subseteq X \otimes Y = X \sqcap_{\mathbf{P}}^l Y$$

- もしも $\mathbf{P} \models \mathbf{w}$ ならば（すなわちどんな $Z \in \mathcal{CL}_{\mathbf{P}}$ についても $Z \subseteq \mathbf{1}$ が成り立つならば）

$$X \sqcap_{\mathbf{P}}^l Y = X \otimes Y \subseteq (X \otimes \mathbf{1}) \& (\mathbf{1} \otimes Y) = X \& Y = X \sqcap_{\mathbf{P}}^r Y$$

自然な予想

- $\mathbf{L}$ を “単純な” シークエント計算とし、その構造規則の集合 $\mathcal{R}$ は繁殖性を満たすものとする。このとき、
- 各論理結合子 $\star$ に対して相意味論上で二つの解釈 $\star_{\mathbf{P}}^r, \star_{\mathbf{P}}^l$ を割り当てることができる。
- そして次が成り立つ。

$\mathbf{L}$ について (強い) $\iff$ 全ての $\mathcal{R}$ 相構造において
カット除去定理が成り立つ $\star_{\mathbf{P}}^r(\vec{X}) \subseteq \star_{\mathbf{P}}^l(\vec{X})$

$\mathbf{L}$ について原子公理特性が成り立つ $\iff$ 全ての $\mathcal{R}$ 相構造において
 $\star_{\mathbf{P}}^l(\vec{X}) \subseteq \star_{\mathbf{P}}^r(\vec{X})$

単純シーケント計算

- n 項論理結合子 ($n \geq 0$): $\star_1, \star_2, \star_3, \dots$
- 論理式: 命題変数 α, β か $\star(A_1, \dots, A_m)$ の形。
- シーケント: $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 。ただし $|\Delta| \leq 1$ 。
- 単純シーケント計算 **L** は以下のタイプの推論規則から成る：
- **init, cut**, 加法的構造規則
- 各結合子 $\star$ について左論理規則および右論理規則：

$$\frac{\Upsilon_1 \Rightarrow \Psi_1 \quad \dots \quad \Upsilon_n \Rightarrow \Psi_n}{\Theta_l, \star(\vec{X}), \Theta_r \Rightarrow \Xi} (\star, l)_j \qquad \frac{\Upsilon_1 \Rightarrow \Psi_1 \quad \dots \quad \Upsilon_n \Rightarrow \Psi_n}{\Theta_l \Rightarrow \star(\vec{X})} (\star, r)_k$$

ただし $\{\Upsilon_1, \dots, \Upsilon_n\} \subseteq \{\Theta_l, \Theta_r, \vec{X}\}$, $\{\Psi_1, \dots, \Psi_n\} \subseteq \{\Xi, \vec{X}\}$,
 $\{\Theta_l, \Theta_r\} \cap \{\Xi\} = \emptyset$.

- 論理規則はその他にも条件を満たさなければならない。 $(\Theta_l, \Theta_r, \vec{X})$ は線形、列化について閉じている)

モジュラーカット除去

- シークエント計算の中には“悪い”理由でカット除去定理が成り立ってしまうものがある。
- これを避けるため、**強いカット除去**（**非論理的公理を伴う場合のカット除去**）について考える。
- L について**モジュラーカット除去**が成り立つ $\iff$ 原子論理式からなるシークエントの集合 S が与えられ、 S は **cut** 規則について閉じているものとする（ S =非論理的公理の集合）。もしもシークエント $\Gamma \Rightarrow C$ が S から導出可能ならば、それは S からカット規則を用いずに導出可能である。
- **モジュラーカット除去 $\implies$ 通常のカット除去**
- L が**原子公理特性**を持つ $\iff$ 複雑な論理式についての始式 $A \Rightarrow A$ は原子論理式についての始式からカットを用いずに導出可能。

論理結合子の解釈

- 推論規則の健全性： $\mathbf{P}$ を相構造とし、推論規則

$$\frac{\Gamma_1 \Rightarrow C_1, \dots, \Gamma_n \Rightarrow C_n}{\Gamma_0 \Rightarrow C_0}$$

