数理論理学 II (不完全性定理)

照井一成
京都大学数理解析研究所
terui@kurims.kyoto-u.ac.jp
http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/∼terui

1　はじめに

本講義の目的は, 現代数学基礎論の幕開けとなった**不完全性定理** (Kurt Gödel 1931) をなるべく平易に, 1 コマの時間内で解説することである.

不完全定理というと, 「理性の限界」だとか「機械に対する人間の勝利」だとか, やたら深刻な事柄と捉えられがちである. しかし, 本稿を読めばわかるように, 不完全性はそんなに不思議なことでも, 深刻なことでも, 絶望的なことでもない. 単に形式系という発想の中に潜む「そりゃ無理でしょ」という当然の限界を暴露したものにすぎない. 「王様の耳はロバの耳」と最初に叫んだのがゲーデルであった. それだけにすぎない.

不完全性定理には第一と第二があり, 以下で順次解説していく. 第一不完全性の証明法はいろいろあり, ひとつには「どこで対角線論法を用いるか」により違いが表れる. 本稿では形式系の側でなく, 計算論の側で対角線論法を用いるアプローチをとる. これだと第一から第二へスムーズに移行できないのだが, そのあたりは想像力でカバーしていただきたい.

2　決定可能と半決定可能

■ゲーデル符号化.　有限の対象は, 適当な文字（アルファベット, 数字, 論理記号など）を使えば文字列で表すことができる. 一方, どんな文字列も 1 つの (巨大な) 自然数で表せるから, 結局のところ有限の対象はみな 1 つの自然数で表すことができる.

たとえば文字列 goedel を自然数で表すには, まずアルファベット a, b, . . . , z に自然数を

a	b	c	···	z
1	2	3	···	26

というふうに割り当てる. この表に従って

$$\begin{array}{cccccc} \mathrm{g} & \mathrm{o} & \mathrm{e} & \mathrm{d} & \mathrm{e} & \mathrm{l} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 7 & 15 & 5 & 4 & 5 & 12 \end{array}$$

とし, 素数を小さい順にならべたもの

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots$$

の肩にのせて掛け合わせれば, ひとつの自然数が得られる.

$$\ulcorner \mathrm{goedel} \urcorner := 2^7 \cdot 3^{15} \cdot 5^5 \cdot 7^4 \cdot 11^5 \cdot 13^{12} = 517076291845486237683388237668000000.$$

逆に $\ulcorner \mathrm{goedel} \urcorner \in \mathbb{N}$ が与えられたら, 素因数分解すれば数列 $7, 15, 5, 4, 5, 12$ が得られる. そこから文字列 goedel を復元するのはたやすい. このような手法を**ゲーデル符号化**という. 有限の対象 A (たとえば論理式) に対応する自然数を **A のゲーデル数**といい, 記号 $\ulcorner A \urcorner$ で表す.

■計算課題のゲーデル符号化. 計算課題とは, たとえば

計算課題 (SAT)

入力: 論理式の有限集合 Γ

質問: Γ は充足可能か?

のような形式を持つものであった. ゲーデル符号化により, 入力は自然数であると仮定してよい. するとこの計算課題は

$$SAT \ := \ \{\ulcorner \Gamma \urcorner : \Gamma \text{は充足可能} \} \ \subseteq \ \mathbb{N}$$

というふうに自然数の集合で表すことができる. 実際, 集合 SAT がわかれば計算課題 SAT が解ける:

$$\Gamma \text{は充足可能} \quad \Longleftrightarrow \quad \ulcorner \Gamma \urcorner \in SAT.$$

このように, yes/no を出力とするような計算課題は, 全部自然数の集合と同一視できる.

■決定可能・半決定可能 $X \subseteq \mathbb{N}$ とする. 次のようなコンピュータプログラム P が存在するとき, X は**決定可能**であるという. 任意の自然数 n について

$$\begin{aligned} n \in X \quad &\Longrightarrow \quad P(n) = 1 \\ n \notin X \quad &\Longrightarrow \quad P(n) = 0. \end{aligned}$$

すなわち入力 n が与えられたら, プログラム P は $n \in X$ か否かに応じて 1 か 0 を出力する. 大事なのは, 計算はループしたり発散したりせず, 必ずいつかは停止するという点である (ただし計算時間はいくらでもかかってよいものとし, メモリも必要に応じていくらでも増設できるものとする).

また, 次のようなコンピュータプログラム Q が存在するとき, X は**半決定可能**であるという. 任意の自然数 n について

$$n \in X \iff Q(n) = 1.$$

先ほど大きく異なり, $n \notin X$ のときに計算が停止する保証は一切ない.

