数理論理学 I (命題論理)

照井一成
京都大学数理解析研究所
terui@kurims.kyoto-u.ac.jp
http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/∼terui

1 はじめに

本講義の目的は, 1 コマという限られた時間の中で命題論理の “エッセンス” を紹介することにある. そのため系統的な話はせず, 以下の問題に一点集中したいと思う.

問題

平面上に描かれたどんな地図も 4 色あれば塗り分けられる. これを**四色定理**という (Appel and Haken 1976). さて, **有限地図**についてこの定理が成り立つのはよいとして, **無限地図**についてもこの定理は成り立つだろうか？

この問題の論理的解決を通して, 命題論理の基本的な考え方を理解してもらおうというのが目論見である. とくに, 以下 3 点について解説する.

- SAT の “万能” 性 (NP 完全性)
- カントール集合のコンパクト性
- 証明系の完全性

本講義では 0 も自然数に含め, 自然数全体の集合を $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots\}$ とする.

2 命題論理

代数学では, 変数 $x_0, x_1, x_2, \ldots$ および $\times, +, -, 0, 1$ といった記号を用いて多項式を記述する. 命題論理では, **命題変数**

$$\mathbb{V} := \{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$$

および**論理記号** $\wedge, \vee, \neg, \to, \top, \bot$ を用いて**論理式**を記述する．たとえば以下のものは全部論理式である．

$$\neg(q \wedge r) \vee r, \qquad \neg\neg(q \vee \bot), \qquad (q \to r) \to q, \qquad (q, r \in \mathbb{V})$$

命題変数は $1, 0$ (**真**, **偽**) のいずれかの値をとる．各論理記号の読み方および解釈は以下のとおりである．

		A かつ B	A または B	A でない	A ならば B	恒真	矛盾
A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$\neg A$	$A \to B$	$\top$	$\bot$
0	0	0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	1	1	0

また以下の略記法を用いる．

$$A \leftrightarrow B \ := \ (A \to B) \wedge (B \to A) \qquad (A \text{ と } B \text{ は同値}).$$

多項式の値が変数の値によって決まるように，論理式の値は命題変数の値によって一意に定まる．命題変数の値を定める関数

$$v : \mathbb{V} \longrightarrow \{0, 1\}$$

のことを**付値**という．付値 v による論理式 A の値を $v(A)$ と書く．たとえば $v(q) = 0, v(r) = 1$ のとき，上の表によれば $v(q \to r) = 1$, $v((q \to r) \to q) = 0$ となる．

■**充足可能・恒真**．ある付値 v について $v(A) = 1$ が成り立つとき，A は**充足可能**であるという．どんな付値 v についても $v(A) = 1$ が成り立つとき，A は**恒真**または**トートロジー**であるという．たとえば

$$\begin{array}{ll} p \wedge \neg p & \text{充足可能でない．} \\ p \vee q & \text{充足可能だが恒真ではない．} \\ p \vee \neg p & \text{恒真である．} \end{array}$$

最後の論理式は**排中律**を表す．その他の論理法則も恒真な論理式で表すことができる．たとえば

$$\begin{array}{lcll} A \wedge (B \vee C) & \leftrightarrow & (A \wedge B) \vee (A \wedge C) & \text{(分配則)} \\ \neg(A \wedge B) & \leftrightarrow & \neg A \vee \neg B & \text{(ド・モルガンの法則)} \end{array}$$

これらの論理式は $\wedge$ と $\vee$ を入れ替えてもやはり恒真である (**論理的双対性**)．

充足可能と恒真の関係は以下の通り．

$$A \text{ は充足可能でない} \quad \Longleftrightarrow \quad \neg A \text{ は恒真．}$$

■**充足可能性問題**．論理式の集合を $\Gamma, \Delta, \Sigma, \ldots$ 等の記号を用いて表す．すべての $A \in \Gamma$ を充足する付値が存在するとき，Γ は**充足可能**であるという．充足可能性について，以下の計算課題が考えられる．

計算課題 (SAT, 充足可能性問題)

入力: 論理式の有限集合 Γ

質問: Γ は充足可能か?

