再帰的関数論（２００５年度、慶應義塾大学文学部）

照井一成
国立情報学研究所
terui@nii.ac.jp　http://research.nii.ac.jp/~terui/recursive.html

第 I 部
再帰的関数論

1　はじめに

再帰的関数論（recursion theory）とは？
計算理論の一種。帰納的関数論とも訳される。また後に述べる事情により、しばしばより包括的な観点から計算についての研究を行う**計算可能性理論**（computability theory）と同一視される。計算可能性理論とは、ごく大雑把に言って（数についての）性質や関係、関数などを計算という観点から分析する理論である。これが再帰的関数論と呼ばれるときには、**再帰法**（recursion）による関数定義という側面が念頭に置かれていることが多い。

スコーレムらの先行研究の後、ゲーデルによる第一不完全性定理を証明において主要な道具立ての一つとして用いられた。その後エルブラン、チャーチ、ロッサー、クリーニ、チューリングらの研究により１９３０年代に大きく発展した。２０世紀後半に入り、ハードウェアとしてのコンピュータが現実味を帯びてくると、それまでのような「理念としての計算」という観点のみならず、「実践としての計算」という観点も重要になる。オートマトン理論、形式言語理論、計算の複雑さの理論（しいては計算機科学全般）などは全て計算可能性理論から派生したものと見なすことができる。

計算可能性理論で取り扱われる典型的な問い

- 計算するとはどういうことか？
- 関数が計算可能であるとはどういうことか？
- 計算不可能な関数は存在するか？
- 計算（不）可能な関数はどのように分類できるか？
- 計算（不）可能な関数はどのような性質を持つか？

ここでは主に自然数を用いた計算、自然数についての関係や関数に限定して話を進める。

論題 1.1 計算一般についての理論のはずなのに、特定の対象である自然数のみに話を限定してよいのはなぜか？

- 連続的なデータは離散的なデータで近似できる（アナログ ⇒ デジタル）。離散的なデータは全て数値化できる。

例：
写真 ⇒ スキャナで取り込む ⇒ コンピュータ内部表現＝ *010001010101000...*
文章 ⇒ テキストエディタで入力 ⇒ コンピュータ内部表現＝ *01010011110000...*

参考文献
論理学の入門書としては、哲学畑の人には [19, 18]、数学畑の人には [15] をお奨めする。より詳しく学びたい人には [7, 10] などが定評のある教科書である。再帰的関数論の歴史については、[2, 4, 5] 等が参考になる。本稿では、その他にも以下に挙げる文献を参考にする（以下のリストは随時更新する）。

参考文献

[1] R. Cori and D. Lascar (translated by D. H. Pelletier). *Mathematical Logic: A Course with Exercises*. Oxford University Press, 2001.

[2] M. Davis (editor). *The Undecidable*. Raven Press, 1965 (reprinted by Dover Publications, 1993).

[3] P. Hájek and P. Pudlák. *Metamathematics of First-Order Arithmetic*. Perspectives in Mathematical Logic, Springer-Verlag, 1994.

[4] J. van Heijenoort (editor). *From Frege to Gödel*. Harvard University Press, 1967.

[5] R. Herken (editor). *The Universal Turing Machine: A Half-Century Survey*. Springer-Verlag, 1994.

[6] S. C. Kleene. *Introduction to Metamathematics*. North-Holland, 1952.

[7] E. Mendelson. *Introduction to Mathematical Logic*, 3rd ed., Chapman & Hall/CRC, 1987.

[8] R. Murawski. *Recursive Functions and Metamathematics: Problems of Completeness and Gödel's Theorems*, Kluwer Academic Press, 1999.

[9] P. Odifreddi. *Classical Recursion Theory*, Elsevier, 1989.

[10] P. Odifreddi. *Classical Recursion Theory Volume II*, Elsevier, 1999.

[11] C. H. Papadimitriou. *Computational Complexity*. Addison-Wesley, 1994.

[12] H. Rogers, Jr. *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*. MIT Press, 1987.

[13] Shoenfield, R. *Mathematical Logic*, Addison-Wesley, 1967.

[14] Smullyan, R. *Gödel's Incomplete Theorems*. Oxford University Press, 1992. （高橋昌一郎訳『ゲーデルの不完全性定理』、丸善株式会社、1996）

[15] 小野寛晰、『情報科学における論理』、日本評論社、1994.

[16] 高橋正子、『計算論』、近代科学社、1991.

[17] 田中一之（編・著）、『数学基礎論講義』、日本評論社、1997.

