「代数学入門」入門としての普遍代数学

京都大学数理解析研究所・照井一成

1　はじめに

本講義は**普遍代数学** (universal algebra) への入門を企図している. 普遍代数学とは何か? この問いに答えるのは難しい. なぜなら普遍代数学はそこまで「普遍」ではないし,「代数学」と呼ぶには華々しさに欠くきらいがあるからである. 実際, ふつうの教科書に出てくる代数構造の中で (伝統的な) 普遍代数学の対象になるのは, 群, 環, 加群, 多元環や束に毛がはえた程度である. その分コンピュータ科学や非古典論理に出てくる "ファンシーな" 構造を扱うには長けているのだが, それを「代数学」と呼ぶのはフードコートをレストランと呼ぶのに似ていなくもない (ちなみに筆者はどちらも好きである). どうやって説明したものかと悩んだのだが, 1 つ言えるのは, 普遍代数学は出発点が (ある程度) 無前提だということである. いわば「**ゼロからはじめる代数学**」というのが一番実情に近いように思われる.

ふつう代数学の講義では, 群や環など特定の構造を定めて, そこから話を始める. ということは加法・乗法・単位元といった「演算の種類・個数」がすでに定まっており, 結合則・分配束などの「公理」をあらかじめ前提とするということである. 普遍代数学では, この第一前提を取り払う. 曰く「代数」とは, 単に台集合 A と A 上の演算族の組にすぎない. そのような「代数」たちについて, 一般論の見地から何がいえるのかを問題にするのである.

だが, 概して一般論は空虚になりがちである (ちょうどこの文がそうであるように). 本当に無前提の立場から何かが言えるのだろうか? 難しいところだが, 少なくとも皆無ではない. たとえば「準同型定理」が個別の代数構造によらない一般的な事象なのは明らかである.「自由代数」や「単純代数」などもそうである. また, 代数を分解する際に直積だけにこだわっているとさまざまな制約があるので, 無前提に適用できる別の分解方法,「準積分解」を考えようという発想も出てくる. 最後に,「代数のクラスを公理で定めることと, 準同型像・部分代数・直積で生成することは同じである」という Birkhoff の定理 (1935) がある. これも個別の代数構造によらない定理であり, 普遍代数学の起源であるといってよい.

とはいえ,「代数」一般についていえることはやはり限られている. ひとたび基礎を整えたら, あとはいろいろな追加条件を課したり, 語の問題や制約充足問題のように計算可能性・計算複雑性に特化したり, あるいはさらなる一般化・抽象化を通して, より広い研究分野との融合を果たしたりする. たとえばモデル理論やオペラド理論, 圏論的な代数理論 (Lawvere 理論, モナドの理論) はある意味で普遍代数学の発展形とみなすことができる. そこまでいくと本当に面白い話題がでてくるのだが, 残念ながら本稿で取り扱うのは基礎中の基礎, Birkhoff の定理までである.

「ゼロからはじめる代数学」は, とても歩みが遅い. RPG でいえば最初の村近辺でウロウロしているようなものである. それでも可能な限り無前提の立場で, "ひのきのぼう" だけを頼りに戦ってみることには一定の教育的価値があるように思われる.

伝統的な普遍代数学の教科書としては, [3, 2, 4, 1] などが挙げられるが, 本稿は特に [1] を大いに参考にした. 日本語で書かれた解説がほとんどないので, 専門用語の訳出を独自に試みた (たとえば variety を「多様クラス」と訳したり, subdirect product を「準積」と訳したり). ただこれらは試験的なものにすぎないので, 異論は認める. ここに書いた分でだいたい 2.5 コマ分くらいである. 本講義の後半では, もう少し進んだ事柄について話したいと思っている.

2 「代数」とは?

X を集合とする. X 上の**演算** (operation) とは, 関数 $f : X^n \to X$ $(n \geq 0)$ のことである. n を f の**項数** (arity) という. $n = 0$ のとき f を**定数**という. 普遍代数学における**代数**とは, 空でない集合 A と A 上の演算族の組のことである.

$$\mathbf{A} = \langle A, \{f_i\}_{i \in I} \rangle$$

慣習として, 代数 $\mathbf{A}$ と台集合 A をフォントを変えて区別する.

例えば, 群 $\mathbf{G} = \langle G, \cdot, ^{-1}, e \rangle$ や環 $\mathbf{R} = \langle R, +, -, 0, \cdot \rangle$ は代数の例である. 次章で説明する束やブール代数なども代数である. 環 $\mathbf{R}$ を固定したときの左 $\mathbf{R}$ 加群も $\mathbf{M} = \langle M, +, -, 0, \{f_a\}_{a \in R} \rangle$ と書けるので, 代数である ($f_a : M \to M$ は a の作用). ゆえにベクトル空間は代数であり, その上に乗算を加えて得られる多元環や (作用素環論の意味での) 代数も代数である. 一方でノルムを伴う C^* 環はここでは対象外である.

代数単体ではなく, 群全体, 環全体のように代数のクラスを取り扱う場合には, もう少し別の表示を与えておくと便利である. いま, 記号からなる集合 F (無限集合でもよい) が与えられており, 各記号 $\mathsf{f} \in F$ に**項数** $ar(\mathsf{f}) \geq 0$ が割り当てられているとする. 組 $\tau := \langle F, ar \rangle$ を**類型** (similarity type) という.

定義 2.1. $\tau = \langle F, ar \rangle$ を類型とする. τ **代数**とは, 空でない集合 A と A 上の演算族の組 $\mathbf{A} = \langle A, \{\mathsf{f}^{\mathbf{A}}\}_{\mathsf{f} \in F} \rangle$ で, 各 $\mathsf{f}^{\mathbf{A}}$ の項数が $ar(\mathsf{f})$ により与えられるものである.

たとえば, 群の類型 τ_G は 3 つの記号 $\cdot, ^{-1}, e$ からなり, それぞれの項数は $2, 1, 0$ である. 台集合を定め, 記号に具体的な演算を割り当てて $\mathbf{G} = \langle G, \cdot^{\mathbf{G}}, (^{-1})^{\mathbf{G}}, e^{\mathbf{G}} \rangle$ としたものが個別の群である.

圏論的なアプローチでは, 類型を (適当な圏 $\mathcal{C}$ 上の) 関手 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ として捉え, F 代数を圏 $\mathcal{C}$ の対象 A (“台集合”) と射 $g : F(A) \to A$ の組で与える. たとえば群の場合 $\mathcal{C}$ は集合の圏, $F(A) := A^2 + A^1 + A^0$ である. ここで $\mathcal{C}$ を位相空間の圏に変えれば位相群が扱える. 適当な多様体の圏に変えればリー群も視野に入れられる. このほうが汎用性が高いが, 本稿ではあえて伝統的なアプローチにのっとって話を進めることにする.

同じ類型をもつ代数は**同類** (similar) であるという. 群たちはみな同類だが, 群でないものたちもたくさん同類に含まれる. そこで一般には同類の代数の一部からなるクラスを考え, 他を切り捨てることになる. 約束として, 今後代数のクラスを考えるときには**同類の**代数からなるクラスのみを考え, 代数間の写像も**同類の**代数間に限って考えることにする.

環の中には, ただ 1 点 $0 = 1$ のみからなるもの (零環) がある. このようなつまらない例は除外して考えたいことがしばしばある. 一般に代数 $\mathbf{A}$ は, その台集合 A が 1 点のみからなるとき**自明**であるという.

次に写像の定義に進もう.

定義 2.2. $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ を類型 $\tau = \langle F, ar \rangle$ の代数とする. 関数 $h : A \to B$ が各 $\mathsf{f} \in F$ と $a_1, \ldots, a_n \in A$ $(n = ar(\mathsf{f}))$ について

$$h(\mathsf{f}^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = \mathsf{f}^{\mathbf{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n))$$

を満たすとき, $\mathbf{A}$ から $\mathbf{B}$ への**準同型** (写像) といい, $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ と書く.

記号が煩雑なので, これからは要素の列 $a_1, \ldots, a_n$ を $\boldsymbol{a}$ であらわすことにしよう. また, 2 つの列 $\boldsymbol{a} = a_1, \ldots, a_n$ と $\boldsymbol{b} = b_1, \ldots, b_n$ について $h(a_1) = b_1, \ldots, h(a_n) = b_n$ が成り立つとき $\boldsymbol{a} \overset{h}{\mapsto} \boldsymbol{b}$ と書くことにしよう. すると $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ とは

$$\boldsymbol{a} \overset{h}{\mapsto} \boldsymbol{b} \implies \mathsf{f}^{\mathbf{A}}(\boldsymbol{a}) \overset{h}{\mapsto} \mathsf{f}^{\mathbf{B}}(\boldsymbol{b})$$

がすべての $\mathsf{f} \in F$ について成り立つということに他ならない.

準同型 $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ が集合上の関数として単射, 全射, 全単射のとき, h のことを**単準同型** (または**埋め込み**), **全準同型**, **同型写像** (または**同型**) という. 以下の記法を用いる.

$$\begin{array}{ll} h : \mathbf{A} \to \mathbf{B} & (\text{準同型}) \\ h : \mathbf{A} \rightarrowtail \mathbf{B} & (\text{単準同型}) \\ h : \mathbf{A} \twoheadrightarrow \mathbf{B} & (\text{全準同型}) \\ h : \mathbf{A} \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathbf{B} & (\text{同型写像}) \end{array}$$

また, $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ の間に同型写像があるとき, $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$ と書く.

さて, 代数と準同型が定まれば, 次に待っているのは準同型定理である. 大学の講義では一瞬で通り過ぎてしまう基礎中の基礎であるが, ここではあえて立ち止まってじっくり考えてみたい.

3 順序集合と束

まずは順序集合についての基礎事項をまとめておく.

定義 3.1. **前順序集合** (preordered set) $\mathbf{L} = \langle L, \sqsubseteq \rangle$ とは集合 L と L 上の 2 項関係 $\sqsubseteq$ の組で

$$\begin{array}{ll} a \sqsubseteq a & (\text{反射性}) \\ a \sqsubseteq b \text{ かつ } b \sqsubseteq c \implies a \sqsubseteq c & (\text{推移性}) \end{array}$$

を満たすもののことである. 関係 $\sqsubseteq$ が

$$a \sqsubseteq b \text{ かつ } b \sqsubseteq a \implies a = b \qquad (\text{ 反対称性})$$

を満たすとき, $\mathbf{L}$ を**半順序集合**といい, さらに

$$a \sqsubseteq b \text{ または } b \sqsubseteq a$$

を満たすとき**全順序集合**という.

前順序集合 $\mathbf{L}$ が与えられたとき,

$$a \sim b \iff a \sqsubseteq b \text{ かつ } b \sqsubseteq a$$

と定めれば $\sim$ は同値関係になる. 各要素 $a \in L$ の同値類 $[a]$ からなる集合を $L/{\sim}$ とし, 2 項関係 $\leq$ を

$$[a] \leq [b] \iff a \sqsubseteq b$$

により定めれば, $\mathbf{L}/{\sim} := \langle L/{\sim}, \leq \rangle$ は半順序集合となる.