Γ は制約の集合を表すと思ってよい. Γ に属するすべての制約を同時に満たすことは可能か？それを問うのが SAT である.

SAT の意義は論理的なものに限らない. なぜなら以下で述べるように, SAT を解くアルゴリズムはある種の "万能性" を持つからである. SAT が解ければ "何でも" 解ける！それゆえ多種多様な Γ について充足可能性を判定してくれる **SAT ソルバ**の開発が連綿と続けられている.

3 3 彩色問題から SAT へ

話の都合上, 4 色定理 (平面グラフの 4 彩色) はひとまずおいておき, まずはグラフ一般の 3 彩色について考える. なぜなら, 平面グラフの 4 彩色は常に可能だが, 3 彩色は常に可能とは限らないため計算論的に面白いからである.

頂点の集合 V が与えられたとき, V に属する相異なる 2 点の組 $\{a, b\}$ を V 上の**辺**という. 頂点の集合 V と辺の集合 E の組 $G = (V, E)$ を**グラフ**という.

グラフ $G = (V, E)$ が **3 彩色可能**であるとは, 次の性質を満たす 3 集合 R, G, B が存在することをいう.

(i) $V = R \cup G \cup B$,

(ii) $R \cap G = R \cap B = G \cap B = \emptyset$,

(iii) $\{a, b\} \in E$ ならば $(a, b \in R)$, $(a, b \in G)$, $(a, b \in B)$ はいずれも成り立たない.

ここで次の計算課題を考える.

計算課題 (3 彩色問題)

入力: 有限グラフ G

質問: G は 3 彩色可能か？

この問題は SAT に還元できる. ということは SAT ソルバを使って解くことができる.

■3 彩色問題 ⇒SAT. 各頂点 $a \in V$ に対して, 3 つの命題変数 R_a, G_a, B_a を割り当てる. そして以下の論理式の集合を考える.

$$
\begin{array}{lll}
\text{(i)} & R_a \vee G_a \vee B_a & (a \in V) \\
\text{(ii)} & \neg(R_a \wedge G_a),\ \neg(R_a \wedge B_a),\ \neg(G_a \wedge B_a) & (a \in V) \\
\text{(iii)} & \neg(R_a \wedge R_b),\ \neg(G_a \wedge G_b),\ \neg(B_a \wedge B_b) & (\{a, b\} \in E)
\end{array}
$$

全体を Γ_G とおくと, 次が成り立つ.

定理 1

任意のグラフ G について

$$G \text{ は 3 彩色可能} \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma_G \text{は充足可能.}$$

■**NP 完全性**. SAT に還元できるのは 3 彩色問題に限ったことではない. 実はどんな NP 問題も SAT に還元することができる.

ここで計算課題が **NP 問題**であるとは, うまい候補を見つけて検証すれば yes と答えられるような問題のことである（どんな候補についても検証がうまくいかないならば答えは no である）[*1].

- 3 彩色問題は NP である. 実際, グラフ $G = (V, E)$ が 3 彩色可能なことを示すには, うまい彩色 $R, G, B \subseteq V$ の候補を見つけて条件 (i), (ii), (iii) が成り立つことをチェックすればよい. 条件のチェックは簡単なのだが, G のサイズが大きくなるにつれて可能な彩色 R, G, B の候補数は指数関数的に増加してしまう. それゆえ yes/no の答えを出すには膨大な時間を要する.
- SAT は NP である. 実際, 論理式の有限集合 Γ が充足可能なことを示すには, うまい付値 $v : \mathbb{V} \longrightarrow \{0, 1\}$ を見つけてそれが Γ を充足するかどうかをチェックすればよい. 充足判定は簡単なのだが, Γ に含まれる命題変数の数が増えるにつれ, (検討すべき) 付値の数が指数関数的に増加してしまう. それゆえ yes/no の答えを出すにはやはり膨大な時間を要する.