[18] 戸田山和久、『論理学をつくる』、名古屋大学出版会、2000.

[19] 野矢茂樹、『論理学』、東京大学出版会、1994.

[20] 前原昭二、『数学基礎論入門』、朝倉書店、1977.

[21] 前原昭二、『記号論理入門』、日評数学選書、日本評論社、1967.

2　性質・関係・関数

性質

自然数3,7は「素数である」という性質を持つが、4,9は「素数である」という性質を持たない。いま「xが素数である」ことを$Prime(x)$と書いて表すことにすれば、$Prime(3), Prime(7)$は成り立つが、$Prime(4), Prime(9)$は成り立たない。性質の中には「女である」「国連加盟国である」など様々なものが存在するが、ここでは「素数である」「平方数である」など、自然数が持つ**数学的**性質に限定して話を進める。

論題 2.1 たとえ自然数という数学的対象についての性質であっても、必ずしも数学的な性質（数学において問題となるような性質）であるとは限らない。たとえば「長嶋の背番号である」などは数学的性質というよりも野球豆知識に属するものであろう（ところで「来年度の年末ジャンボ宝くじの当選番号である」は性質か？）。では数学的性質とは一体どのような性質のことなのだろうか？数学の言語を用いて書き下せるもののことだろうか？だとしたら数学の言語とは一体どのような言語のことなのだろうか？

論題 2.2 先ほど写真や文章などのデータも自然数として数値化できると論じたが、では写真や文章についての性質はどうだろうか？例えば「xはこいのぼりの写真（をコード化した自然数）である」や「xは夏目漱石の書いた小説（をコード化した自然数）である」は数学的性質と見なすことができるのだろうか？（というよりも両者はそもそも「性質」なのだろうか？）

　これから先「xは論理式（をコード化した自然数）である」、「xは証明図（をコード化した自然数）である」といった性質が頻繁に現れるが、前者と後者は区別されるべきものなのだろうか？もしもそうだとしたら、両者を区別するものは何なのだろうか？

　数学においては、性質はしばしばその外延に置き換えて考えられる。性質$P(x)$の**外延**（extension）とは$P(n)$が成り立つような自然数n全体の集まりのことである。たとえば$Prime(x)$の外延とは集合$\{2,3,5,7,11,\ldots\}$のことであり、「xは長嶋の背番号である」の外延は$\{3,33\}$である。両者は全く同資格の数学的集合である。

　ある自然数nが性質Pを持つことと、nがPの外延に属することは同値である。このことが、性質を外延で置き換えることを正当化する一つの根拠になっている。数学の文脈で性質に言及するとき、たとえば、「自然数nが性質Pを持つかどうかは決定可能である」というときには、実際には「nがPの外延に属するかどうかは決定可能である」ことを意味しているのである。

論題 2.3 性質を外延と同一視することには次のような困難が伴う。例えば、「xより大きな双子素数は無限に存在する」という性質について考える。明らかに何らかのnについてこの性質が成り立つとき、かつそのときに限り全ての自然数についてこの性質は成り立つ。ゆえにこの性質の外延は自然数全体の集合Nそのものであるか空集合$\emptyset$かのどちらかである。しかしどちらなのかは今現在のところわかっていない（数論の最大の未解決問題の一つである）。

　さて、Nも$\emptyset$も後に定義する意味での決定可能な集合である。ゆえに我々の規約に従えば、「xより大きな双子素数は無限に存在する」という性質は決定可能であることになる。

そもそも双子素数が無限に存在するかどうかはわかっていないにも関わらずである。一体どうしたものだろうか？

関係

3 と 5 は「（前者は後者より）小さい」という関係を満たす。5 と 3 は「（前者は後者より）小さい」という関係を満たさない。このことは次のように言い換えることができる。いま「x は y より小さい」ことを $Small(x,y)$ と書いて表すことにすれば、$Small(3,5)$ は成り立つが、$Small(5,3)$ は成り立たない。$Small(x,y)$ は 2 つの項 x,y を伴うため **2 項関係**と言われる。一方、「x は y と z の公約数である」という関係は 3 つの項 x,y,z を伴うため 3 項関係と言われる。一般に任意の自然数 k について k **項関係** $R(x_1,\ldots,x_k)$ を考えることができる。性質とは 1 項関係のことに他ならない。