たとえば $\mathbb{C}$ を複素数全体の集合とする. 関係 $z_1 \sqsubseteq z_2$ を $|z_1| \leq |z_2|$ により定めれば, $\mathbf{C} := \langle \mathbb{C}, \sqsubseteq \rangle$ は前順序集合になる. このとき $\mathbf{C}/{\sim}$ は非負実数の半直線 $\langle \mathbb{R}_{\geq 0}, \leq \rangle$ に等しい.

このように同値類で割れば前順序集合はすべて半順序集合に帰着するのだが, 場合によっては割らずにそのまま扱ったほうが自然なこともある. そこで前順序集合間の同等性を以下のように定義する.

定義 3.2. $\mathbf{L} = \langle L, \sqsubseteq \rangle$, $\mathbf{M} = \langle M, \preceq \rangle$ を前順序集合とする. $\mathbf{L}$ と $\mathbf{M}$ が**前同型**であるとは, 関数 $g : L \to M$ と $h : M \to L$ が存在し,

$$g(a) \preceq x \iff a \sqsubseteq h(x), \qquad hg(a) \sim a, \qquad gh(x) \sim x$$

がすべての $a \in L$, $x \in M$ について成り立つことである. このとき $\mathbf{L} \simeq \mathbf{M}$ と書く.

要は $\mathbf{L}$, $\mathbf{M}$ を圏とみたときに圏同値になるということだ. 上の定義は対称的で見栄えがよいが, やや使いにくい. 実際には, 次の同値な定義のほうが便利である.

補題 3.3

$\mathbf{L} \simeq \mathbf{M}$ となるための必要十分条件は, 関数 $g : L \to M$ が存在し,

$$a \sqsubseteq b \iff g(a) \sqsubseteq g(b) \qquad (a, b \in L)$$

かつ任意の $x \in M$ に対して $g(a) \sim x$ を満たす $a \in L$ が存在することである.

なお $\mathbf{L} \simeq \mathbf{L}/{\sim}$ は当然成り立つ. また $\mathbf{L}$, $\mathbf{M}$ がともに半順序集合のとき, $\mathbf{L} \simeq \mathbf{M}$ は両者が順序同型であるというのと同じである.

ここで数学基礎論的な事柄についてひとつ注意をしておく. 集合だけでなく, あまりにも大きすぎて集合とはみなせないような集まりのことも含めるときには**クラス**という. たとえば集合全部の集まりは集合ではないがクラスではある. 前順序集合の定義で「集合」を「クラス」に変えたものを**前順序クラス**という. 次章以降に登場するが, いずれも半順序集合と前同型になるので本稿に関する限り集合とクラスの区別はあまり気にしなくてよい.

以下, 半順序集合に限定して話を進める.

定義 3.4. $\mathbf{L}$ を半順序集合とする. 部分集合 $X \subseteq L$ の**上限**・**下限**とは, 以下を満たす要素 $\bigvee X, \bigwedge X \in L$ のことである.

$$\begin{aligned} a \leq \bigwedge X &\iff \text{すべての } x \in X \text{ について } a \leq x \\ \bigvee X \leq a &\iff \text{すべての } x \in X \text{ について } x \leq a \qquad (a \text{ は } L \text{ の任意の要素}) \end{aligned}$$

任意の 2 元 $a, b \in L$ が上限 $a \vee b := \bigvee\{a, b\}$ と下限 $a \wedge b := \bigwedge\{a, b\}$ を持つとき, $\mathbf{L}$ を**束** (lattice) という. 束 $\mathbf{L}$ は, 最小元 $\bot$, 最大元 $\top$ を持つとき**有界** (bounded) であるといい, どんな $X \subseteq A$ にも上限・下限があるとき**完備**であるという.

$\bot = \bigwedge L$, $\top = \bigvee L$ であるから, 完備束は有界である. また, 半順序集合 $\mathbf{L}$ においてすべての $X \subseteq L$ に下限があれば, どんな $Y \subseteq L$ にも上限

$$\bigvee Y \ := \ \bigwedge\{x : \text{すべての } y \in Y \text{ について } y \leq x\}$$

があるので $\mathbf{L}$ は完備束である.

束は代数とみなすこともできる. 実際, どんな束も以下の各等式を満たす.

$$\begin{array}{ll} a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c & \qquad a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c \\ a \wedge b = b \wedge a & \qquad a \vee b = b \vee a \\ a \wedge a = a & \qquad a \vee a = a \\ a \wedge (a \vee b) = a & \qquad a \vee (a \wedge b) = a \end{array}$$

逆に上の等式を満たす代数 $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee \rangle$ が与えられたら, $a \leq b \iff a \wedge b = a \iff a \vee b = b$ と定めることにより $\langle L, \leq \rangle$ は束になる.

上の等式からもわかるとおり, 束は自己双対的である. つまり束 $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee \rangle$ の順序をひっくり返して $\mathbf{L}^{op} := \langle L, \vee, \wedge \rangle$ としてもやはり束である.

束の中で**分配則**

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c), \qquad a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

を満たすものを**分配束**という. ちなみに上の等式は, 一方が成り立てば他方も同時に成り立つ. 例を 2 つ挙げておく.

- 全順序集合はすべて分配束とみなせる. たとえば $\langle \mathbb{R}, \min, \max \rangle$ が例である. ただし $\mathbb{R}$ には最大元・最小元がないので完備束ではない (条件付き完備束とよばれる). 重要な例：2 元のみからなる全順序集合 $\{0 < 1\}$ を束とみなし, これを $\mathbf{2}$ と書く.
- 集合 X のべき集合 $\wp(X)$ は演算 $\cap, \cup$ について閉じているので完備分配束 $\mathbf{P}(X) := \langle \wp(X), \cap, \cup \rangle$ とみなせる. 一般に $\wp(X)$ の部分族で $\cap, \cup$ について閉じているものはすべて分配束である (逆にどんな分配束もそのような形で表現できることを後で示す).

与えられた束が分配束かどうかは局所的に判定することができる. 以下に同値な条件を与えておく. まず, 任意の束 $\mathbf{L}$ 上で**多数決関数** (majority function) を 2 つ定める.

$$\begin{array}{lcl} \mathsf{maj}(x, y, z) & := & (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z), \\ \mathsf{maj}^{op}(x, y, z) & := & (x \vee y) \wedge (x \vee z) \wedge (y \vee z). \end{array}$$

すると任意の $a, b \in L$ について

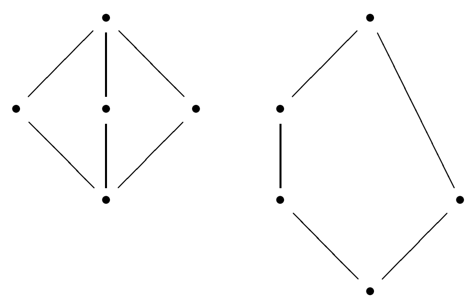
$$\mathsf{maj}(a, a, b) = \mathsf{maj}(a, b, a) = \mathsf{maj}(b, a, a) = a$$

が成り立つ. 自己双対性から maj^{op} についても同じことがいえる.

定理 3.5

任意の束 $\mathbf{L}$ について, 以下 3 つの条件は同値である.

1. $\mathbf{L}$ は分配束である.
2. $\mathbf{L}$ 上で $\mathsf{maj} = \mathsf{maj}^{op}$ が成り立つ.
3. 以下の 2 束は $\mathbf{L}$ に埋め込めない.



4 代数の二 "束" 面

群が与えられたら, その部分群と正規部分群を考えるのは自然である. 同様に, 環が与えられたら部分環とイデアルを考えるし, ベクトル空間が与えられたらその部分空間を考える. このことを一般化しよう. どんな代数にも, 2 つの束が自然に対応する. 一方は部分台束, 他方は合同束である. まずは簡単なほう, 部分台束からはじめよう.

$\mathbf{A} = \langle A, \{\mathsf{f}^{\mathbf{A}}\}_{f\in F}\rangle$ を代数とする. $\mathbf{A}$ を終域とする単準同型 $g : \mathbf{B} \rightarrowtail \mathbf{A}$ 全体のクラスを考え, これを $Inj(\mathbf{A})$ と置く. $g, h \in Inj(\mathbf{A})$ のとき, 次の図を可換にする k があるとすれば, それは単準同型であり, ただ一つに定まる.

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{A} & \\ \mathbf{B} \arrow[ur, tail, "g"] \arrow[rr, "k"'] & & \mathbf{C} \arrow[ul, tail, "h"'] \end{tikzcd}$$

このとき $g \sqsubseteq h$ と定めれば, $\mathbf{Inj}(\mathbf{A}) := \langle Inj(\mathbf{A}), \sqsubseteq\rangle$ は前順序クラスになる. 厳密にいえばこれは集合ではないので, 少々扱いにくい. そこで $\mathbf{Inj}(\mathbf{A})$ に別の表現を与えることを考える.

台集合の部分集合 $X \subseteq A$ がすべての演算について閉じているとき, A の**部分台集合** (subuniverse) という. つまり,

$$\boldsymbol{a} \in X \implies \mathsf{f}^{\mathbf{A}}(\boldsymbol{a}) \in X$$

がすべての $\mathsf{f} \in F$ と (適当な長さの) すべての列 $\boldsymbol{a} \in A$ について成り立つときである.

$\mathbf{A}$ の部分台集合全体からなる集合を $Sub(\mathbf{A})$ と書く. $Sub(\mathbf{A})$ は共通部分 $\bigcap$ について閉じている. つまり,

$$\text{すべての } i \in I \text{ について } X_i \in Sub(\mathbf{A}) \implies \bigcap_{i\in I} X_i \in Sub(\mathbf{A}).$$

それゆえ演算 $\vee$ を $X \vee Y := \bigcap\{Z \in Sub(\mathbf{A}) : X \cup Y \subseteq Z\}$ で定めれば,

$$\mathbf{Sub}(\mathbf{A}) := \langle Sub(\mathbf{A}), \cap, \vee \rangle$$

は完備束になる. これを $\mathbf{A}$ の**部分台束** (subuniverse lattice) という. この束から (もしあれば) 空集合を取り除いて得られる半順序集合を $\mathbf{Sub}^{-}(\mathbf{A})$ とする.

$X \in Sub(\mathbf{A})$ が空でないとき, $\mathbf{A}$ の演算を部分台集合 X に制限すれば, $\mathbf{A}$ の**部分代数** $\mathbf{A}\restriction X$ と自然な単準同型 $\iota_X : \mathbf{A}\restriction X \rightarrowtail \mathbf{A}$ が得られる. もちろんこれは部分群や部分環, 部分加群などの一般化である.

一方で準同型 $h : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ が与えられたとき, h の**像** $\mathrm{Im}(h) := \{h(b) : b \in B\}$ を考えれば, これは $\mathbf{A}$ の部分台集合となる.

明らかに $X \subseteq Y \iff \iota_X \leq \iota_Y$ が成り立つ. またどんな $h \in Inj(\mathbf{A})$ についても $X := \mathrm{Im}(h)$ とおけば $\iota_X \sim h$ である. ゆえに補題 3.3 より次が帰結する.

定理 4.1

任意の代数 $\mathbf{A}$ について $\mathbf{Inj}(\mathbf{A}) \simeq \mathbf{Sub}^{-}(\mathbf{A})$.

次に代数の別 "束" 面に話を移す. $\mathbf{A}$ を始域とする全準同型 $g : \mathbf{A} \twoheadrightarrow \mathbf{B}$ 全体のクラスを考え, これを $Surj(\mathbf{A})$ と置く. $g, h \in \mathbf{A}$ のとき, 次の図を可換にする k があれば, それは全準同型であり, ただ一つに定まる.