たとえば SAT や 3 彩色問題は決定可能である (P として SAT ソルバを用いよ). また, 次の計算課題も当然決定可能である (互除法を用いて a と b の最大公約数 (a,b) を求めよ. その上で (a,b) が c の約数かどうかを判定せよ).

計算課題 (1 次ディオファントス方程式)

入力: 3 つの整数 a, b, c

質問: 方程式 $ax + by = c$ は整数解 x, y を持つか？

他方で, この課題を一般化すると話は途端に難しくなる. $3x^5y - 16xyz^3 + 25z$ のような, 整数係数の多変数多項式のことを**ディオファントス多項式**という.

計算課題 (一般ディオファントス方程式)

入力: ディオファントス多項式 $f(x_1, \dots, x_n)$

質問: 方程式 $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ は整数解を持つか？

この計算課題は半決定可能ではあるが, 決定可能ではないことが知られている (**ヒルベルトの第 10 問題**の否定的解決).

定義により, 計算課題は決定可能なら半決定可能である. 逆方向については次が成り立つ.

定理 1

任意の $X \subseteq \mathbb{N}$ について

$$X \text{ は決定可能} \iff X \text{ と } \overline{X} \text{ はどちらも半決定可能.}$$

証明 $\Rightarrow$ 方向は明らかなので, $\Leftarrow$ 方向を示す. 仮定により次の性質を満たすプログラム Q, R が存在する.

$$Q(n) = 1 \iff n \in X, \qquad R(n) = 1 \iff n \notin X.$$

入力 $n \in \mathbb{N}$ が与えられたとき, $Q(n)$ と $R(n)$ を並列的に実行する. $n \in X$ か $n \notin X$ のどちらかだから, $Q(n) = 1$ か $R(n) = 1$ のどちらか一方が必ず得られる. 前者の場合 1 を出力し, 後者の場合 0 を出力すればよい. ■

■決定可能と半決定可能の分離　次に半決定可能ではあるが決定可能ではない計算課題の存在を示す.

半決定可能な集合とは, それを半決定するプログラムが存在するような集合のことであった. プログラムは有限の対象だからゲーデル符号化でき, ゲーデル数の小さい順に

$$P_0, P_1, P_2, \ldots$$

と並べることができる. プログラム P_n が半決定する集合を X_n と書くことにすれば, 半決定可能な集合も

$$X_0, X_1, X_2, \ldots$$

と列挙することができる (ただし同じ集合が重複して何度も現れる). そこで次の集合 (**対角線集合**) を考える.

$$K \ := \ \{n \in \mathbb{N} : n \in X_n\}.$$

定理 2

K は半決定可能であるが, $\overline{K}$ は半決定可能ではない. 従って K は決定可能ではない.

証明　K が半決定可能なことを示すには, 次の性質を満たすプログラム Q を構成すればよい.

$$Q(n) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad P_n(n) = 1.$$

後者は $n \in X_n$ と, 従って $n \in K$ と同値である.

仮に $\overline{K}$ が半決定可能だとすると, ある $n \in \mathbb{N}$ について $\overline{K} = X_n$ となる. すると

$$n \in K \quad \Longleftrightarrow \quad n \in X_n \quad \Longleftrightarrow \quad n \in \overline{K} \quad \Longleftrightarrow \quad n \notin K$$

となり $n \in K$ と $n \notin K$ が同値になってしまう. これはおかしい. ■

■計算可能 ⇒ 連続.　半決定可能集合は開集合と似ている. 実際, 半決定可能集合を全部集めて $\mathcal{RE}$ と書くことにすれば, 次が成り立つ[*1].

定理 3

(i) $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{RE}$ ならば $X_1 \cap \cdots \cap X_n \in \mathcal{RE}$.
(ii) 集合族 $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が “一様に” 半決定可能ならば $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n \in \mathcal{RE}$.

[*1] $\mathcal{RE}$ は “recursively enumerable” の頭文字. 要は半決定可能というのと同じことである.

よって $\mathcal{RE}$ は "開集合系もどき" とみなせる. また定理 1 に鑑みれば, 決定可能集合は "開かつ閉集合もどき" とみなせる.

このようなアナロジーのもとで**計算可能**な関数 $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ を考えてみると, "連続関数" に近い特質を持つことがわかる.

定理 4

$f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ を計算可能な関数とすると

$$X\in\mathcal{RE}\quad\Longrightarrow\quad f^{-1}[X]\in\mathcal{RE}.$$

3　初等数論の論理式

計算の話はこれくらいにして, 証明の話に移る. 両者の間に密接な対応関係があるということが, 不完全性定理の証明にとって重要である.