一方で, 候補のしらみつぶし的検証などせず, 高速にスパっと (多項式時間で) 解ける計算課題のことを **P 問題**という. 定義から $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{NP}$ である. 逆方向が成り立つかどうかを問うのが, 有名な **P 対 NP 問題**である.

問題

$\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ か?

この問題を解決する最初の手掛かりになるのが **NP 完全問題**の存在である.

定理 2(Cook 1971, Levin 1973)

SAT は NP 完全である. すなわち, どんな NP 問題も SAT に (多項式時間で) 還元できる. つまり SAT ソルバで解ける.
同じく 3 彩色問題も NP 完全である.

それゆえ, $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ を示すには, 多項式時間で動く SAT ソルバを開発すればよい. $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$ を示すためのアプローチもいくつか提案されているが, 今のところどれもうまくいきそうにない.

[*1] ただし検証は簡単（多項式時間でできる）であり, 可能な候補の総数は入力のサイズが大きくなっても高々指数関数的にしか増加しないものとする.

4 カントール集合と命題論理

次に命題論理のコンパクト性について考える．まずは『集合と位相』の基礎を思い出そう．

集合 X 上の集合族 $\mathcal{K} \subseteq \wp(X)$ が以下を満たすとき, $\mathcal{K}$ を**閉集合系**といい, 組 $X = (X, \mathcal{K})$ を**位相空間**という．

$$
\begin{array}{llcll}
\text{(i)} & K_1, \ldots, K_n \in \mathcal{K} & \Longrightarrow & K_1 \cup \cdots \cup K_n \in \mathcal{K} & (n \geq 0) \\
\text{(ii)} & K_\lambda \in \mathcal{K}\ (\lambda \in \Lambda) & \Longrightarrow & \bigcap_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda \in \mathcal{K} & (\Lambda \text{ は任意の添字集合})
\end{array}
$$

(i), (ii) の特別な場合として $\emptyset, X \in \mathcal{K}$ である．上記で $\cup$ を $\cap$ に置き換え, $\bigcap$ を $\bigcup$ に置き換えれば開集合系に基づく等価な定義が得られる．集合 $Y \subseteq X$ について

$$
Y \text{ は閉集合} \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{Y} \text{は開集合}
$$

が成り立つ ($\overline{Y}$ は Y の補集合).

位相空間 $X = (X, \mathcal{K})$ と部分集合 $Y \subseteq X$ が与えられたとき, $\mathcal{K}_Y := \{K \cap Y : K \in \mathcal{K}\}$ とおくと, X の**部分空間** $Y = (Y, \mathcal{K}_Y)$ が得られる．Y が X の閉集合のとき, これを**閉部分空間**という．

たとえば, 実数直線 $\mathbb{R}$ は通常の距離位相に関して位相空間になる．開区間 (a, b) たちの和が開集合であり, その補集合が閉集合である．閉区間 $[a, b]$ はもちろん閉集合なので, 閉区間に制限すれば $\mathbb{R}$ の閉部分空間が得られる．

■**コンパクト性**．$\mathbb{R}$ においては**区間縮小法**を用いることができる．すなわち単調減少する閉区間の列

$$
[a_0, b_0] \supseteq [a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \cdots
$$

が与えられたとき, その共通部分 $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$ は少なくとも 1 点を含む．「区間」を「閉集合」に一般化して得られるのが (可算) **コンパクト性**である[*2].

定義 3

X を位相空間とする．どんな単調減少列

$$
I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \qquad (I_n \text{は空でない } X \text{ の閉集合})
$$

が与えられても共通部分 $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ が空でないとき, X は (可算) **コンパクト**であるという．

定理 4(Heine-Borel)

$\mathbb{R}$ はコンパクトではないが, その有界閉区間 $[a, b]$ はコンパクトである．

補題 5

位相空間 X がコンパクトならば, その閉部分空間もコンパクトである．

[*2] 第二可算公理を満たす位相空間においては, 可算コンパクト性とコンパクト性は一致する．本稿ではそのような位相空間しか取り扱わないので, 以後「可算」という語を省いて単にコンパクト性と呼ぶ．

次にカントール集合 $\mathbb{I}$ を構成する.