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{A} \arrow[dl, "g"'] \arrow[dr, "h"] & \\ \mathbf{B} \arrow[rr, "k"] & & \mathbf{C} \end{tikzcd}$$

このとき $g \sqsubseteq h$ と定めれば, $\mathbf{Surj}(\mathbf{A}) := \langle Surj(\mathbf{A}), \sqsubseteq \rangle$ は前順序クラスになる. $\mathbf{Surj}(\mathbf{A})$ の "最小元" は同型写像 $h : \mathbf{A} \twoheadrightarrow \mathbf{B}$ たちであり, "最大元" は自明な代数への全準同型たちである.

この $\mathbf{Surj}(\mathbf{A})$ にも別の表示を与えたい. $\mathbf{A}$ が群の場合には $\mathbf{A}$ の正規部分群からなる束が自然に対応するのだが, 一般の場合にはもう少し面倒な道具立てが必要になる. 集合 A 上の同値関係 $\theta \subseteq A \times A$ で, $\mathbf{A}$ の演算について閉じているものを $\mathbf{A}$ 上の**合同関係** (congruence) という. つまり,

$$\boldsymbol{a}\ \theta\ \boldsymbol{b} \implies \mathsf{f}^{\mathbf{A}}(\boldsymbol{a})\ \theta\ \mathsf{f}^{\mathbf{A}}(\boldsymbol{b})$$

がすべての $\mathsf{f} \in F$ について成り立つような同値関係のことである.

$\mathbf{A}$ 上の合同関係全体からなる集合を $Con(\mathbf{A})$ と書く. $Con(\mathbf{A})$ は共通部分 $\bigcap$ について閉じている. それゆえ演算 $\vee$ を自然に定めれば,

$$\mathbf{Con}(\mathbf{A}) := \langle Con(\mathbf{A}), \cap, \vee \rangle$$

は完備束になる. これを $\mathbf{A}$ の**合同束** (congruence lattice) という. この束の最小元は対角線 $\Delta := \{(a, a) : a \in A\}$ であり, 最大元は $\nabla := \{(a, b) : a, b \in A\}$ である.

$\mathbf{G}$ が群のとき, $\mathbf{Con}(\mathbf{G})$ は正規部分群全体からなる束と同型である. 同様に環の場合には (両側) イデアル全体が, 加群の場合には部分加群全体が対応する. よって最後の場合 $\mathbf{Sub}(\mathbf{M}) \cong \mathbf{Con}(\mathbf{M})$ となる.

準同型 $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ が与えられたとき, その核を

$$\mathsf{Ker}(h) := \{(a,b) \in A^2 : h(a) = h(b)\}$$

と定めると, $\mathbf{A}$ 上の合同関係が得られる. h が単準同型であるとは, $\mathsf{Ker}(h) = \Delta$ ということに他ならない.

逆に合同関係 $\theta \in Con(\mathbf{A})$ が与えられたとき,

$$\begin{array}{lcll} a/\theta & := & \{b \in A : a\ \theta\ b\} & (a\ \text{の同値類}) \\ A/\theta & := & \{a/\theta : a \in A\} & (A\ \text{の商集合}) \end{array}$$

と定め, さらに各 $\mathsf{f} \in F$ と $a_1, \dots, a_n \in A (n = ar(\mathsf{f}))$ について

$$\mathsf{f}^{\mathbf{A}/\theta}(a_1/\theta, \dots, a_n/\theta) \ := \ \mathsf{f}^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n)/\theta$$

とすると, これはうまく定義されており, **剰余代数**と自然な全準同型

$$\mathbf{A}/\theta \ := \ \langle A/\theta, \{\mathsf{f}^{\mathbf{A}/\theta}\}_{\mathsf{f} \in F}\rangle, \qquad \rho_\theta : \mathbf{A} \twoheadrightarrow \mathbf{A}/\theta$$

が得られる. $\rho_\theta(a) = \rho_\theta(b) \iff a\ \theta\ b$ が成り立つので, $\mathsf{Ker}(\rho_\theta) = \theta$ である. $\mathbf{A}/\theta$ と ρ_θ は以下の普遍性により特徴づけられる.

補題 4.2

$\theta \in \mathbf{Con}(\mathbf{A})$ とする. 準同型 $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ が $\theta \subseteq \mathsf{Ker}(h)$ を満たすとき, 次の図を可換にする準同型 k がただ 1 つ存在する.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\rho_\theta"'] & \mathbf{B} \\ \mathbf{A}/\theta \arrow[ur, "k"] & \end{tikzcd}$$

いま, 2 つの合同関係 $\theta, \varphi \in \mathbf{Con}(\mathbf{A})$ が $\theta \subseteq \varphi$ を満たすとする. $\mathsf{Ker}(\rho_\varphi) = \varphi \supseteq \theta$ なので, $h := \rho_\varphi$ に上の補題が適用できて $\rho_\theta \sqsubseteq \rho_\varphi$ が得られる. 逆に $\rho_\theta \sqsubseteq \rho_\varphi$ のとき, 図

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{A} \arrow[dl, "\rho_\theta"'] \arrow[dr, "\rho_\varphi"] & \\ \mathbf{A}/\theta \arrow[rr, two heads] & & \mathbf{A}/\varphi \end{tikzcd}$$

を眺めれば $\theta \subseteq \varphi$ がわかる. つまり写像 $\theta \mapsto \rho_\theta$ は順序を保存する.

さて補題 4.2 で $\theta = \mathsf{Ker}(h)$ とおいた場合が教科書にでてくる準同型定理である.

定理 4.3 (準同型定理)

準同型 $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ が与えられたとき, $\theta := \mathsf{Ker}(h)$, $X := \mathsf{Im}(h)$ とおくと, 次の図を可換にする同型写像 k が存在する.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\rho_\theta"'] & \mathbf{B} \\ \mathbf{A}/\theta \arrow[r, tail, two heads, "k"] & \mathbf{B}{\restriction}X \arrow[u, tail, "\iota_X"'] \end{tikzcd}$$

とくに h が全準同型なら $X = \mathsf{Im}(h) = B$ なので, $\mathbf{A}/\theta \cong \mathbf{B}$ となる. つまりどんな $h \in Surj(\mathbf{A})$ についても $\rho_\theta \sim h$ となる. 以上から補題 3.3 により次が帰結する.

定理 4.4

任意の代数 $\mathbf{A}$ について $\mathbf{Surj}(\mathbf{A}) \simeq \mathbf{Con}(\mathbf{A})$.

準同型定理が, ベクトル空間の場合の次元定理につながるのは既知の通りである. ちなみにベクトル空間 $\mathbf{V}$ の次元とは $\mathbf{Sub}(\mathbf{V}) \cong \mathbf{Con}(\mathbf{V})$ の "高さ" のことである.

さて, 代数学で準同型定理の次に出てくるのは, 一連の同型定理である. まずは次のものについて考えよう. G を群とし, M, N を $M \subseteq N$ なる正規部分群とすると $G/N \cong (G/M)/(N/M)$ が成り立つ. 同じことは任意の代数に一般化しても成り立つだろうか? 「正規部分群」を「合同関係」に置き換えれば成り立つ, というのが結論である.

まずは補題を 1 つ準備しよう. 群論ではおなじみのものである.

補題 4.5

全準同型 $h : \mathbf{A} \twoheadrightarrow \mathbf{B}$ と $\psi \in \mathbf{Con}(\mathbf{A})$, $\varphi \in \mathbf{Con}(\mathbf{B})$ が与えられ, $a \ \psi \ b \Leftrightarrow h(a) \ \varphi \ h(b)$ が成り立つとする $(a, b \in A)$. このとき

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, two heads, "h"] \arrow[d, "\rho_\psi"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "\rho_\varphi"'] \\ \mathbf{A}/\psi \arrow[r, tail, two heads, "k"] & \mathbf{B}/\varphi \end{tikzcd}$$

を満たす同型写像 k が存在する.

実際, 条件により $\mathsf{Ker}(\rho_\varphi \circ h) = \psi$ となるので, あとは準同型定理を用いればよい.

次に記法である. $\mathbf{L}$ を前順序集合 (クラス), $a \in L$ をその要素とする. このとき台集合を $L_{\sqsupseteq a} := \{b \in L : b \sqsupseteq a\}$ に制限することで部分前順序 $\mathbf{L}_{\sqsupseteq a}$ が得られる. $\mathbf{L}_{\sqsubseteq a}$ も同様に定義できる. $\mathbf{L}$ が束ならば $\mathbf{L}_{\sqsupseteq a}$ と $\mathbf{L}_{\sqsubseteq a}$ は部分束になる.

さて $\mathbf{A}$ を任意の代数とし, $\theta \in \mathbf{Con}(\mathbf{A})$ とする. このとき次の前同型性が成り立つ.

$$\mathbf{Con}(\mathbf{A})_{\geq \theta} \ \simeq \ \mathbf{Surj}(\mathbf{A})_{\sqsupseteq \rho_\theta} \ \simeq \ \mathbf{Surj}(\mathbf{A}/\theta) \ \simeq \ \mathbf{Con}(\mathbf{A}/\theta).$$

このうち, 最初と最後の $\simeq$ はすでに示したことから明らかである. 真ん中の $\simeq$ は以下の図

を眺めてみればわかる.

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{A} \arrow[dl, two heads, "\rho_\theta"'] \arrow[dr, two heads, "h"] & \\
\mathbf{A}/\theta \arrow[rr, two heads, "k"] & & \mathbf{B}
\end{tikzcd}
$$

これを見れば $h \in \mathbf{Surj}(\mathbf{A})_{\exists\rho_\theta}$ と $k \in \mathbf{Surj}(\mathbf{A}/\theta)$ が一対一に対応するのがわかるだろう.

さて, 上の同型対応によれば $\psi \in \mathbf{Con}(\mathbf{A})_{\geq\theta}$ に対して何らかの $\varphi \in \mathbf{Con}(\mathbf{A}/\theta)$ が対応するはずである. 具体的に計算してみると

$$\varphi \ = \ \psi/\theta \ = \ \{(a/\theta, b/\theta) : a\ \psi\ b\}$$

となる. すると $\theta \subseteq \psi$ に注意すれば $(a, b) \in\psi \Leftrightarrow (a/\theta, b/\theta) \in(\psi/\theta)$ がいえて補題 4.5 が使える. よって次のことが帰結する.

定理 4.6 (同型定理)

$\mathbf{A}$ を代数とし, $\theta \in \mathbf{Con}(\mathbf{A})$ とする. このとき写像 $\psi \mapsto \psi/\theta$ によって左下の同型性が与えられる. 対応する合同関係で $\mathbf{A}$ と $\mathbf{A}/\theta$ を割ると同型になる. つまり右下も成り立つ.

$$\mathbf{Con}(\mathbf{A})_{\geq\theta} \ \cong \ \mathbf{Con}(\mathbf{A}/\theta), \qquad \mathbf{A}/\psi \ \cong \ (\mathbf{A}/\theta)/(\psi/\theta).$$

別の形の同型定理 (群の場合の $HN/N \cong H/(H \cap N)$) については, 簡単に結果だけ述べるとする. $\mathbf{A}$ を代数とし, $B \in Sub^{-}(\mathbf{A})$, $\theta \in Con(\mathbf{A})$ とすると, 新たな部分台集合・合同関係が次のようにして得られる.

$$
\begin{array}{lll}
B\theta & := & \{a \in A : \text{ある } b \in B \text{ について } a\ \theta\ b\} \quad \in Sub^{-}(\mathbf{A}), \\
\theta{\restriction}B & := & \theta \cap B^2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\ \in Con(\mathbf{B}).
\end{array}
$$

2 つの部分台集合 B, $B\theta$ を θ の制限で割って得られる代数同士が同型になるというのが以下の定理の主旨である.