■初等数論の項・論理式　まずは初等数論を展開するのに必要最小限のセッティングを考える.

以下のような表現を**初等数論の項**という.

$$0,\qquad s(t),\qquad t+u,\qquad t\cdot u,\qquad x,\ y,\ z,\ \ldots$$

ただし t,u はそれ自体初等数論の項であり, また $x,y,z,\ldots$ は**変数**を表す. これらは $\mathbb{N}$ 上に値をとる変数であり, 命題変数とは異なることに注意.

$s(t)$ は「t の次の数」を表す記号である. これを用いると自然数を表す項

$$0,\ s(0),\ s(s(0)),\ s(s(s(0))),\ \ldots$$

をどんどん作っていくことができる. これらを**数項**といい, $0,1,2,3,\ldots$ と略記する.

以下のような表現を**初等数論の論理式**という.

$$t=u,\qquad \bot,\qquad \varphi\to\psi,\qquad \varphi\wedge\psi,\qquad \varphi\vee\psi,\qquad \forall x.\varphi,\qquad \exists x.\varphi.$$

ただし t,u は項であり, φ,ψ はそれ自体初等数論の論理式である.

自由変数を含まない論理式を**文**という. 文は真か偽の値をもつ. 文 φ が普通の意味で真なとき

$$\mathbb{N}\models\varphi$$

と書く.

自由変数を高々 1 つしか含まない論理式を **1 変数論理式**という. 1 変数論理式は自然数の集合を定める. $\varphi(x)$ が表す集合を

$$X_\varphi:=\{n\in\mathbb{N}:\mathbb{N}\models\varphi(n)\}$$

と書く.

次の略記を行う.

$$\begin{array}{lcl} t \neq u & := & \neg(t = u) \\ t \leq u & := & \exists x.\, x + t = u \\ \forall x \leq t.\varphi & := & \forall x.(x \leq t \to \varphi) \\ \exists x \leq t.\varphi & := & \exists x.(x \leq t \wedge \varphi) \end{array}$$

ただし下 2 行で項 t は変数 x を含まないものとする.

■有界・Σ_1・Π_1. 命題論理と異なり, 初等数論では量化記号 $\forall$, $\exists$ が登場する. これらを含む文の真偽を判定するには, 一般に無限のプロセスが必要である.

$$\mathbb{N} \models \exists x.\varphi(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{N} \models \varphi(0) \text{ または } \mathbb{N} \models \varphi(1) \text{ または } \mathbb{N} \models \varphi(2) \text{ または } \cdots$$

しかし量化記号が $\forall x \leq t$, $\exists x \leq t$ というふうに**有界**の形で用いられる分には有限で済む.

$$\mathbb{N} \models \exists x \leq 100.\, \varphi(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{N} \models \varphi(0) \text{ または } \mathbb{N} \models \varphi(1) \text{ または } \cdots \text{ または } \mathbb{N} \models \varphi(100).$$

非有界の $\forall$, $\exists$ を含まず, 有界の $\forall x \leq t$, $\exists x \leq t$ しか含まない論理式を**有界論理式**という.

たとえば「n が素数である」ことは次の 1 変数有界論理式により表せる.

$$\mathsf{prime}(n) \;:=\; 2 \leq n \wedge \forall x \leq n.\forall y \leq n.(x \cdot y = n \to x = 1 \vee y = 1).$$

実際, X_{prime} は素数全体の集合と一致する.

次の形の論理式をそれぞれ **Σ_1 論理式**, **Π_1 論理式**という.

$$\exists x_1 \cdots \exists x_n.\varphi, \qquad \forall x_1 \cdots \forall x_n.\varphi$$

ただし φ は有界論理式であり, $n = 0$ の場合も認める. つまり有界論理式は同時に Σ_1 論理式, Π_1 論理式でもある.