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{I}_0 & := & [0,1], \\ \mathbb{I}_{n+1} & := & \{\frac{x}{3} : x \in \mathbb{I}_n\} \cup \{\frac{x+2}{3} : x \in \mathbb{I}_n\}, \\ \mathbb{I} & := & \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{I}_n. \end{array}$$

各 $\mathbb{I}_n$ は閉集合であるから, その共通部分である $\mathbb{I}$ も閉集合である. 定理 4 と補題 5 より

定理 6

$\mathbb{I}$ はコンパクト空間である.

■付値集合=カントール集合. 命題論理に戻る. 命題変数の可算無限集合 $\mathbb{V} = \{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$ を固定し, 付値 $v : \mathbb{V} \longrightarrow \{0,1\}$ 全体の集合を $\mathbb{VAL}$ と書く. すると

$$\mathbb{I} \cong \mathbb{VAL} \tag{1}$$

という同一視ができる. 実際, $\mathbb{I}$ の各点は, 0-1 無限列 $b_1, b_2, b_3, \ldots \in \{0,1\}$ を用いて $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2b_n}{3^n}$ と表せるので, 付値 $v(p_n) := b_n$ を対応させることができる. この対応は全単射であり, したがって $\mathbb{VAL}$ 上にコンパクト位相が誘導できる. では論理式は $\mathbb{VAL}$ 上でどのように解釈されるだろうか? 論理式 A と論理式の集合 Γ が与えられたとき,

$$[\![A]\!] := \{v \in \mathbb{VAL} : v(A) = 1\}, \qquad [\![\Gamma]\!] := \bigcap_{A\in\Gamma} [\![A]\!]$$

と定めると, 定義より

$$[\![\Gamma]\!] \neq \emptyset \iff \Gamma\text{は充足可能} \tag{2}$$

が成り立つ. さらに

$$\begin{array}{lcl} [\![A \wedge B]\!] & = & [\![A]\!] \cap [\![B]\!] \\ [\![A \vee B]\!] & = & [\![A]\!] \cup [\![B]\!] \\ [\![\neg A]\!] & = & \overline{[\![A]\!]} \\ [\![\top]\!] & = & \mathbb{I} \\ [\![\bot]\!] & = & \emptyset \end{array}$$

である. 命題変数 p_n について $[\![p_n]\!] = \{v \in \mathbb{VAL} : v(p_n) = 1\}$ を考えると, これはカントール集合 $\mathbb{I}$ の定義で $\mathbb{I}_n$ を $\mathbb{I}'_n := \{\frac{x+2}{3} : x \in \mathbb{I}_{n-1}\}$ で置き換えたものに相当する. 当然閉集合であり, その（$\mathbb{I}$ における）補集合も閉なので開集合でもある. よって次が成り立つ.

補題 7

任意の論理式 A について $[\![A]\!]$ は開かつ閉集合である. 従って, 任意の論理式集合 Γ について $[\![\Gamma]\!]$ は閉集合である.

定理 6, 補題 7, (1), (2) より次が得られる ($\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1$ なら $[\![\Gamma_0]\!] \supseteq [\![\Gamma_1]\!]$ に注意).