練習問題 2.4　4 項関係の例を挙げよ。

性質の場合と同様に、関係についてもその外延を考えることができる。そして性質の場合と同様、関係もしばしば外延に置き換えて取り扱われる。2 項関係 $R(x,y)$ の**外延**とは、$R(n,m)$ が成り立つような二つの自然数の組 $\langle n,m\rangle$ 全体の集まりのことである。例えば、$Small(x,y)$ の外延には、$\langle 0,1\rangle,\langle 0,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 35,539\rangle$ などが含まれるが、$\langle 1,0\rangle,\langle 58,23\rangle$ などは含まれない。より一般的に、k 項関係 $R(x_1,\ldots,x_k)$ の外延とは、$R(n_1,\ldots,n_k)$ が成り立つような k 個の自然数の組 $\langle n_1,\ldots,n_k\rangle$ 全体の集まりのことである。

練習問題 2.5　*3* 項関係「x は y と z の公約数である」の外延に含まれる自然数の 3 つ組の例をあげよ。またそれに含まれない自然数の 3 つ組の例をあげよ。

関数

「$x+y=15$」という 2 項関係を考えてみる。例えば $x=3,4,5$ に対しては $y=12,11,10$ というように「$x+y=15$」という関係を満たす y が唯一つ存在するが、$x>15$ に対してはそのような y は（自然数の範囲の中には）存在しない。次に、「$x+y>15$」という 2 項関係を考えてみる。今度はどのような x に対しても「$x+y>15$」という関係を満たす y は常に存在するが、しかしそのような y は一つには定まらず、無数に存在する。

それに対して、「$x+15=y$」という関係の場合には、どのような x に対しても「$x+15=y$」を満たす y は必ず存在し、しかも唯一つに定まる。このような性質を満たす関係のことを関数という。上の関係の場合には、一つのインプット x に対して値 y が定まるので 1 項関数と呼ばれる（やや紛らわしいが、2 項関係がある性質を満たす場合、1 項関数とよばれるのである）。

より正確には、（自然数上の）**1 項関数** f とは、2 項関係であり、どのような自然数 n に対してもある自然数 m が唯一つ存在し、$\langle n,m\rangle$ が関係 f を満たすようなもののことである。$\langle n,m\rangle$ が関係 f を満たすとき、$f(n)=m$ と書く。

一般に k **項関数** f とは、$k+1$ 項関係であり、どのような k 個の自然数の組 $\langle n_1,\ldots,n_k\rangle$ に対してもある自然数 m が唯一つ存在し、$\langle n_1,\ldots,n_k,m\rangle$ が関係 f を満たすようなもののことである。このとき $f(n_1,\ldots,n_k)=m$ と書く。

例えば足し算は（2 項）関数である。なぜならばどんな n_1 と n_2 が与えられても、$n_1+n_2=m$ を満たす自然数 m が唯一つ存在するからである。一方、引き算は（自然数上の）関数

ではない。なぜならば $n_1 < n_2$ のときには $n_1 - n_2 = m$ を満たす自然数 m が存在しないからである。

関係と同様、関数もしばしばその外延（**グラフ**と呼ばれる）に置き換えて取り扱われる。本稿でもこの方針に従うことにする。

3 簡単な集合論の準備

関数の理論を厳密に展開するためには、集合論の記法や基本概念を導入しておくと後々便利である。ただし本稿では専ら自然数上の集合についてのみ論じるので、集合論一般について説明する必要はない。ここでは自然数上の関数について論じる上で必要最低限の事柄を説明することにする。

集合論におけるもっとも基本的な概念は「対象 a が集合 A の要素である」という関係であり、このことを

$$a \in A$$

というように記す。「a は A の元である」、「a は A に属する」というような言い方もする。これの否定 (「対象 a は集合 A の要素ではない」) は

$$a \notin A$$

と記す。本稿では対象ということで主に**自然数** $0, 1, 2, \ldots$ が想定されている。自然数全体の集合を $\mathbf{N}$ と書くことにする。すなわち、$0 \in \mathbf{N}$, $1 \in \mathbf{N}$, $2 \in \mathbf{N}, \ldots$ である。