次の論理式はどちらも Π_1 文である (未定義の記号 x^y, even を含んでいるが, これらは初等数論の論理式を用いて定義可能である).

$$\begin{array}{lcl} \mathsf{FLT} & := & \forall x.\forall y.\forall z.\forall w.\, (1 \leq x \wedge 1 \leq y \wedge 1 \leq z \wedge 3 \leq w \to x^w + y^w \neq z^w). \\ \mathsf{GC} & := & \forall x.\, 4 \leq x \wedge \mathsf{even}(x) \to \exists y \leq x.\exists z \leq x.\, \mathsf{prime}(y) \wedge \mathsf{prime}(z) \wedge x = y + z. \end{array}$$

FLT はフェルマーの最終定理, GC はゴールドバッハの予想を表す. 一方で a, b, c を自然数とするとき次の論理式は Σ_1 文である.

$$\exists x.\exists y.\, a \cdot x + b \cdot y = c.$$

ド・モルガンの法則

$$\mathbb{N} \models \neg\forall x.\varphi(x) \leftrightarrow \exists x.\neg\varphi(x), \qquad \mathbb{N} \models \neg\exists x.\varphi(x) \leftrightarrow \forall x.\neg\varphi(x)$$

によれば, Σ_1 論理式の否定は Π_1 論理式に等しく, 逆に Π_1 論理式の否定は Σ_1 論理式に等しい.

次に論理の複雑さと計算の複雑さの関係を述べる.

補題 5

次のようなプログラム P が存在する．どんな有界文 φ についても

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{N} \models \varphi & \Longrightarrow & P(\ulcorner \varphi \urcorner) = 1 \\ \mathbb{N} \not\models \varphi & \Longrightarrow & P(\ulcorner \varphi \urcorner) = 0. \end{array}$$

従って真な有界文 (のゲーデル数) 全体の集合

$$TB \ := \ \{\ulcorner \varphi \urcorner \in \mathbb{N} : \varphi \text{ は真な有界文 }\}$$

は決定可能である．

定理 6

次のようなプログラム Q が存在する．どんな Σ_1 文 φ についても

$$\mathbb{N} \models \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad Q(\ulcorner \varphi \urcorner) = 1.$$

従って真な Σ_1 文 (のゲーデル数) 全体の集合

$$TE \ := \ \{\ulcorner \varphi \urcorner \in \mathbb{N} : \varphi \text{ は真な } \Sigma_1 \text{ 文 }\}$$

は半決定可能である．

次に $\varphi(x)$ を 1 変数論理式とするとき, 集合 X_φ の複雑さを調べる．関数 $f_\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ を

$$f_\varphi(n) := \ulcorner \varphi(n) \urcorner$$

と定める．これは明らかに計算可能な関数である．$\varphi(x)$ が Σ_1 論理式のとき,

$$n \in X_\varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{N} \models \varphi(n) \quad \Longleftrightarrow \quad \ulcorner \varphi(n) \urcorner \in TE \quad \Longleftrightarrow \quad n \in f_\varphi^{-1}[TE]$$

であるから $X_\varphi = f_\varphi^{-1}[TE]$ であり, 定理 6 と定理 4 により半決定可能である．逆方向も成り立つ．

定理 7

任意の $X \subseteq \mathbb{N}$ について

$$\begin{array}{lcl} X \text{ は半決定可能} & \Longleftrightarrow & \text{ある } \Sigma_1 \text{ 論理式 } \varphi(x) \text{ について } X = X_\varphi. \\ \overline{X} \text{ は半決定可能} & \Longleftrightarrow & \text{ある } \Pi_1 \text{ 論理式 } \varphi(x) \text{ について } X = X_\varphi. \end{array}$$

よって Σ_1 論理式 $\varphi(x)$ により定まる集合 X_φ は “開集合もどき” であり, Π_1 論理式 $\varphi(x)$ により定まる集合 X_φ は “閉集合もどき” である．

最後に TB や TE の一般化を考える．

$$TA \ := \ \{\ulcorner \varphi \urcorner \in \mathbb{N} : \varphi \text{ は真な文 }\}$$

これは自然数の集合であるが, この中には初等数論の真理が全部つまっている. それゆえ, ものすごく複雑な集合であることは想像に難くない. 実際, 次が成り立つ.

定理 8(真理定義不能性)

$TA = X_\varphi$ を満たす初等数論の論理式 $\varphi(x)$ は存在しない. とくに TA は半決定可能ではない.

4 形式系

まず, 前回導入した命題論理の証明系を述語論理へと拡張する. 前回の推論規則 7 つに加え, 次の規則を考える.

$$\frac{}{t = t}\ (eq1) \qquad \frac{t = s \quad u = s}{t = u}\ (eq2) \qquad \frac{t = u}{s(t) = s(u)}\ (eq3)$$

$$\frac{t_1 = u_1 \quad t_2 = u_2}{t_1 + t_2 = u_1 + u_2}\ (eq4) \qquad \frac{t_1 = u_1 \quad t_2 = u_2}{t_1 \cdot t_2 = u_1 \cdot u_2}\ (eq5)$$

$$\frac{\varphi(x)}{\forall x.\varphi(x)}\ (\forall I) \qquad \frac{\forall x.\varphi(x)}{\varphi(t)}\ (\forall E)$$

$$\frac{\varphi(t)}{\exists x.\varphi(x)}\ (\exists I) \qquad \frac{\exists x.\varphi(x) \qquad \begin{matrix}[\varphi(x)] \\ \vdots \\ \psi\end{matrix}}{\psi}\ (\exists E)$$

ただし $(\forall I)$ 規則の適用に際しては**固有変数条件**が守られていなくてはならない.