定理 8(命題論理のコンパクト性)

論理式の有限集合からなる単調増加列

$$\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \subseteq \dots$$

を考え $\Gamma := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n$ とする．このとき

$$\Gamma\text{は充足可能} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{すべての } n \text{ について } \Gamma_n \text{ は充足可能}.$$

■無限グラフの彩色． 次に (可算) 無限グラフの彩色問題について考える．無限グラフ $G = (V, E)$ が与えられたとき (ただし $V = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$), 部分グラフ $G_0, G_1, G_2, \dots$ を以下で定める．

$$G_n := (V_n, E_n), \qquad V_n := \{a_0, \dots, a_n\}, \qquad E_n := E \cap V_n.$$

前節の還元によって命題論理の有限集合を定めれば

$$\Gamma_{G_0} \subseteq \Gamma_{G_1} \subseteq \Gamma_{G_2} \subseteq \cdots, \qquad \Gamma_G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_{G_n}$$

となる．したがって定理 1 と定理 8 により

定理 9(無限グラフの 3 彩色)

$G = (V, E)$ を無限グラフとすると

$$G \text{ は } 3 \text{ 彩色可能} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{すべての } n \text{ について } G_n \text{ は } 3 \text{ 彩色可能}.$$

同じことは 3 彩色を 4 彩色に変えても成り立つ．しかも四色定理によりどんな有限平面グラフも 4 彩色可能であるから, 結論として以下が成り立つ．

定理 10(無限地図の四色定理)

どんな無限平面グラフも 4 彩色可能である．従って, 平面上に描かれたどんな無限地図も 4 色あれば塗分けられる．

5 証明系と完全性定理

前章ではカントール集合のコンパクト性から命題論理のコンパクト性を導いたが, 同じことは純粋に論理的にも説明できる．

> 「たとえどんなに高次の無限を扱う数学理論であっても, 定理の証明をみればそれは有限の文字列にすぎない」

この当たり前の事実がコンパクト性と密接に関わるのである．

■**論理的帰結**. 論理式 A が恒真のとき, つまりすべての付値 $v \in \mathbb{VAL}$ について $v(A)=1$ となるとき, $\models A$ と書く. この表記を一般化しよう. Γ を論理式の集合とし, A を論理式とする. すべての付値 $v \in \mathbb{VAL}$ について

$$v(\Gamma)=1 \quad \Longrightarrow \quad v(A)=1$$

が成り立つとき $\Gamma \models A$ と書く. これは「仮定 Γ のもとで A は常に真」であることを表す.

たとえば次のような帰結関係がある.

$$A \to B, A \models B, \qquad A \to B \models \neg B \to \neg A, \qquad A \vee B, \neg A \models B.$$

上のように, 集合 $\Gamma = \{A_1, \ldots, A_n\}$ のことを単に列 $A_1, \ldots, A_n$ で表すこともある.

■**証明系**. さて $\Gamma \models A$ という帰結関係に, もっと "有限な" 特徴づけを与えたい. そのために仮定 Γ から結論 A を導くための**推論規則**を考える. 話を簡単にするため, 論理記号は $\wedge, \to, \perp$ のみであるとする. $\neg$ と $\vee$ は

$$\neg A := A \to \perp, \qquad A \vee B := \neg(\neg A \wedge \neg B)$$

というふうに $\wedge, \perp, \to$ を使って定義することができる.

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}\ (\wedge I) \qquad \frac{A \wedge B}{A}\ (\wedge E) \qquad \frac{A \wedge B}{B}\ (\wedge E)$$

$$\frac{\begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \to B}\ (\to I) \qquad \frac{A \to B \quad A}{B}\ (\to E)$$

$$\frac{\perp}{A}\ (\perp E) \qquad \frac{\begin{matrix}[\neg A]\\ \vdots \\ \perp\end{matrix}}{A}\ (abs)$$

上の規則のうち $(\to I)$ は説明を要する. 数学の論証において「A ならば B」という定理を証明するには, A を仮定した上で B を証明すればよい. つまり

$$\begin{matrix}A\\ \vdots \\ B\end{matrix}$$

という証明があればよい. そのような証明があれば $A \to B$ が証明できたといってよい. しかも仮定 A はその時点で役割を終えているので, 仮定一覧から**消去**してしまってよい. 消去された仮定を $[A]$ というふうに書く. つまり $(\to I)$ 規則は

$$\begin{matrix}A\\ \vdots \\ B\end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \to B}$$

という証明の構成法を述べている.