に現れる各論理式 A に $\mathbf{P}$ 上の閉集合 $A^\bullet$ を割り当てる。もしも上式について $\Gamma_i^\bullet \subseteq C_i^\bullet$ が成り立つならば、下式についても $\Gamma_0^\bullet \subseteq C_0^\bullet$ が成り立つ。

- 結合子の解釈：非可述的定義。 $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{CL}_{\mathbf{P}}$ とするとき、

$\star_{\mathbf{P}}^r(\vec{X}) = \star$ 右推論規則を全て健全にするような最小の閉集合

$\star_{\mathbf{P}}^l(\vec{X}) = \star$ 左推論規則を全て健全にするような最大の閉集合

- 特に $X \sqcap Y$ については

$$\frac{\Sigma \Rightarrow X \quad \Sigma \Rightarrow Y}{\Sigma \Rightarrow X \sqcap Y} (\sqcap, r) \qquad \frac{\Gamma, X, Y, \Delta \Rightarrow Z}{\Gamma, X \sqcap Y, \Delta \Rightarrow Z} (\sqcap, l)$$

$$X \sqcap_{\mathbf{P}}^r Y = X \cap Y \qquad X \sqcap_{\mathbf{P}}^l Y = C(X \bullet Y)$$

全付値と健全性

- 全付値 $f : \text{Formulas} \rightarrow \mathcal{CL}_{\mathbf{P}}$ 、ただし任意の論理式 $\star(\vec{A}) \equiv \star(A_1, \dots, A_n)$ について

$$\star_{\mathbf{P}}^r(\overrightarrow{f(\vec{A})}) \subseteq f(\star(\vec{A})) \subseteq \star_{\mathbf{P}}^l(\overrightarrow{f(\vec{A})})$$

- 健全性定理: 以下の通りとする
 - $\mathbf{L}$: 構造規則としては $\mathcal{R}$ を持つ単純シークエント計算
 - $\mathbf{P}$: $\mathcal{R}$ 相構造
 - f : $\mathbf{P}$ 上の全付値
- このとき、 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ が $\mathbf{L}$ で証明可能ならば、 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ は $(\mathbf{P}, f)$ で真である。
- 注意: 全付値の存在は保証されていない！

整合性と厳密性

- ★ が（構造規則として $\mathcal{R}$ を持つ）単純シーケント計算 $\mathbf{L}$ において整合的である $\iff$

$$\star_{\mathbf{P}}^r(\vec{X}) \subseteq \star_{\mathbf{P}}^l(\vec{X})$$

が任意の $\mathcal{R}$ 相構造、任意の閉集合 $\vec{X}$ について成り立つ。

- ★ が $\mathbf{L}$ において厳密である $\iff$

$$\star_{\mathbf{P}}^l(\vec{X}) \subseteq \star_{\mathbf{P}}^r(\vec{X})$$

が任意の $\mathcal{R}$ 相構造、任意の閉集合 $\vec{X}$ について成り立つ。

- 整合性により全付値の存在が保証される。
- さらに厳密性が成り立てば、（原子論理式の値に対して）複雑な論理式の値の一意性が保証される。

モジュラーカット除去 $\Rightarrow$ 整合性

- **命題:** $\mathbf{L}$ についてモジュラーカット除去が成り立つ $\Rightarrow$ 全ての論理結合子は $\mathbf{L}$ において整合的である。
- **証明のアイデア:** $\mathbf{L}_\sqcap + \mathbf{seq-c}$ について考える。

$$\frac{\frac{\sqcap^r Y \Rightarrow X \quad X \sqcap^r Y \Rightarrow Y}{X \sqcap^r Y \Rightarrow X \sqcap Y} \quad \frac{X, Y \Rightarrow X \sqcap^l Y}{X \sqcap Y \Rightarrow X \sqcap^l Y}}{X \sqcap^r Y \Rightarrow X \sqcap^l Y} (Cut) \Rightarrow \frac{X \sqcap^r Y \Rightarrow X \quad \frac{X \sqcap^r Y \Rightarrow Y \quad X, Y \Rightarrow X \sqcap^l Y}{X \sqcap^r Y \Rightarrow X \sqcap^l Y}}{X \sqcap^r Y, X \sqcap^r Y \Rightarrow X \sqcap^l Y} X \sqcap^r Y \Rightarrow X \sqcap^l Y$$

- 右の証明を意味論的に読むと:

$$\frac{X \cap Y \subseteq X \quad \frac{X \cap Y \subseteq Y \quad X \bullet Y \subseteq C(X \bullet Y)}{X \bullet (X \cap Y) \subseteq C(X \bullet Y)}}{(X \cap Y) \bullet (X \cap Y) \subseteq C(X \bullet Y)} X \cap Y \subseteq C(X \bullet Y)$$

- よって $X \sqcap_{\mathbf{P}}^r Y \subseteq X \sqcap_{\mathbf{P}}^l Y$.