固有変数条件: $\varphi(x)$ に至る証明図に現れる未消去の仮定の中で, x は自由変数として用いられていてはならない.

類似の条件が $(\exists E)$ 規則にも課される. これらの規則を用いて文集合 T から文 φ が証明できるとき, $T \vdash \varphi$ と書く.

■初等数論の形式系. 次に初等数論に特有の公理を考える. 文の集合のことを**公理系**または**理論**という. 理論の典型例は**ロビンソン算術 $\mathbf{Q}$** であり, 以下の論理式の全称閉包（自由変数を $\forall$ で束縛したもの）からなる.

1. $s(x) = s(y) \to x = y$
2. $s(x) \neq 0$
3. $x \neq 0 \to \exists y.x = s(y)$
4. $x + 0 = x$
5. $x + s(y) = s(x + y)$
6. $x \cdot 0 = 0$

7. $x \cdot s(y) = x \cdot y + x$

たとえば

$$\mathbf{Q} \vdash 2+3=5, \qquad \mathbf{Q} \vdash 3 \neq 2, \qquad \mathbf{Q} \vdash \exists x.\exists y.\, 2x+3y=12$$

などが成り立つ一方

$$\mathbf{Q} \nvdash \forall x.\forall y.\, x+y=y+x, \qquad \mathbf{Q} \nvdash \forall x.\forall y.\, (x^2=2y^2 \to y=0).$$

である（後者の文は $\sqrt{2}$ が無理数であることを表す．これが $\mathbf{Q}$ には証明できない）．理論とは単に文の集合のことであるが, これを思い切って**擬人化**し,「ある架空の数学者の証明能力」を表すものと考えよう．そうすると

$$\mathbf{Q} \ \approx \ \text{小学生レベルの数学者 (の証明能力)}$$

というアナロジーが得られる (もちろん厳密な主張ではない).

$\mathbf{Q}$ は非常に "弱い" 数学者であるが, それでも Σ_1 文については完璧な証明能力を持つ.

定理 9($\mathbf{Q}$ の Σ_1 完全性)

任意の Σ_1 文 φ について

$$\mathbb{N} \models \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{Q} \vdash \varphi.$$

次に $\mathbf{Q}$ に新たな公理を "学ばせて" より強い数学者へと "育成する" ことを考える.

$\mathbf{Q}$ に以下の形の論理式 (の全称閉包) をすべて加えたものを**ペアノ算術 $\mathbf{PA}$** という.

$$\varphi(0) \wedge \forall x.[\varphi(x) \to \varphi(s(x))] \to \forall x.\varphi(x) \qquad \text{(数学的帰納法の公理)}$$

また, 上の公理に現れる φ を Σ_1 論理式に制限して得られる理論を $\mathbf{I}\Sigma_1$ という．$\mathbf{I}\Sigma_1$ は, 高校生レベルの初等数論に出てくる定理はだいたい全部証明できるものと思ってよい．もちろん

$$\mathbf{I}\Sigma_1 \vdash \forall x.\forall y.\, x+y=y+x, \qquad \mathbf{I}\Sigma_1 \vdash \forall x.\forall y.\, x^2=2y^2 \to y=0.$$

である．おおよそのアナロジーは

$$\mathbf{I}\Sigma_1 \ \approx \ \text{中高生レベルの数学者 (の証明能力)}$$

といったところか (しつこいようだが, あくまでもアナロジーであり厳密な主張ではない).

$\mathbf{PA}$ は $\mathbf{I}\Sigma_1$ の強力な拡張である．いまだ未解決であるが,

$$\mathbf{PA} \vdash \mathsf{FLT}$$

ではないかと予想されている．それでも Ramsey 定理の亜種や擬整列順序に関する Kruskal の定理（の有限版）など, $\mathbf{PA}$ に証明できない定理はたくさんある.