これらの推論規則を用いて Γ(の中のいくつかの仮定) から A が導出できるとき, **Γ から A は証明できる**といい, $\Gamma \vdash A$ と書く. たとえば

$$\dfrac{\dfrac{A \wedge B}{B}\,(\wedge E) \quad \dfrac{A \wedge B}{A}\,(\wedge E)}{B \wedge A}\,(\wedge I)$$

という推論ができるので, $A \wedge B \vdash B \wedge A$ が成り立つ. ここで $(\rightarrow I)$ 規則を用いれば

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \wedge B]}{B}\,(\wedge E) \quad \dfrac{[A \wedge B]}{A}\,(\wedge E)}{B \wedge A}\,(\wedge I)}{A \wedge B \rightarrow B \wedge A}\,(\rightarrow I)$$

というふうに仮定を消去できるので, $\vdash A \wedge B \rightarrow B \wedge A$ が成り立つ.

上のように有限個の推論規則を組み合わせて得られる図形を**証明図**という. また定理や証明を記述するシステムのことを**証明系**または**形式系**という.

上に挙げた推論規則により論理的帰結関係は正確に特徴づけられる.

定理 11(証明系の完全性, Gödel 1930)

任意の論理式 A と論理式集合 Γ について

$$\Gamma \models A \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \vdash A.$$

さて, 定義により証明図は有限である. ということは, たとえ無限個の仮定があったとしても, 1 つの証明図の中では有限個しか用いることができない. よって次が成り立つ.

$$\Gamma \vdash A \quad \Longleftrightarrow \quad \text{ある有限部分集合 } \Gamma_0 \subseteq \Gamma \text{ について} \Gamma_0 \vdash A.$$

あと一点, 次のことに注意する.

$$\Gamma \text{は充足可能} \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \models \bot \text{は成り立たない}.$$

以上のことと定理 11 から命題論理のコンパクト性 (定理 8) が帰結する. ここでは少し別の形で述べる.

定理 12(命題論理のコンパクト性)

任意の論理式集合 Γ について

$$\Gamma \text{は充足可能} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{すべての有限部分集合 } \Gamma_0 \subseteq \Gamma \text{ は充足可能}.$$

6　おわりに

本講義では無限地図の四色定理を題材として, 命題論理の諸概念がどう結びついているかを解説した. まず命題論理の “万能” 性により

$$\text{グラフの 3 彩色問題} \quad \Longrightarrow \quad \text{SAT}$$

という還元を行った. この手の還元があらゆる NP 問題について行えるというのが SAT の NP 完全性である.

次に無限地図の四色定理を

$$\begin{array}{ccccc} \text{Heine-Borel の定理} & \Rightarrow & \text{命題論理のコンパクト性} & \Leftarrow & \text{証明系の完全性} \\ & & \Downarrow & & \\ & & \text{無限地図の四色定理} & & \end{array}$$

というルートで正当化した. 下段の “$\Downarrow$” を除けば, 矢印は “ある意味で” 逆方向も成り立つ. 要はコンパクト性というのは, 有限なる証明系の完全性のことなのである. さまざまな定理や公理の間にこのような同等性を見出すのが**逆数学**の課題である.

本講義ではもっぱら命題論理を扱ったが, 同様のことは (量化記号 $\forall x, \exists x$ をともなう) **述語論理**についても成り立つ. その場合「付値」は「モデル」で置き換えられ, 「充足可能」は「モデルを持つ」で置き換えられる. そうなると応用範囲がはるかに広がる. とくに代数学との関係が顕著であり, この方面を研究するのが**モデル理論**の課題である.

また述語論理に移行すれば, NP 問題に限らず多種多様な計算課題が還元できるようになる. それゆえ述語論理の**自動定理証明システム**を開発すれば, 様々な分野へと応用が広がる.

次回の講義ではとくに**初等数論**に焦点を当て, 述語論理上で体系化する. そうすると出てくる新しい現象が**不完全性**である.