定理 4.7 (同型定理 2)

代数 $\mathbf{A}$ と $B \in Sub^{-}(\mathbf{A})$, $\theta \in Con(\mathbf{A})$ について次の同型性が成り立つ.

$$(\mathbf{B}\theta)/\theta' \ \cong \ \mathbf{B}/(\theta{\restriction}B).$$

ただし $\theta' := \theta{\restriction}(B\theta)$.

5 直積から準積へ

前章では $\mathbf{Inj}(\mathbf{A}) \simeq \mathbf{Sub}^{-}(\mathbf{A})$, $\mathbf{Surj}(\mathbf{A}) \simeq \mathbf{Con}(\mathbf{A})$ という 2 つの前同型を中心に話を進めてきた. 前者は素直な対応なのでよいとして, 後者についてはひとつ疑問がある. $\mathbf{Surj}(\mathbf{A})$ は束と前同型であるというが, 2 つの全準同型 $g, h \in \mathbf{Surj}(\mathbf{A})$ を取ってきたとき, その “下限”$g \wedge h$ とは一体なんだろうか? もちろん前同型対応に素直に従えば, $\theta := \mathsf{Ker}(g) \cap \mathsf{Ker}(h)$ とおいて $\rho_\theta : \mathbf{A} \twoheadrightarrow \mathbf{A}/\theta$ とすれば下限が得られるのだが, これでは答えになっていない. 本

章ではこの問いを中心に話を進める. まずは誰でもよく知っている直積から始めよう.

どんな代数 $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ からも直積 $\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2$ をつくることができる (ただし体の直積は体にならないことに注意). 各成分 $\mathbf{A}_i$ への自然な全準同型を $\pi_i : \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 \twoheadrightarrow \mathbf{A}_i$ とし, $\theta_i := \mathsf{Ker}(\pi_i)$ とおく. すると $\theta_1, \theta_2 \in \mathbf{Con}(\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2)$ であり,

(i) $\theta_1 \cap \theta_2 = \Delta$,

(ii) $\theta_1 \circ \theta_2 = \nabla$

が成り立つ ($\circ$ は関係の合成).

これとは逆に, 与えられた代数 $\mathbf{A}$ が $\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2$ という形に**直積分解**できるのはどのような場合かを考えることもできる. 次の定理は群論でおなじみのものである.

定理 5.1

$\mathbf{A}$ を代数とする. (i), (ii) を満たす合同関係の組 $\theta_1, \theta_2 \in \mathbf{Con}(\mathbf{A})$ について

$$\mathbf{A} \cong \mathbf{A}/\theta_1 \times \mathbf{A}/\theta_2$$

が成り立つ. $\mathbf{A}$ の直積分解は, 同型を除いてこのような形に限られる.

そうすると**直既約**な代数 (非自明な形に直積分解できない代数) をすべて特定したり, 与えられた代数が一意に分解できるための条件を求めたりしたくなるのが人情というものであるが, これは群の場合に限っても困難な課題である. それ以前の問題として, どんな代数も直既約な代数の直積としてあらわせるわけではないから, 直既約な代数を「あらゆる代数の構成原子」とみなすことはできない. そこで以下では「直積」の条件をもう少し緩め, 「準積」に置きかえて考える.

まずは直積の簡単な特徴づけから始めよう. 以下, 代数の族 $\{\mathbf{A}_j\}_{j\in J}$ を $\{\mathbf{A}_j\}_J$ と書き, その直積を $\prod_J \mathbf{A}_j$ と書く.

命題 5.2

代数 $\mathbf{A}$ と代数の族 $\{\mathbf{A}_j\}_J$ が与えられたとき, $\mathbf{A} \cong \prod_J \mathbf{A}_j$ となるための必要十分条件は, 全準同型の族 $p_j : \mathbf{A} \twoheadrightarrow \mathbf{A}_j$ $(j \in J)$ が存在し以下が成り立つことである.

1. $\{p_j\}_J$ は**全体として単射** (jointly injective) である. つまり

$$\text{すべての } j \in J \text{ について } p_j(a) = p_j(b) \implies a = b.$$

2. $\{p_j\}_J$ は全体として全射である. つまり各 $j \in J$ について $a_j \in \mathbf{A}_j$ が与えられたとき, ある $a \in \mathbf{A}$ が存在して $p_j(a) = a_j$.

上の「全体として単射」という条件は $\bigcap_J \mathsf{Ker}(p_j) = \Delta$ と言い換えることができる. 上の特徴づけから 2 番目の条件を取り除いたものが準積に他ならない.

定義 5.3. 代数族 $\{\mathbf{A}_j\}_J$ が与えられたとき, 全体として単射な全準同型の族 $p = \{p_j : \mathbf{A} \twoheadrightarrow \mathbf{A}_j\}_{j\in J}$ を伴う代数 $\mathbf{A}$ のことを $\{\mathbf{A}_j\}_J$ の**準積** (subdirect product) という.

このとき, 以下を可換にする単準同型 $p : \mathbf{A} \rightarrowtail \prod \mathbf{A}_j$ が唯一存在する.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, tail, "p"] \arrow[dr, "p_j"'] & \prod_J \mathbf{A}_j \arrow[d, "\pi_j"] \\
& \mathbf{A}_j
\end{tikzcd}$$

逆も同様に言える. ゆえに準積とは, 単準同型 $p : \mathbf{A} \rightarrowtail \prod_J \mathbf{A}_j$ を伴う代数 $\mathbf{A}$ で, 各 $j \in J$ について $\pi_j \circ p$ が全準同型になるものと定義してもよい. そこで本稿では, $\mathbf{A}$, $p = \{p_j\}_J$ が $\{\mathbf{A}_j\}_J$ の準積であることを

$$p : \mathbf{A} \hookrightarrow \prod_J \mathbf{A}_j$$

と表記する. とくに必要ないときには p を省略し, 単に「$\mathbf{A}$ は $\{\mathbf{A}_j\}_J$ の準積である」という.

準積は, たとえ同型を除いても一意に定まらない. 例を挙げれば :

- 直積 $\prod_J \mathbf{A}_j$ はもちろん準積である.
- 加群の族 $\{\mathbf{A}_j\}_J$ の直和 $\bigoplus_J \mathbf{A}_j$ は準積である.
- $\mathbf{Z}$ を整数の加法群とし, $\mathbf{Z}_n := \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ とする. J を自然数の無限集合とすれば, $\mathbf{Z}$ は $\{\mathbf{Z}_n\}_{n \in J}$ の準積である. このように直積分解できない代数が準積に分解できることもある.
- 分配束 $\mathbf{L}$ の任意の要素 a について, $\mathbf{L}$ は $\mathbf{L}_{\leq a}$ と $\mathbf{L}_{\geq a}$ の準積である.

一方で前順序クラス $\mathbf{Surj}(\mathbf{A})$ の中で考えれば, ある意味で準積は一意に定まる.

補題 5.4

$\mathbf{A}$ を代数とし, 各 $j \in J$ について $h_j \in \mathbf{Surj}(\mathbf{A})$ が与えられているとする. このとき図式

$$\begin{tikzcd}
& \mathbf{A} \arrow[dl, "h"'] \arrow[dr, "h_j"] & \\
\mathbf{B} \arrow[rr, two heads, "p_j"] & & \mathbf{B}_j
\end{tikzcd}$$

をすべて可換にする全準同型 $h \in \mathbf{Surj}(\mathbf{A})$ で, $\mathbf{B}$, $p = \{p_j\}_J$ が $\{\mathbf{B}_j\}_J$ の準積となるものが ($\sim$ 同値をのぞいて) ただ 1 つ存在する. またこのとき $\mathsf{Ker}(h) = \bigcap_J \mathsf{Ker}(h_j)$ が成り立つ.

前同型 $\mathbf{Con}(\mathbf{A}) \simeq \mathbf{Surj}(\mathbf{A})$ に鑑みれば, これは $\mathbf{Surj}(\mathbf{A})$ における "下限" は準積により与えられることを意味する. 準積は合同束における下限 $\theta = \bigcap_J \theta_j$ に対応する. 素イデアルなり, 極大イデアルなり, 何らかのイデアル族の共通部分をとるのは可換環論の常とう手段である. それらをみれば準積のさらなる例が得られるだろう.

次に普遍代数学で最重要の役割を果たす概念を導入する.

定義 5.5. 非自明な代数 $\mathbf{A}$ が**準積既約** (subdirectly irreducible) であるとは, $\mathbf{A}$ が有意な形で準積に分解できないことをいう. すなわち $p : \mathbf{A} \hookrightarrow \prod_J \mathbf{A}_j$ ならば, $p_j : \mathbf{A} \twoheadrightarrow \mathbf{A}_j$ を満たす $j \in J$ が必ず存在する場合である.

$\mathbf{A}, p = \{p_j\}_J$ が $\{\mathbf{A}_j\}_J$ の準積となるのは, 定義により $\Delta = \bigcap_J \mathsf{Ker}(p_j)$ が成り立つ場合である. ゆえに $\mathbf{A}$ が準積既約であるとは, $\Delta = \bigcap_J \mathsf{Ker}(p_j)$ である限り必ず $\mathsf{Ker}(p_j) = \Delta$ を満たす $j \in J$ があるということに他ならない. 言い換えれば, Δ 以外の合同関係の共通部分をとっても決して Δ にならないということである. よって次のことがわかる.

定理 5.6

代数 $\mathbf{A}$ が準積既約であるための必要十分条件は, 合同束 $\mathbf{Con}(\mathbf{A})$ において $Con(\mathbf{A})\backslash\{\Delta\}$ が最小元を持つことである.

要は "下から 2 番目" の合同関係がただ 1 つ存在するということである. この合同関係を $\mathbf{A}$ のモノリスという.

さて, 準積既約性が重要なのは次の定理が成り立つからである.

定理 5.7

どんな代数 $\mathbf{A}$ も準積既約な代数の準積に分解できる.

$$\mathbf{A} \hookrightarrow \prod_J \mathbf{A}_j \quad (\mathbf{A}_j \text{ は準積既約})$$

証明. $\mathbf{A}$ が自明ならば 0 個の直積と同型なのでよい. $\mathbf{A}$ が非自明なとき, $J = \{(a, b) \in A^2 : a \neq b\}$ とおく. 各 $(a, b) \in J$ について, (a, b) を含まない合同関係の中で極大なものを 1 つとって $\theta_{a,b}$ とする (極大なものの存在は Zorn の補題より). すると $\Delta = \bigcap_J \theta_{a,b}$ であるから, $\mathbf{A}$ は $\{\mathbf{A}/\theta_{a,b}\}_{(a,b)\in J}$ の準積である. あとは各 $\mathbf{A}/\theta_{a,b}$ が準積既約なことをいえばよい.