文の集合として $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{I}\Sigma_1 \subseteq \mathbf{PA}$ である．さらに強力な数学者を得るには, たとえばベースとなる論理を **2 階述語論理**に拡張して**包括原理**

$$\exists X. \forall x. (x \in X \leftrightarrow \varphi(x))$$

をいろいろな論理式 φ について加えていけばよい．そうすれば

$$\mathbf{Q} \ \subseteq \ \mathbf{I}\Sigma_1 \ \subseteq \ \mathbf{PA} \ \subseteq \ \Pi^1_1\mathbf{CA}_0 \ \subseteq \ \mathbf{PA}_2 \ \subseteq \ \cdots$$

というふうに "数学者" の系列が得られる．しかしあまりにも無造作に公理を加えると矛盾が生じてしまう．

定理 10

$\mathbf{Q}$ を含む理論 T について, 以下は同値である．

1. $T \vdash \bot$.
2. ある論理式 φ について $T \vdash \varphi$ かつ $T \vdash \neg\varphi$.
3. すべての論理式 φ について $T \vdash \varphi$.

上のいずれか（したがってどれも）が成り立つとき, T は**矛盾**しているという．そうでないとき T は**無矛盾**であるという．上で挙げた理論 $\mathbf{Q}, \mathbf{I}\Sigma_1, \mathbf{PA}, \Pi^1_1\mathbf{CA}_0, \mathbf{PA}_2$ は, いずれも無矛盾である．

5　第一不完全性定理

本章でいよいよ第一不完全性定理が登場するが, その前にあともう少しだけ準備が必要である．

T を理論とする．$\mathbf{Q} \subseteq T$ のとき, T を $\mathbf{Q}$ **の拡大**という．集合 $\{\ulcorner\varphi\urcorner : \varphi \in T\}$ が半決定可能なとき, T を **RE 理論**という．公理系の本来の意義（証明の出発点）を念頭におけば, RE というのは "人間に扱いうる" 理論なら当然満たされるべき要請である．とくに上で挙げた理論は全部 RE である．よってわかりにくければ気にしなくてよい．

理論 T が与えられたとき, 集合 $Prov_T$ を以下で定める．

$$Prov_T \ := \ \{\ulcorner\varphi\urcorner : T \vdash \varphi \ (\varphi \text{ は文})\}$$

これはすなわち "数学者"T 氏に証明できる文 (のゲーデル数) 全体の集合である．

不完全性定理において決定的な役割を果たすのが次の定理である．定理の証明には「どんな証明図も有限である」ことを本質的に用いる．

定理 11

T が RE 理論ならば $Prov_T$ は半決定可能である．従ってある Σ_1 論理式 Prov_T が存在し, $Prov_T = X_{\mathsf{Prov}_T}$ となる．

証明　アイデアを述べる.

$$\ulcorner\varphi\urcorner \in Prov_T \quad\Longleftrightarrow\quad T \vdash \varphi \quad\Longleftrightarrow\quad T \text{ から } \varphi \text{ を導く証明図が存在する}$$

だから, 文 φ が与えられたとき, 右端が成り立つかどうかを半決定するプログラム Q を提示すればよい. 証明図は有限の対象だから, ゲーデル数の小さい順に

$$\pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots$$

と並べることができる. このリストを端から順に "ちょっとずつ並行的に" 調べていき, $T \vdash \varphi$ の証明図が見つかったら $Q(\ulcorner\varphi\urcorner) = 1$ とすればよい ("ちょっとずつ並行的に" を実現するには dove-tailing と呼ばれる技術を用いる). ■

$Prov_T$ を先ほど定義した集合

$$TA \;:=\; \{\ulcorner\varphi\urcorner \in \mathbb{N} : \varphi \text{ は真な文 }\}$$

と比較し, 定理 11 と定理 8 と見比べると, 不完全性現象のあらましが見えてくる. $Prov_T$ は "開集合もどき" であるが, TA はそうではない. それどころか, "閉集合もどき" でも "F_σ 集合もどき" でも "G_δ 集合もどき" でもない, もっとはるかに複雑な集合である. よって

定理 12

RE 理論 T をどのように選んでも, $Prov_T = TA$ とはならない. 従って

$$T \vdash \varphi \iff \mathbb{N} \models \varphi \qquad (\varphi \text{ は任意の文})$$

を満たす RE 理論 T は存在しない.

集合の複雑さが違うので, "人間的な" 公理系で真理の全体をぴったり特徴づけることはできないのである. このことをもって "第一不完全性" だとしても, 一般教養的な理解としてはそれほど間違っていない. しかしここで終わってしまっては, 第二不完全性定理にたどりつけない. それゆえ議論をもう少し続けることにする.

■第一不完全性定理.　まず第一歩として, 定理 9 から帰結を引き出しておく.