原子公理特性 $\Rightarrow$ 厳密性

- 命題: $\mathbf{L}$ について原子公理特性が成り立つ $\Rightarrow$ 全ての論理結合子は $\mathbf{L}$ において厳密である
- 証明のアイデア: $\mathbf{L}_{\sqcap} + \mathbf{w}$ について考える。

$$\frac{\frac{X \Rightarrow X}{X, Y \Rightarrow X} \quad \frac{Y \Rightarrow Y}{X, Y \Rightarrow Y}}{X, Y \Rightarrow X \sqcap Y} \quad \frac{}{X \sqcap Y \Rightarrow X \sqcap Y}$$

- 上の証明を意味論的に読むと:

$$\frac{\frac{X \subseteq X}{X \bullet Y \subseteq X} \quad \frac{Y \subseteq Y}{X \bullet Y \subseteq Y}}{X \bullet Y \subseteq X \cap Y} \quad \frac{}{C(X \bullet Y) \subseteq X \cap Y}$$

- よって $X \sqcap_{\mathbf{P}}^l Y \subseteq X \sqcap_{\mathbf{P}}^r Y$.

Intermezzo

● これまでに

モジュラーカット除去 $\implies$ 整合性

原子公理特性 $\implies$ 厳密性

を示した。最後に

整合性 + 繁殖性 $\implies$ モジュラーカット除去

厳密性 + 繁殖性 $\implies$ 原子公理特性

を示す。

カット除去のための相構造

- 単純シーケント計算 $\mathbf{L}$ と原子論理式からなる、**cut** 規則について閉じたシーケントの集合 $\mathcal{S}$ を固定する。
- $\mathbf{P_L} = (\mathcal{F}^*, C)$ を次のように定義する：
- $\mathcal{F}^*$: 論理式の集合により生成される自由モノイド
- $C : \wp(\mathcal{F}^*) \longrightarrow \wp(\mathcal{F}^*)$

$$\llbracket \Gamma _ \Delta \Rightarrow C \rrbracket = \{ \Sigma \mid \Gamma, \Sigma, \Delta \Rightarrow C \text{ } \mathbf{L} \text{ で } \mathcal{S} \text{ から} \\ \text{カットを用いずに証明可能} \},$$

$$Y \in \mathcal{CL_P} \iff Y = \bigcap_{i \in \Lambda} \llbracket \Gamma_i _ \Delta_i \Rightarrow C_i \rrbracket$$

岡田の補題の分裂

- **岡田の補題の原型:** $\star(\vec{A}) \equiv \star(A_1, \dots, A_n)$ とする。 X_i を $A_i \in X_i \subseteq \llbracket _ \Rightarrow A_i \rrbracket$ を満たす閉集合とする ($1 \leq i \leq n$)。このとき、

$$\star(\vec{A}) \in \star_{\mathbf{P}}(\vec{X}) \subseteq \llbracket _ \Rightarrow \star(\vec{A}) \rrbracket$$

- これが成り立てばカット除去が帰結するが、実際には成り立たない。
成り立つのは：

- **分裂した岡田の補題:** $\star(\vec{A}) \equiv \star(A_1, \dots, A_n)$ とする。 X_i を $A_i \in X_i \subseteq \llbracket _ \Rightarrow A_i \rrbracket$ を満たす閉集合とする ($1 \leq i \leq n$)。このとき、

$$\star(\vec{A}) \stackrel{\text{岡田}^l}{\in} \star_{\mathbf{P}}^l(\vec{X}) \quad \star_{\mathbf{P}}^r(\vec{X}) \stackrel{\text{岡田}^r}{\subseteq} \llbracket _ \Rightarrow \star(\vec{A}) \rrbracket$$