同型対応 $\mathbf{Con}(\mathbf{A})_{\geq\theta_{a,b}} \cong \mathbf{Con}(\mathbf{A}/\theta_{a,b})$ (定理 4.6) によれば, 右辺における Δ は左辺では $\theta_{a,b}$ に対応する. ゆえに $\theta_{a,b} \subsetneq \varphi_k$ を満たすどんな $\varphi_k \in \mathbf{Con}(\mathbf{A})$ をとっても $\theta_{a,b} = \bigcap \varphi_k$ とは決してならないことをいえばよい. 実際これは正しい. なぜならば $\theta_{a,b}$ の極大性より $(a, b) \in \varphi_k$ がすべての φ_k について成り立つが, (a, b) は左辺に属さないからである. □

これは直積分解については成り立たない非常に強い性質である. こんなに強い性質が成り立つのは, 準積という概念が (適度に) 弱いからである. なお, 分解の一意性は当然成り立たない.

最後に準積既約な代数の例をいくつか挙げる.

- 合同束 $\mathbf{Con}(\mathbf{A})$ が 2 元 Δ, ∇ のみからなる代数のことを**単純**であるという. 単純代数はもちろん準積既約である. この場合モノリスは ∇ である.

- 直既約な $\mathbf{Z}$ が準積既約ではないことを上でみた. では, 準積既約なアーベル群とはどのようなものかというと, $\mathbf{Z}_q$ (q は素数のべき) および準巡回群 $\mathbf{Z}(p^\infty)$ (p は素数) で全部尽くされることが知られている. どんなアーベル群もこれらの準積に分解できる.

- 準積既約な整域は体のみである.

- 分配束の中で準積既約なものは, 2 元束 $\mathbf{2}$ に限られる. このことは前に挙げた例 $\mathbf{L} \hookrightarrow \mathbf{L}_{\leq a} \times \mathbf{L}_{\geq a}$ より明らかであろう. よって上の定理によれば, どんな分配束も $\mathbf{L} \hookrightarrow \prod_J \mathbf{2}$ というふうに分解できることになる (J は適当な添字集合, 分配束の準同型像は再び分配束になることに注意). 一方で $\prod_J 2$ はべき集合束 $\langle \wp(J), \cap, \cup \rangle$ と同型だから, どんな分配束も
$$\mathbf{L} \rightarrowtail \mathbf{P}(J) = \langle \wp(J), \cap, \cup \rangle$$
というようにべき集合束に埋め込めることがわかる.

- ちなみに定理 3.5(3) で挙げた束はどちらも準積既約である. それゆえ上のようなことは非分配束では成り立たない.

6　代数のクラスを定める (1) 多様クラス

これまでは個々の代数の話をしてきたが, ここで代数のクラスへと話を拡げることにしよう. 代数のクラスを 1 つ定めるには, 大まかにいって 2 通りの方法がある. ひとつは具体的な代数の集合をとってきて, 適当な閉包演算で閉じることである. これまでの議論で全準同型, 単準同型, 直積の 3 つが大事な役割を果たしてきたので, これらの写像や構成法について閉じたクラスを考えるのが都合よい.

もうひとつは, いままで暗黙裡に行ってきたとおり**公理**によりクラスを定める方法である. たとえば「群全体のクラス」というときには, 実際には「群の諸公理を満たすもの全体のクラス」を意味している. このことを明示的かつ一般的に行うにはどうしたらよいだろうか? 本章では第 1 の方法について説明する. 第 2 の方法は次章にまわす.

同類の代数からなるクラス $\mathcal{K}$ が与えられたとき, **クラス演算子** $\mathsf{H}, \mathsf{S}, \mathsf{P}$ を次のように定める.

$\mathbf{B} \in \mathsf{H}(\mathcal{K}) \iff \mathbf{A} \in \mathcal{K}$ と $h : \mathbf{A} \twoheadrightarrow \mathbf{B}$ が存在する.
$\mathbf{B} \in \mathsf{S}(\mathcal{K}) \iff \mathbf{A} \in \mathcal{K}$ と $h : \mathbf{B} \rightarrowtail \mathbf{A}$ が存在する.
$\mathbf{B} \in \mathsf{P}(\mathcal{K}) \iff$ 各 $j \in J$ について $\mathbf{A}_j \in \mathcal{K}$ が存在し, $\mathbf{B} \cong \prod_J \mathbf{A}_j$ (J は任意の添字集合).

$\mathsf{H}, \mathsf{S}, \mathsf{P}$ はそれぞれ, 準同型像, 部分代数, 直積をつくる操作についての閉包を表す.

定義 6.1. 同類の代数からなるクラス $\mathcal{K}$ で $\mathsf{HSP}(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$ を満たすものを**多様クラス** (variety) という.

すぐわかるように, 多様クラスは $\mathsf{H}, \mathsf{S}, \mathsf{P}$ のすべてについて閉じている.

たとえば与えられた群の準同型像や部分代数や直積は再び群になるから, 群全体は多様クラスを成す. アーベル群, 環, ($\mathbf{R}$ を固定したときの) 左 $\mathbf{R}$ 加群, 束, 分配束についても同様である. 一方で整域は直積について閉じていないし, 体は部分代数と直積について閉じていない. また, ねじれなしアーベル群全体のクラスは準同型像について閉じていない. このようなクラスは多様クラスではない.

多様クラスは直積について閉じているので, 空ではない (0 個の直積を自明な代数とみなす). また非自明な代数を 1 つでも含むならば, いくらでも大きな代数を含む. その中で大事

なものといえば, やはり準積既約な代数である. クラス $\mathcal{K}$ の中で, 準積既約な代数全体の集まりを $\mathcal{K}_{\mathrm{SI}}$ と書く. 次のことは定理 5.7 の帰結である.

定理 6.2

$\mathcal{V}, \mathcal{W}$ を多様クラスとすると, $\mathcal{V} = \mathsf{SP}(\mathcal{V}_{\mathrm{SI}})$. それゆえ

$$\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W} \iff \mathcal{V}_{\mathrm{SI}} \subseteq \mathcal{W}_{\mathrm{SI}}.$$

証明. $\mathcal{V} \supseteq \mathsf{SP}(\mathcal{V}_{\mathrm{SI}})$ は明らか. 逆にどんな $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ も

$$\mathbf{A} \hookrightarrow \textstyle\prod_J \mathbf{A}_j \qquad (\mathbf{A}_j \text{ は準積既約})$$

と分解すれば $\mathbf{A}_j \in \mathcal{V}_{\mathrm{SI}}$ であり (H), $\mathbf{A}$ はそれらの直積 (P) の部分代数 (S) と同型だから $\mathsf{SP}(\mathcal{V}_{\mathrm{SI}})$ に属する. □

つまり多様クラスは, 中に含まれる準積既約代数により一意に定まる. たとえば分配束全体の多様クラスは $\mathsf{SP}(\mathbf{2}) := \mathsf{SP}(\{\mathbf{2}\})$ に等しい.

多様クラスは非常に安定したクラスであり, 自然な性質が多く成り立つ. 一例を挙げよう. 代数の有限生成については既知のものとする (後で定義を述べる). 代数 $\mathbf{A}$ が**局所的に有限** (locally finite) であるとは, 有限生成な部分代数はすべて有限であることをいう.

定理 6.3

$\mathcal{K}$ を有限代数からなる有限集合とする. このときどんな $\mathbf{A} \in \mathsf{HSP}(\mathcal{K})$ も局所的に有限である.

たとえばアーベル群 $\mathbf{Z}$ は局所的に有限ではない. 有限個の有限アーベル群をどんなふうにとってきても, どんなふうに H, S, P を繰り返しても, 決して $\mathbf{Z}$ は得られない. そんな群論的には当たり前の事実が一般の多様クラスについても成り立つ. 上の定理はそういうことを述べている.

7 代数のクラスを定める (2) 等式クラス

次に代数クラスを定める第 2 の方法に移ろう. それには代数の諸公理を記述するための道具立てを考案しなければならない.

まず, 類型 $\tau = \langle F, ar \rangle$ を固定する. F は記号の集合だったことを思い出してほしい. 空でない集合 X が与えられたとき, 各 $m \in \mathbb{N}$ について集合 $T^m(X)$ を以下のように定める.

$$\begin{array}{lcl} T^0(X) & := & X, \\ T^{m+1}(X) & := & T^m(X) \cup \{\mathsf{f}(t_1, \ldots, t_n) : \mathsf{f} \in F,\ n = ar(\mathsf{f}),\ t_1, \ldots, t_n \in T^m(X)\}. \end{array}$$

最後に $T(X) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} T^m(X)$ とおく. X の各要素は**生成元**をあらわす (後の文脈では**変数**あるいは**不定元**をあらわす). $T(X)$ の各要素を**項** (term) という.

記号 f を自然に $T(X)$ 上の演算とみなせば, 代数

$$\mathbf{T}(X) := \langle T(X), \{\mathsf{f}\}_{\mathsf{f} \in F} \rangle$$

が定まる．これを**項代数** (term algebra) あるいは**絶対自由代数** (absolutely free algebra) という．

項代数について大切なのは, 次に述べる随伴関係である．τ 代数 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ が与えられたとき, $\mathbf{A}$ から $\mathbf{B}$ への準同型全体を $\mathsf{Hom}_\tau(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ と書く．また集合 X から Y への関数全体を $\mathsf{Set}(X, Y)$ と書く．代数 $\mathbf{A}$ の台集合 A をここでは $U(\mathbf{A})$ と書く．$X \subseteq U(\mathbf{T}(X))$ に注意して, 包含写像を $\eta_X : X \to U(\mathbf{T}(X))$ と書く．

関数 $h : X \to U(\mathbf{A})$ は, 次のようにして準同型 $\overline{h} : \mathbf{T}(X) \to \mathbf{A}$ に拡張できる．

$$\begin{array}{lcll} \overline{h}(x) & := & h(x) & (x \in X) \\ \overline{h}(\mathsf{f}(t_1, \ldots, t_n)) & := & \mathsf{f}^{\mathbf{A}}(\overline{h}(t_1), \ldots, \overline{h}(t_n)) & (\mathsf{f} \in F, ar(\mathsf{f}) = n) \end{array}$$

逆に準同型 $g : \mathbf{T}(X) \to \mathbf{A}$ が与えられたら, 集合上の関数と見なして $U(g) : U(\mathbf{T}(X)) \to U(\mathbf{A})$ とし η_X と合成することで, 写像 $\underline{g} := U(g) \circ \eta_X : X \to U(\mathbf{A})$ が得られる．これらは互いに逆の操作になっているので, 次のことが成り立つ．

補題 7.1

$X \neq \emptyset$ とすると, 任意の τ 代数 $\mathbf{A}$ について同等性

$$\mathsf{Hom}_\tau(\mathbf{T}(X), \mathbf{A}) \ \cong \ \mathsf{Set}(X, U(\mathbf{A}))$$

が "自然" に成り立つ．

要するに $\mathbf{T}(X)$ は τ 代数の圏における**自由対象**である．

系 7.2

どんな τ 代数 $\mathbf{A}$ も, ある集合 X と $\theta \in \mathbf{Con}(\mathbf{T}(X))$ により $\mathbf{A} \cong \mathbf{T}(X)/\theta$ と表せる．