補題 13(Σ_1 完全性・Π_1 健全性)

T を無矛盾な $\mathbf{Q}$ の拡大とする．任意の Σ_1 文 φ について

$$\mathbb{N} \models \varphi \quad \Longrightarrow \quad T \vdash \varphi.$$

また任意の Π_1 文 ψ について

$$T \vdash \psi \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{N} \models \psi.$$

証明　前半は定理 9 より．後半については, $T \vdash \psi$ と $\mathbb{N} \not\models \psi$ を仮定する．後者より $\mathbb{N} \models \neg\psi$ である．$\neg\psi$ は Σ_1 文と等しいので, 前半より $T \vdash \neg\psi$. 定理 10 よりこれは T が矛盾することを意味するが, それは大前提に反する．■

定理 14(Π_1 不完全性)

T を $\mathbf{Q}$ の RE 拡大とすると, 次の性質を満たす Π_1 文 G_T が存在する．

$$T \text{ は無矛盾} \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{N} \models \mathsf{G}_T \text{ かつ } T \nvdash \mathsf{G}_T.$$

証明　T は無矛盾とし, そのような Π_1 文 G_T は存在しないと仮定する．すると任意の Π_1 文 ψ について

$$\mathbb{N} \models \psi \quad \Longleftrightarrow \quad T \vdash \psi$$

が成り立つ ($\Rightarrow$ 方向は仮定より．$\Leftarrow$ 方向は補題 13 より).

さて, 定理 2 に出てきた集合 $\overline{K}$ を考える．その補集合 K は半決定可能だから, 定理 7 よりある 1 変数 Π_1 論理式 $\varphi(x)$ が存在し, $\overline{K} = X_\varphi$ である．一方

$$n \in X_\varphi \iff \mathbb{N} \models \varphi(n) \iff T \vdash \varphi(n) \iff \ulcorner\varphi(n)\urcorner \in Prov_T \iff n \in f_\varphi^{-1}[Prov_T]$$

だから

$$\overline{K} = X_\varphi = f_\varphi^{-1}[Prov_T].$$

定理 11 と定理 4 により $\overline{K}$ は半決定可能になるが, これは定理 2 に反する．■

すなわちどんなに天才的な “数学者” であっても, 無矛盾であるかぎり, 真なのに証明できない文が存在する．しかもそのような文は多くの未解決予想と同じ Π_1 文である．

本来の第一不完全性定理を述べるには, あと 1 つだけ定義が必要である．理論 T が無矛盾であるとは, $T \vdash \bot$ が成り立たないことであった．一方, 理論 T が **1 無矛盾**であるとは, どんな Σ_1 文 φ についても

$$T \vdash \varphi \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{N} \models \varphi$$

となることをいう．1 無矛盾ならば当然無矛盾である ($\varphi = \bot$ とせよ).

定理 15(第一不完全性定理, Gödel 1931)

T を $\mathbf{Q}$ の RE 拡大とする．ある Π_1 文 G_T が存在し

1. T が無矛盾ならば $T \nvdash \mathsf{G}_T$.
2. T が 1 無矛盾ならば $T \nvdash \neg\mathsf{G}_T$.

証明　1. は定理 14 より．2 を示すために, T は 1 無矛盾であるとする．G_T は Π_1 文だから, その否定 $\neg\mathsf{G}_T$ は Σ_1 文に等しい．よって

$$T \vdash \neg\mathsf{G}_T \quad\Longrightarrow\quad \mathbb{N} \models \neg\mathsf{G}_T \quad\Longleftrightarrow\quad \mathbb{N} \not\models \mathsf{G}_T$$

となるが, 右端は定理 14 ($\mathbb{N} \models \mathsf{G}_T$) に反する．よって $T \nvdash \neg\mathsf{G}_T$. ■

それゆえ (1 無矛盾な) 理論 T を 1 つ固定するならば, T では証明も反証もできない文が存在する．「どんな未解決問題もいつかは解決できる」とは限らないのである．とはいえこれは理論が固定された, いわば “数学が硬直した” 状況を考えているからであり, 逆にいえば第一不完全性定理は “開かれた数学” の方向性を促しているのである．実際, 理論は

$$\mathbf{Q} \ \subseteq\ \mathbf{I\Sigma}_1 \ \subseteq\ \mathbf{PA} \ \subseteq\ \Pi^1_1\mathbf{CA}_0 \ \subseteq\ \mathbf{PA}_2 \ \subseteq\ \cdots$$