整合性があれば分裂した岡田の補題は一つになる

- 補題: もしも $\mathbf{L}$ の全ての論理結合子が整合的ならば、全付値 f_0 が存在し、任意の $\star(\vec{A})$ について:

$$\begin{array}{c} \star_{\mathbf{P}}^r(\overrightarrow{f_0(\vec{A})}) \\ \cap \\ \star(\vec{A}) \in f_0(\star(\vec{A})) \subseteq \llbracket \star(\vec{A}) \rrbracket \\ \cap \\ \star_{\mathbf{P}}^l(\overrightarrow{f_0(\vec{A})}) \end{array}$$

整合性があれば分裂した岡田の補題は一つになる

- **補題:** もしも $\mathbf{L}$ の全ての論理結合子が整合的ならば、全付値 f_0 が存在し、任意の $\star(\vec{A})$ について：

$$\begin{array}{c} \star_{\mathbf{P}}^r(\overrightarrow{f_0(\vec{A})}) \\ \cap \\ \star(\vec{A}) \in \quad f_0(\star(\vec{A})) \quad \subseteq \quad \llbracket \star(\vec{A}) \rrbracket \\ \stackrel{def}{=} \star_{\mathbf{P}}^l(\overrightarrow{f_0(\vec{A})}) \cap \llbracket \star(\vec{A}) \rrbracket \\ \cap \\ \star_{\mathbf{P}}^l(\overrightarrow{f_0(\vec{A})}) \end{array}$$

- **系:** $\mathbf{L}$ の全ての構造規則は繁殖的で、全ての論理結合子は整合的 $\implies$ $\mathbf{L}$ についてモジュラーカット除去が成り立つ。

厳密性があっても分裂した岡田の補題は一つになる

- **命題:** $\mathbf{L}$ の全ての構造規則は繁殖的で、全ての論理結合子は厳密的 $\implies$ $\mathbf{L}$ について原子公理特性が成り立つ。
- **証明:** カット除去のための相構造の定義を少し変える：

$$[\Gamma _ \Delta \Rightarrow C] = \{ \Sigma \mid \Gamma, \Sigma, \Delta \Rightarrow C \text{ は } \mathbf{L} \text{ において原子論理式についての始式からカットを用いずに 証明可能} \}$$

- 分裂した岡田の補題が成り立つ。厳密性により

$$\star(\vec{X}) \stackrel{\text{岡田}^l}{\in} \star_P^l(\overrightarrow{[X]}) \stackrel{\text{厳密性}}{\subseteq} \star_P^r(\overrightarrow{[X]}) \stackrel{\text{岡田}^r}{\subseteq} [_ \Rightarrow \star(\vec{X})].$$

- すなわち、 $\star(\vec{X}) \Rightarrow \star(\vec{X})$ は原子論理式についての始式からカットを用いずに証明可能。

Part II の主要定理

- 定理 1: L を単純シーケント計算とする。

L についてモジュラーカット除去が成り立つ $\iff$

- (i) 全ての論理結合子は整合的
- (ii) 全ての構造規則は繁殖的

- 定理 2: L の全ての構造規則は繁殖的であるとすると、

L について原子公理特性が成り立つ $\iff$

全ての論理結合子は厳密

- 系: L_1 、 L_2 を単純シーケント計算とし、両者は共通の論理結合子を含まないとする。このとき、

モジュラーカット除去が L_1 と L_2 について成り立つならば、
 $L_1 \cup L_2$ についても成り立つ。

今後の研究方向

- (Terui 05)、(Ciabattoni-Terui 06) では、
 - さまざまな構造規則とさまざまな命題論理結合子からなる
 - 右辺単数 ($\Gamma \Rightarrow C$) のシーケント計算について
(モジュラー) カット除去のための必要十分条件を与えた。
- 今後の拡張方向
 - 右辺複数 ($\Gamma \Rightarrow \Delta$) のシーケント計算
 - 一般化された一階量子化子 $\star[\vec{x}](A_1, \dots, A_n)$ (ここで $\vec{x}$ は束縛変項)
 - 一般化された高階量子化子
 - 様相
 - (素朴) 包括原理。不動点演算子, ...