証明. $X := U(\mathbf{A})$ とおき, $h : X \to U(\mathbf{A})$ を恒等写像とすれば全準同型 $\overline{h} : \mathbf{T}(X) \twoheadrightarrow \mathbf{A}$ が得られるので, $\theta := \mathsf{Ker}(\overline{h})$ と定めれば準同型定理により $\mathbf{T}(X)/\theta \cong \mathbf{A}$ となる． □

上の系は「生成元と関係式」により代数を表示する方法を述べている．つまり X は生成元, θ は関係式の集合である．上では $X := U(\mathbf{A})$ とおいたが, この取り方はあまり経済的であるとはいえない．ある有限集合 X と何らかの $\theta \in \mathbf{Con}(\mathbf{T}(X))$ について $\mathbf{A} \cong \mathbf{T}(X)/\theta$ となるとき, $\mathbf{A}$ は**有限生成**であるという．この定義が普通の意味での有限生成と同値であることは容易に確かめられる．

さらにいえば, θ のほうもより小さな関係式集合 $R \subseteq T(X)^2$ から閉包操作によって生成できる場合がある．このとき $\theta = Cg(R)$ と書く (θ は R を含む最小の合同関係). 有限の X と有限の R によって $\mathbf{A} \cong \mathbf{T}(X)/Cg(R)$ となるとき $\mathbf{A} = \langle X | R \rangle$ と書き, これを $\mathbf{A}$ の**有限表示**という．

有限表示できる代数に対しては, さまざまな計算論的課題が発生する．典型的なのは**語の問題** (word problem) である．有限表示を持つ代数 $\mathbf{A} = \langle X | R \rangle$ を固定する．2 元 $t, u \in T(X)$ が与えられたとき, $\rho(t) = \rho(u)$ は成り立つかどうか? (ρ は $\mathbf{A}$ への自然な全準同型). 群の場合に限っても, この問題が**決定不能**になる群が多く知られている．

さて, 本題に戻ろう. 代数のクラスを公理によって定める方法を探しているのであった. 公理を表すには, **変数**の可算無限集合 $X_\omega := \{x, y, z, \dots\}$ を 1 つ固定し, 項の集合 $T(X_\omega)$ および項代数 $\mathbf{T}(X_\omega)$ を考えるのがよい. 以下これらを $T := T(X_\omega), \mathbf{T} := \mathbf{T}(X_\omega)$ と略記する.

2 つの項 $t, u \in T$ の対のことを類型 τ の**恒等式** (identity), あるいは**等式** (equation) といい $t \approx u$ と書く.

各項 $t = t(x_1, \dots, x_n)$ には変数が含まれるので, これに値を付与することを考える. 代数 $\mathbf{A}$ が与えられたとき, 変数集合を定義域とする関数 $g : X_\omega \to U(\mathbf{A})$ を**付値** (valuation) という. 補題 7.1 によれば, これは準同型 $v : \mathbf{T} \to \mathbf{A}$ を考えるのと同じことなので, 敷衍して後者も付値と呼ぶ.

次に代数 $\mathbf{A}$ と付値 $v : \mathbf{T} \to \mathbf{A}$ について $v(t) = v(u)$ が成り立つとき

$$\mathbf{A}, v \vDash t \approx u$$

と書く. これは「t, u に含まれる変数に v で値を代入したとき, $\mathbf{A}$ 上で $t = u$ が成り立つ」ことを表す. どんな付値 $v : \mathbf{T} \to \mathbf{A}$ についても $\mathbf{A}, v \vDash t \approx u$ が成り立つとき, $\mathbf{A} \vDash t \approx u$ と書く. これは代数 $\mathbf{A}$ において $t \approx u$ が**恒等的に真**であることを表す. 代数のクラス $\mathcal{K}$ と等式の集合 E が与えられたとき, どんな $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ と $(t \approx u) \in E$ についても $\mathbf{A} \vDash t \approx u$ が成り立つとき, $\mathcal{K} \vDash E$ と書く. その他類似の記法を適宜用いる.

たとえば群の類型 τ_G の場合を考えると, $\mathbf{T}$ の項とは変数 $x, y, z, \dots$ と 3 つの記号 $\cdot, {}^{-1}, e$ から構成される記号表現のことに他ならない. それゆえ以下は全部 τ_G の等式とみなせる.

$$x \cdot (y \cdot z) \approx (x \cdot y) \cdot z, \qquad e \cdot x \approx x, \qquad x \cdot e \approx x, \qquad x^{-1} \cdot x \approx e, \qquad x \cdot x^{-1} \approx e$$

この 5 つの等式からなる集合を E と置けば, 類型 τ_G の任意の代数 $\mathbf{A}$ について,

$$\mathbf{A} \vDash E \iff \mathbf{A} \text{ は群である}$$

が成り立つ. つまり群は等式のみを用いて公理化できる. さらに $x \cdot y \approx y \cdot x$ を加えればアーベル群を公理化することができる.

定義 7.3. 同類の代数からなるクラス $\mathcal{K}$ を考える. 等式の集合 $E \subseteq T \times T$ が

$$\mathbf{A} \in \mathcal{K} \iff \mathbf{A} \vDash E$$

を満たすとき, E を $\mathcal{K}$ の**等式基底** (equational basis) という. 等式基底を持つクラスを**等式クラス** (equational class) という.

上に挙げたように, 群全体やアーベル群全体は等式クラスである. 環全体や左 $\mathbf{R}$ 加群全体も等式クラスである. 一方で整域全体や体全体は等式クラスではないし, ねじれなし群全体も等式クラスではない. それは次のことが成り立つからである.

補題 7.4

等式クラスは多様クラスである.

証明. 補題を示すには, 等式の成立が H, S, P の各操作で保存されることを確かめればよい. たとえば $h : \mathbf{A} \twoheadrightarrow \mathbf{B}$ かつ $\mathbf{A} \vDash t \approx u$ とする. 与えられた付値 $v : \mathbf{T} \to \mathbf{B}$ に対して

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{T} \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "v"] & \\ \mathbf{A} \arrow[rr, two heads, "h"] & & \mathbf{B} \end{tikzcd}$$

を満たす付値 w があることをいえば, 仮定より $w(t) = w(u)$ だから $v(t) = v(u)$ となり, $\mathbf{B} \vDash t \approx u$ がいえる.

まず v を集合上の関数 $\underline{v} : X_\omega \to U(\mathbf{B})$ に落とす. $U(h) : U(\mathbf{A}) \twoheadrightarrow U(\mathbf{B})$ は全射だから関数 $g : X_\omega \to U(\mathbf{A})$ をうまく選べば $U(h) \circ g = \underline{v}$ とできる. この g を τ 代数上の準同型に戻して $w := \overline{g} : \mathbf{T} \to \mathbf{A}$ とおけばよい. これでうまくいくことは具体的に確かめることもできるし, 同等性 $\mathsf{Hom}_\tau(\mathbf{T}(X_\omega), \mathbf{A}) \cong \mathsf{Set}(X_\omega, U(\mathbf{A}))$ が $\mathbf{A}$ について "自然" であることを用いてもよい. S, P についても同様である. □

それゆえ多様クラスは等式の集合により定めることができる. このあたりに代数多様体とのアナロジーがあるわけだが, もちろん多様クラス側に幾何学的な直観が与えられない限りアナロジーは表面的なものにとどまる.

上の補題は逆も成り立つ. つまり多様クラスは常に等式基底を持つ. それが普遍代数学初期の成果, Birkhoff の定理 (1935) である.

8 全不変性と自由代数

本章の前半は Birkhoff の定理に向けた準備である. 後半では, 与えられた代数のクラスにおける自由代数の構成法を述べる.

$\mathbf{A}$ を代数とする. $\mathbf{A}$ 上の合同関係 θ で以下を満たすものを全不変 (fully invariant) という. どんな自己準同型 $\sigma : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ についても

$$a \,\theta\, b \implies \sigma(a) \,\theta\, \sigma(b).$$

全不変な合同関係は共通部分 $\bigcap$ について閉じている. そこで全不変な合同関係からなる $\mathbf{Con}(\mathbf{A})$ の部分束を $\mathbf{ICon}(\mathbf{A})$ と書く.

同じ話を前順序 $\mathbf{Surj}(\mathbf{A})$ について繰り返す. 全準同型 $h : \mathbf{A} \twoheadrightarrow \mathbf{B}$ で以下を満たすものを全不変という. どんな自己準同型 $\sigma : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ についても図式

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, two heads, "h"'] & \mathbf{A} \arrow[d, two heads, "h"] \\ \mathbf{B} \arrow[r, "\hat{\sigma}"] & \mathbf{B} \end{tikzcd}$$

を可換にする $\hat{\sigma} : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ が (ただ 1 つ) 存在する. $\mathbf{Surj}(\mathbf{A})$ を全不変な全準同型に制限して得られる部分前順序を $\mathbf{ISurj}(\mathbf{A})$ と書く.

両者が前同型になることは, 定義から簡単に確かめることができる.

補題 8.1

任意の代数 $\mathbf{A}$ について $\mathbf{ICon}(\mathbf{A}) \simeq \mathbf{ISurj}(\mathbf{A})$.

これらの概念が重要なのは, $\mathbf{A}$ が項代数の場合である. なぜならこのとき, 自己準同型 σ : $\mathbf{T}(Y) \to \mathbf{T}(Y)$ は変数に対する代入を表すからである. つまり σ は項 $t = t(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{T}(Y)$ を $t(u_1, \ldots, u_n) \in \mathbf{T}(Y)$ に写す (ただし $u_i = \sigma(y_i)$).

以後の議論では使わないが, 次の命題が全不変な合同関係や準同型の特徴をよくあらわしている.

命題 8.2

$X_\omega \subseteq Y$ を満たす任意の集合 Y について

$$\mathbf{ISurj}(\mathbf{T}(Y)) \simeq \mathbf{ICon}(\mathbf{T}(Y)) \cong \mathbf{ICon}(\mathbf{T}) \simeq \mathbf{ISurj}(\mathbf{T}).$$

証明. 中央の束同型のみ示せばよい. 概略のみ述べる. まず, $\theta \in \mathbf{ICon}(\mathbf{T}(Y))$ に対して $\theta{\restriction}T \in \mathbf{ICon}(\mathbf{T})$ となる. この対応は全射であり, さらに次が成り立つ.

$$\theta_1 \subseteq \theta_2 \iff \theta_1{\restriction}T \subseteq \theta_2{\restriction}T.$$

($\Rightarrow$) は明らか. 逆に $(t, u) \in \theta_1$ が与えられたとき, 適当な自己同型 σ : $\mathbf{T}(Y) \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \mathbf{T}(Y)$ (変数名のつけかえ) を選べば $\sigma(t), \sigma(u) \in T$ とすることができる. θ_1 の全不変性より $(\sigma(t), \sigma(u)) \in \theta_1{\restriction}T$, よって $(\sigma(t), \sigma(u)) \in \theta_2{\restriction}T$. 最後に σ^{-1} を適用すれば, θ_2 の全不変性より $(t, u) \in \theta_2$ が得られる. □

要するに Y が無限集合でさえあれば, $\mathbf{ISurj}(\mathbf{T}(Y))$ の構造は一定である.