というふうにいくらでも拡大していくことができる．

「先へ, 先へ」

それが第一不完全性定理が我々に語りかけるメッセージである．

6　第二不完全性定理

本章では第二不完全性のアイデアを述べる．本来ならば数十ページ以上の議論が必要であるが, 我々には時間がない．以下の議論は**ものすごく乱暴**であるが, どうかご容赦願いたい．

■無矛盾性の形式化.　第二不完全性定理では, 無矛盾性の概念が形式系の内部で用いられる．そこでまずは無矛盾性を初等数論の文で書き表す必要がある．

T を RE 理論とする．定理 11 によれば, ある Σ_1 論理式 Prov_T が存在し, $Prov_T = X_{\mathsf{Prov}_T}$ となる[*2]．すなわち, 任意の文 φ について

$$\mathbb{N} \models \mathsf{Prov}_T(\ulcorner\varphi\urcorner) \quad\Longleftrightarrow\quad T \vdash \varphi.$$

[*2] 実際には, この性質を満たす 1 変数論理式ならばなんでもよいわけではなく, この後の議論のためには “自然に” 定義された Prov_T を 1 つ固定する必要がある．

T が無矛盾であるとは, $T \nvdash \bot$ ということであった．そこで $\mathsf{Con}_T := \neg\mathsf{Prov}_T(\ulcorner\bot\urcorner)$ と定めれば

$$\mathbb{N} \models \mathsf{Con}_T \quad\Longleftrightarrow\quad T \text{ は無矛盾である}$$

が成り立つ．すなわち文 Con_T は T の無矛盾性を表す.

■**決定的なステップ**． T を $\mathbf{Q}$ の RE 拡大とする．定理 14 によれば, ある文 G_T が存在し

$$T \text{ は無矛盾} \quad\Longrightarrow\quad \mathsf{G}_T \text{ は真} \tag{1}$$

が成り立つ.

この文 G_T は具体的に構成することができ, **ゲーデル文**と呼ばれる．しかも, である．ここが決定的に重要なのだが, これまで第一不完全性を導出する過程において, 難しい数学は一切用いてこなかった．ゆえに中高生レベルであれば十分に理解可能である．ということは,

中高生レベルの数学者である $\mathbf{I\Sigma_1}$ 氏は (1) を証明できるはずだ！

そこで実際に (1) を $\mathbf{I\Sigma_1}$ 氏に**証明させてみる**．この試みはうまくいき, 次のことが得られる.

補題 16

T を $\mathbf{I\Sigma_1}$ の RE 拡大とすると,

$$T \vdash \mathsf{Con}_T \to \mathsf{G}_T. \tag{2}$$

このことを定理 14 の「T が無矛盾ならば $T \nvdash \mathsf{G}_T$」と組み合わせる．そうすると第二不完全性定理が得られる[*3].

定理 17(第二不完全性定理, Gödel 1931)

T を $\mathbf{I\Sigma_1}$ の RE 拡大とする．もしも T が無矛盾ならば $T \nvdash \mathsf{Con}_T$．すなわち, $\mathbf{I\Sigma_1}$ の RE 拡大は, 無矛盾である限り自分が無矛盾であることを証明できない.

(2) は (1) の形式化になっていることを再度強調しておく．このように, 我々人間がすでに証明した事柄を形式的な数学者たる T 氏に再度証明させ直す．これが第二不完全性のクライマックスであり, ゲーデルの天才性が発揮された最たる瞬間である．蛇足であるが, フォン・ノイマンも第一不完全性定理を知った後, 独力で第二不完全性定理に到達している (とはいえ先行権は間違いなくゲーデルにある).

これをきっかけとして, フォン・ノイマンはそれまで取り組んでいた数学基礎論からすっぱり足を洗った．その後の量子力学, 作用素環論やゲーム理論等における大活躍は周知のとおりである.

[*3] 念のため, 以下のことを再度強調しておく．第二不完全性定理が成り立つためには, Prov_T は “自然に” 定義され, いわゆる**可導性条件**が満たされている必要がある.

もちろん数学基礎論にとどまったゲーデルも, その後の活躍は目覚ましい. やがて数年後に “遅れてきた天才”・若きゲンツェンが登場し, 第二不完全性定理にアンチテーゼをたたきつける. 彼の仕事はプログラミング言語の論理的基礎 (カリー・ハワード対応) の一部となり, 20 世紀後半のコンピュータ科学へと受け継がれていく. コンピュータといえば, コンピュータの父チューリング (映画『イミテーション・ゲーム』を見よ) も, 当然ながらゲーデルに影響を受けている. コンピュータが誕生する遠因になったといっても, あながち不当ではない.

ゲーデルの不完全性定理は, そんなふうにして歴史を動かす原動力にもなったのである.