次に自由代数の構成に移る. $Y \neq \emptyset$ とし, 代数クラス $\mathcal{K}$ は $\mathsf{SP}(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$ を満たすものとする. $\mathbf{Surj}(\mathbf{T}(Y))$ の中で終域が $\mathcal{K}$ に属する全準同型全体のクラスを J とおく. つまり $h \in J \Leftrightarrow h : \mathbf{T}(Y) \twoheadrightarrow \mathbf{A}_h \in \mathcal{K}$. そして $\mathbf{Surj}(\mathbf{T}(Y))$ における $\{h\}_{h\in J}$ の "下限" を 1 つとり $\lambda_{\mathcal{K}} : \mathbf{T}(Y) \twoheadrightarrow \mathbf{F}_{\mathcal{K}}(Y)$ とする. すると次の図を可換にする $p_{\mathcal{K}} = \{p_h : \mathbf{F}_{\mathcal{K}}(Y) \twoheadrightarrow \mathbf{A}_h\}_{h\in J}$ で $\{\mathbf{A}_h\}_{h\in J}$ の準積となるものが存在する (補題 5.4).

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{T}(Y) \arrow[dl, "\lambda_{\mathcal{K}}"'] \arrow[dr, "h"] & \\ \mathbf{F}_{\mathcal{K}}(Y) \arrow[rr, two heads, "p_h"] & & \mathbf{A}_h \end{tikzcd} \tag{1}$$

次の定理で $\mathcal{K}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ は, 代数 $\mathbf{A}$ から $\mathbf{B}$ への準同型全体の集合をあらわす ($\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{K}$).

定理 8.3

$Y \neq \emptyset$ と $\mathcal{K} = \mathsf{SP}(\mathcal{K})$ を仮定する. すると $\mathbf{F}_{\mathcal{K}}(Y) \in \mathcal{K}$ であり, 任意の $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ について次の同等性が "自然に" 成り立つ.

$$\mathcal{K}(\mathbf{F}_{\mathcal{K}}(Y), \mathbf{A}) \cong \mathsf{Set}(Y, U(\mathbf{A})).$$

つまり $\mathbf{F}_{\mathcal{K}}(Y)$ は $\mathcal{K}$ を圏と見たときの自由対象である．これをクラス $\mathcal{K}$ の**自由代数**という．類型 τ が定数記号を 1 つでも含むときは $Y \neq \emptyset$ という仮定を除去できる．このとき関手 $F_{\mathcal{K}} : \mathsf{Set} \to \mathcal{K}$ は忘却関手 $U : \mathcal{K} \to \mathsf{Set}$ の左随伴になる．

証明. $\mathbf{F}_{\mathcal{K}}(Y)$ は $\mathcal{K}$ に含まれる代数の準積であるから $\mathbf{F}_{\mathcal{K}}(Y) \in \mathsf{SP}(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$ である．同等性を示すには, 補題 7.1 より $\mathcal{K}(\mathbf{F}_{\mathcal{K}}(Y), \mathbf{A}) \cong \mathsf{Hom}_\tau(\mathbf{T}(Y), \mathbf{A})$ を示せばよい．$h \in \mathsf{Hom}_\tau(\mathbf{T}(Y), \mathbf{A})$ のとき, h は全準同型であると仮定してよい (さもなければ終域を $\mathsf{Im}(h)$ に制限する)．すると $h \in J$ であるから, 全準同型 $p_h \in \mathsf{Hom}_\tau(\mathbf{F}_{\mathcal{K}}(Y), \mathbf{A})$ が得られる (図 (1) を参照)．同図を眺めれば, この対応は一対一であることがわかる．“自然” さの証明は省略する． □

以上は極めて抽象的な構成であるが, 既知の意味での自由代数と一致する．たとえば $\mathcal{V}$ を左 $\mathbf{R}$ 加群全体からなる多様クラスとするとき, $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(Y)$ が基底 Y 上の自由加群になることは定理 8.3 を用いずとも具体的に確かめることができる．

系 8.4

$\mathcal{V}$ を多様クラスとする．代数 $\mathbf{A}$ が $\mathcal{V}$ に属するための必要十分条件は, ある集合 Y と $\theta \in \mathbf{Con}(\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(Y))$ により $\mathbf{A} \cong \mathbf{F}_{\mathcal{V}}(Y)/\theta$ と表せることである．

この系は, 定理 6.2 と対比すると味わい深い．$\mathcal{V}$ に含まれる自由代数全体を $\mathcal{V}_{\mathsf{F}}$ と書くことにすると, 次が成り立つ．

系 8.5

どんな多様クラス $\mathcal{V}$ についても $\mathcal{V} = \mathsf{SP}(\mathcal{V}_{\mathsf{SI}}) = \mathsf{H}(\mathcal{V}_{\mathsf{F}})$.

また, 自由代数の存在から単純代数の存在がいえる．

定理 8.6

自明でない多様クラスは, 単純代数を含む．

最後に, 次章に向けて重要な事実を述べておく．

補題 8.7

自由代数への自然な全準同型 $\lambda_{\mathcal{K}} : \mathbf{T}(Y) \twoheadrightarrow \mathbf{F}_{\mathcal{K}}(Y)$ は全不変であり, $\mathbf{ISurj}(Y)$ に属する．

証明. 自己準同型 $\sigma : \mathbf{T}(Y) \to \mathbf{T}(Y)$ を考える．$g := \lambda_{\mathcal{K}} \circ \sigma$, $X := \mathsf{Im}(g)$ とすれば, $g : \mathbf{T}(Y) \twoheadrightarrow \mathbf{F}_{\mathcal{K}}(Y) \restriction X$ は $\mathcal{K}$ 内の代数への全準同型だから自由代数の構成法より

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{T}(Y) \arrow[dl, "\lambda_{\mathcal{K}}"'] \arrow[dr, "g"] & \\ \mathbf{F}_{\mathcal{K}}(Y) \arrow[rr, two heads, "p_g"] & & \mathbf{F}_{\mathcal{K}}(Y) \restriction X \end{tikzcd}$$

となって求める準同型 $\hat{\sigma} := \iota_X \circ p_g : \mathbf{F}_{\mathcal{K}}(Y) \to \mathbf{F}_{\mathcal{K}}(Y)$ が得られる． □

9　等式クラス＝多様クラス

本章では Birkhoff の定理について述べる. 等式クラスが多様クラスであることは補題 7.4 ですでに見たので, 逆を示したい. そのためには与えられた多様クラス $\mathcal{V}$ に対してその等式基底を見つけなければならない. たったひとつの冴えたやり方は $\mathcal{V}$ 上で恒等的に真となる等式全体をとることである.

$$\mathsf{Id}(\mathcal{V}) \ := \ \{(t \approx u) \in T \times T \ : \ \mathcal{V} \vDash t \approx u\}$$

すると $\mathsf{Id}(\mathcal{V})$ は $\mathbf{T} = \mathbf{T}(X_\omega)$ 上の合同関係であり, 全不変であることも確かめられる. すなわち $\mathsf{Id}(\mathcal{V}) \in \mathbf{ICon}(\mathbf{T})$.

前章の結果と合わせれば, 各多様クラス $\mathcal{V}$ に対して全準同型 $\lambda_{\mathcal{V}} \ : \ \mathbf{T}(Y) \twoheadrightarrow \mathbf{F}_{\mathcal{V}}(Y) \in \mathbf{ISurj}(\mathbf{T}(Y))$ と合同関係 $\mathsf{Id}(\mathcal{V}) \in \mathbf{ICon}(\mathbf{T})$ が得られたわけである. しかもこの両者は前同型 $\mathbf{ISurj}(\mathbf{T}(Y)) \simeq \mathbf{ICon}(\mathbf{T})$ により正確に対応する.

補題 9.1

集合 Y が $X_\omega \subseteq Y$ を満たすならば, $\mathsf{Id}(\mathcal{V}) = \mathsf{Ker}(\lambda_{\mathcal{V}}) \restriction T$.

証明. まず $(\subseteq)$ を示すために $\mathcal{V} \vDash t \approx u$ とする. $\lambda_{\mathcal{V}}$ の始域を $\mathbf{T}$ に制限すれば付値 $\lambda_{\mathcal{V}} : \mathbf{T} \to \mathbf{F}_{\mathcal{V}}(Y) \in \mathcal{V}$ と見なせるので $\lambda_{\mathcal{V}}(t) = \lambda_{\mathcal{V}}(u)$. よって $t \approx u \in \mathsf{Ker}(\lambda_{\mathcal{V}}) \restriction T$.

逆に $(t, u) \in \mathsf{Ker}(\lambda_{\mathcal{V}}) \restriction T$ 与えられたとする. 代数 $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ と付値 $v \ : \ \mathbf{T} \to \mathbf{A}$ を任意にとる. v は (終域を制限することにより) 全準同型とみなせるので, 自由代数の構成法より準同型 $p_v \ : \ \mathbf{F}_{\mathcal{V}}(Y) \to \mathbf{A}$ が存在し, $v = p_v \circ \lambda_{\mathcal{V}}$ となる. $\lambda_{\mathcal{V}}(t) = \lambda_{\mathcal{V}}(u)$ なので $v(t) = v(u)$. つまり $\mathbf{A}, v \vDash t \approx u$. □

定理 9.2 (Birkhoff 1935)

$\mathcal{V}$ を多様クラスとすると, 任意の代数 $\mathbf{A}$ について

$$\mathbf{A} \in \mathcal{V} \iff \mathbf{A} \vDash \mathsf{Id}(\mathcal{V}).$$

よって $\mathcal{V}$ は等式クラスである.

証明. $(\Rightarrow)$ は明らかなので逆を示す. $Y \supseteq X_\omega$ を十分大きくとれば全準同型 $h \ : \ \mathbf{T}(Y) \twoheadrightarrow \mathbf{A}$ が存在する. 一方で $\lambda_{\mathcal{V}} : \mathbf{T}(Y) \twoheadrightarrow \mathbf{F}_{\mathcal{V}}(Y) \in \mathcal{V}$ なので $\mathsf{Ker}(\lambda_{\mathcal{V}}) \subseteq \mathsf{Ker}(h)$ さえ示せば

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{T}(Y) \arrow[dl, "\lambda_{\mathcal{K}}"'] \arrow[dr, "h"] & \\ \mathbf{F}_{\mathcal{K}}(Y) \arrow[rr, two heads] & & \mathbf{A} \end{tikzcd}$$

となって $\mathbf{A} \in \mathsf{H}(\mathcal{V}) = \mathcal{V}$ がいえる.

そこで $(t, u) \in \mathsf{Ker}(\lambda_{\mathcal{V}})$ とする. 適当な変数の置換 $\sigma \ : \mathbf{T}(Y) \rightarrowtail\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathbf{T}(Y)$ を用いれば $\sigma(t), \sigma(u) \in T$ とできる. 補題 8.7 より $(\sigma(t), \sigma(u)) \in \mathsf{Ker}(\lambda_{\mathcal{V}})$. よって補題 9.1 より $(\sigma(t), \sigma(u)) \in \mathsf{Id}(\mathcal{V})$. そこで付値 $h \circ \sigma^{-1} \ : \mathbf{T} \to \mathbf{A}$ を考えれば仮定 $\mathbf{A} \vDash \mathsf{Id}(\mathcal{V})$ より $\mathbf{A}, h \circ \sigma^{-1} \vDash \sigma(t) \approx \sigma(u)$, つまり $h(t) = h \circ \sigma^{-1}(\sigma(t)) = h \circ \sigma^{-1}(\sigma(u)) = h(u)$. 以上で $\mathsf{Ker}(\lambda_{\mathcal{V}}) \subseteq \mathsf{Ker}(h)$ がいえた. □

最後にまとめをしよう. 類型 τ が与えられたとき, τ 代数全体のクラスは多様クラスである. その部分多様クラス全体の集まりを $VL(\tau)$ とおく. 束

$$\mathbf{VL}(\tau) := \langle VL(\tau), \cap, \vee \rangle$$

を**多様クラス束** (variety lattice, subvariety lattice) という (毎度のことだが $VL(\tau)$ は共通部分について閉じているので $\vee$ が定義できる). $VL(\tau)$ は "クラスのクラス" になるので気持ち悪いが, 適当に表示を与えれば集合化はいくらでも可能である.

さて, 束 $\mathbf{VL}(\tau)$ で $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$ が成り立つとき, $\mathbf{ICon}(\mathbf{T})$ では $\mathrm{Id}(\mathcal{W}) \subseteq \mathrm{Id}(\mathcal{V})$ となる. 順序が反対になることに注意. 定理 9.2 により逆もいえる. 最後に本稿では割愛したが, 等式論理と完全性定理についてきちんと議論すれば, $\mathcal{V} \mapsto \mathrm{Id}(\mathcal{V})$ という対応が全射なこともわかる. まとめると, 次のようになる.

系 9.3

任意の類型 τ について次の対応関係が成り立つ.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{ICon}(\mathbf{T}) & \cong & \mathbf{VL}(\tau)^{op} & \simeq & \mathbf{ISurj}(\mathbf{T}) \\ \Cup & & \Cup & & \Cup \\ \mathrm{Id}(\mathcal{V}) & \leftarrow\!\shortmid & \mathcal{V} & \mapsto & (\mathbf{F}_{\mathcal{V}}, \lambda_{\mathcal{V}}) \end{array}$$

このようにして多様クラス $\mathcal{V}$, 等式基底 $\mathrm{Id}(\mathcal{V})$, 自由代数 $\mathbf{F}_{\mathcal{V}} := \mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X_\omega)$ の 3 者が, 順序も込めて正確に対応づけられる.

ちなみに対応 $\mathcal{V} \mapsto \mathbf{F}_{\mathcal{V}}$ の逆を計算してみると, $\mathcal{V} = \mathrm{HSP}(\mathbf{F}_{\mathcal{V}})$ となることがわかる. すなわちどんな多様クラスもただ 1 つの自由代数 $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}$ により生成される.

次に対応 $\mathcal{V} \mapsto \mathrm{Id}(\mathcal{V})$ について考えてみる. $\mathrm{Id}(\mathcal{V})$ が $\mathcal{V}$ の等式基底だというのが Birkhoff の定理であるが, $\mathrm{Id}(\mathcal{V})$ は基底として甚だ不経済である. $\mathcal{V}$ が有限の等式基底を持つとき, $\mathcal{V}$ は (等式により) **有限公理化可能**であるという. どのような多様クラスが有限公理化可能であるかは, 普遍代数学の重要テーマの 1 つである.

多様クラス束 $\mathbf{VL}(\tau)$ は τ 型の多様クラス全体からなる巨大な束であり, その構造はあまりにも茫洋としている. そんな無意味な全体よりも興味があるのは, 具体的な多様クラス $\mathcal{W}$ をとってきたときの部分束 $\mathbf{VL}(\mathcal{W}) := \mathbf{VL}(\tau)_{\leq \mathcal{W}}$ の構造である.

例えば $\mathcal{DL}$ を分配束全体の多様クラスとすると, $\mathbf{VL}(\mathcal{DL})$ の構造ははっきりしている. $\mathcal{DL}$ の下には自明な多様クラスしかない ($\mathcal{DL}_{\mathrm{SI}} = \{\mathbf{2}\}$ と定理 6.2 より).

次にアーベル群全体からなる多様クラス $\mathcal{A}$ を考えると, $\mathbf{VL}(\mathcal{A})$ の構造は初等数論で記述できる. 非負整数全体の集合 $\mathbb{N}$ で「$n \preceq m \Leftrightarrow m$ は n で割り切れる」と定め, 束 $\langle \mathbb{N}, \preceq \rangle$ をつくる. 1 が最小元, 0 が最大元である. $\mathbf{VL}(\mathcal{A})$ はこの $\langle \mathbb{N}, \preceq \rangle$ と同型になることが知られている.

さらに詳しい構造解析のための手法も知られている. 次章でその一端を紹介しよう.

10　合同束に注目せよ

群が与えられたら, まずその正規部分群を調べる. なぜならそこに多くの情報が含まれているからである. 同じように代数 $\mathbf{A}$ が与えられたら, その合同束を調べる. そこには多様ク

ラス全体に影響を及ぼすような情報が多く含まれているからである.

Con(**A**) が分配束のとき, **A** は**分配合同束を持つ** (congruence-distributive) という. 多様クラス $\mathcal{V}$ に属するすべての代数が分配合同束を持つとき, $\mathcal{V}$ は分配合同束を持つという.

たとえば, どんな束も分配合同束を持つ. なぜならば次のことが成り立つからである. 代数 **A** における**多数決項**とは項 $t(x, y, z) \in \mathbf{T}$ であり, 任意の $a, b \in A$ について

$$t^{\mathbf{A}}(a, a, b) = t^{\mathbf{A}}(a, b, a) = t^{\mathbf{A}}(b, a, a) = a$$

を満たすものである. どんな束も多数決項を (2 つ) 持つことはすでに第 2 章でみた.

補題 10.1

多数決項を持つ代数は分配合同束を持つ.

代数 $\mathbf{A} = \langle A, \{\mathsf{f}^{\mathbf{A}}\}_{\mathsf{f} \in F}\rangle$ が**束拡張** (lattice expansion) であるとは, F の中に記号 $\mathsf{f}_\wedge, \mathsf{f}_\vee$ があり, $\langle A, \mathsf{f}^{\mathbf{A}}_\wedge, \mathsf{f}^{\mathbf{A}}_\vee\rangle$ が束になることをいう. 束に限らず, どんな束拡張も多数決項を持つ. よって上の補題より, 束拡張は分配合同束を持つ. 具体例をあげれば, 束と群の構造を併せ持つ束群 (lattice-ordered group) や束で順序づけられたベクトル空間 (Riesz 空間) などがそれにあたる.

また, 何らかの自然数 n について $x^n = x$ を満たす可換環も分配合同束を持つ.

さて, 分配合同束を持つ代数のクラスについては, 次の重要な定理が成り立つ. ここで P_u は**超積** (ultraproduct) に関する閉包演算を表す.

定理 10.2 (Jónsson 1967)

分配合同束を持つ多様クラス $\mathcal{V}$ とクラス $\mathcal{K}$ について $\mathcal{V} = \mathsf{HSP}(\mathcal{K})$ が成り立つとする. このとき $\mathcal{V}_{\mathsf{SI}} \subseteq \mathsf{HSP}_\mathsf{u}(\mathcal{K})$.

わかりやすいのは $\mathcal{K}$ が有限個の有限代数からなる場合である. このとき $\mathsf{HSP}(\mathcal{K})$ に含まれる代数は局所的に有限であることを定理 6.3 で見た. 一方で, 有限個の有限代数から超積をつくっても元の代数しか得られないので, 次のことがわかる.

系 10.3

分配合同束を持つ多様クラス $\mathcal{V}$ と有限代数の有限集合 $\mathcal{K}$ について $\mathcal{V} = \mathsf{HSP}(\mathcal{K})$ が成り立つとする. このとき $\mathcal{V}_{\mathsf{SI}} \subseteq \mathsf{HS}(\mathcal{K})$.

$\mathcal{K}$ に含まれる代数に H と S を適用しても, 元の代数より小さな代数しかつくることができない. ということは, $\mathsf{HS}(\mathcal{K})$ の中には (同型を除いて) 有限個の代数しか含まれないことになる. 定理 6.2 により多様クラスは準積既約な元により完全に決定されるから, 次のことが帰結する.

系 10.4

分配合同束を持つ多様クラス $\mathcal{V}$ が有限個の有限代数により生成されるとき, **VL**($\mathcal{V}$) は有限束である.

このような場合, **VL**($\mathcal{V}$) の構造ははっきり定まるのである. こんなふうにして, 分配合同束を持つという仮定を 1 つ加えるだけで理論は進んでいく.

合同束についてもう 1 つ大事なのは, 合成演算 $\circ$ の可換性である. 合同束 **Con**(**A**) の任意の要素 θ, φ について $\theta\circ\varphi = \varphi\circ\theta$ が成り立つとき, **A** は**可換合同束を持つ** (congruence-permutable) という. 多様クラス $\mathcal{V}$ に属するすべての代数が可換合同束を持つとき, $\mathcal{V}$ は可換合同束を持つという.

可換性のもとで $\theta \vee \varphi = \theta\circ\varphi$ が成り立つので, 合同束の構造はかなりわかりやすくなる. この性質に着目すると, 理論展開は以下のように進む.

- 多様クラス $\mathcal{V}$ が可換合同束を持つための必要十分条件は, 以下の性質を満たす項 (**Mal'tsev 項**) が存在することである.

  $$\mathcal{V} \models t(x, y, y) \approx t(y, y, x) \approx x.$$

  多数決項との類似に注意. この特徴づけにより群や環は可換合同束を持つことがわかる.

- 任意の代数 **A** について, その**中心** $Z(\mathbf{A}) \in Con(\mathbf{A})$ を自然に定義できる. $Z(\mathbf{A}) = \nabla$ を満たす代数を**アーベル代数**という. アーベル群や可換環はこの意味でアーベル代数である.

- $\mathcal{V}$ を可換合同束を持つ多様クラスとする. このとき $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ がアーベル代数であるための必要十分条件は, ある単位的環 **R** が存在して **A** が左 **R** 加群と多項式同値になることである. 一般にアーベル代数は明示的に群構造を持つとは限らないが, それでも Mal'tsev 項を巧妙に用いることで環 **R** を構成できて **R** 加群とみなせるのである.

最後の言明は, 実際にはモジュラー合同束を持つ多様クラスへと一般化できる. 分配合同束も可換合同束もモジュラーであるから, これにより分配, 可換という 2 つの方向性が統合されることになる. この辺りは普遍代数学においてもっとも美しい理論展開の 1 つであるが, いろいろと準備が必要なので本稿では割愛する.

こうして普遍代数学の冒険は続いていく. 可能な限り無前提の立場から出発し, "ひのきのぼう" だけを頼りに戦い続ける勇者の奮闘を, 講義を通して少しでも伝えられればと思う.

参考文献

[1] Clifford Bergman. *Universal Algebra: Fundamentals and Selected Topics*. CRC Press, 2012.

[2] Stanley Burris and H. P. Sankappanaver. *A Course in Universal Algebra*. Springer, 1981, available at `https://www.math.uwaterloo.ca/~snburris/htdocs/ualg.html`.

[3] George Grätzer. *Universal Algebra*, Second Edition. Springer, 1979.

[4] Ralph N. McKenzie, George F. McNulty and Walter F. Tayler. *Algebras, Lattices, Varieties Volume I*, Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, 1987.