対象 $a_1, \ldots, a_k$ からなる集合を

$$\{a_1, \ldots, a_k\}$$

と記す。すると、もちろん、$a_i \in \{a_1, \ldots, a_k\}$ が各 $1 \leq i \leq k$ について成り立つ。

$\varphi(x)$ を自然数に関する述語とするとき、$\varphi(x)$ を満たす自然数全ての集合（$\varphi(x)$ の外延）を

$$\{x|\varphi(x)\}$$

と書いて表す。すると任意の $n \in \mathbf{N}$ について、

$$\varphi(n) \Longleftrightarrow n \in \{x|\varphi(x)\}$$

が成り立つ。すなわち、$\varphi(n)$ が成り立つことと述語 $\varphi(x)$ の外延に n が属することは同値である。

集合論の重要な原理の一つに**外延性の原理** (extensionality principle) と呼ばれるものがある。これは、「要素がすべて等しいような 2 つの集合は等しい」「集合の同一性はその要素のみにより定められる」ことを述べるものであり、より形式的には、

$$A = B \Longleftrightarrow \text{for all } x(x \in A \text{ iff } x \in B)$$

と表される。

空集合 (the empty set) とは、元を一つも含まない集合のことであり、ϕ と記される。空集合は、

$$\text{For all } x(x \notin \phi)$$

という性質を持つ。（この性質を持つ集合はみな同一となることが外延性の原理より導かれる。つまり、空集合はただ一つしか存在しない。）

「集合 A は集合 B の**部分集合** (subset) である」ことを $A \subseteq B$ と書く。正確な定義は、

$$A \subseteq B \Longleftrightarrow \text{ for all } x(x \in A \text{ implies } x \in B)$$

である。特に任意の集合 A について

$$\phi \subseteq A$$

であることは容易に確かめられる。また、外延性の原理より、

$$A \subseteq B \text{ and } B \subseteq A \Longleftrightarrow A = B$$

が成り立つ。

集合 A と B の**交わり** (intersection)、**和** (union)、**差** (difference) はそれぞれ $A \cap B$、$A \cup B$、$A - B$ と表され、次のように定義される。

$$a \in A \cap B \Longleftrightarrow a \in A \text{ and } a \in B$$

$$a \in A \cup B \Longleftrightarrow a \in A \text{ or } a \in B$$

$$a \in A - B \Longleftrightarrow a \in A \text{ and } a \notin B.$$

すると次の性質が成り立つ。

1. $A \cap B \subseteq A$.
2. $A \subseteq A \cup B$.
3. $C \subseteq A$ and $C \subseteq B \Longrightarrow C \subseteq A \cap B$.
4. $A \subseteq C$ and $B \subseteq C \Longrightarrow A \cup B \subseteq C$.

対象 a と b の**順序対** (ordered pair) を $\langle a, b\rangle$ と記す。順序対について重要なのは、

$$\langle a, b\rangle = \langle a', b'\rangle \Longleftrightarrow a = a' \text{ and } b = b'$$

という性質である。$\{a, b\}$ と $\langle a, b\rangle$ の違いに注意。外延性の原理より $\{a, b\} = \{b, a\}$ であるが、一般に $\langle a, b\rangle = \langle b, a\rangle$ であるとは限らない。

順序対の概念は、3 つ組 $\langle a_1, a_2, a_3\rangle$、4 つ組 $\langle a_1, a_2, a_3, a_4\rangle$ 等に自然に拡張できる。特に 1 つ組 $\langle a_1\rangle$ とは a_1 そのもののことであるとする。

自然数の k 個組全ての集合のことを $\mathbf{N}^k$ と書いて表す。すなわち、

$$\mathbf{N}^k = \{\langle n_1, \ldots, n_k\rangle \mid n_1 \in \mathbf{N}, \ldots, n_k \in \mathbf{N}\}$$

あるいは、

$$\langle n_1, \ldots, n_k\rangle \in \mathbf{N}^k \Longleftrightarrow n_1 \in \mathbf{N}, \ldots, n_k \in \mathbf{N}$$

と考えてもよい。上の取り決めにより、$\mathbf{N}^1 = \mathbf{N}$ である。

自然数上の k **項関係** R とは、$\mathbf{N}^k$ の部分集合のことである（前章の関係とその外延についての議論を参照）。特に 1 項関係 $R \subseteq \mathbf{N}$ とは $\mathbf{N}$ の部分集合のことであり、それはすなわち自然数についての**性質**に他ならない（前章の性質とその外延についての議論を参照）。$\langle n_1, \ldots, n_k\rangle \in R$ が成り立つとき、$R(n_1, \ldots, n_k)$ と書く。また、R が 2 項関係の時には、$\langle n_1, n_2\rangle \in R$ のことを $n_1\ R\ n_2$ とも書く（infix notation）。

例えば、大小関係 $<$ は集合論的には 2 項関係 $\{\langle x, y\rangle|$ y は x よりも大きい $\}$ と表現できる。これは $\mathbf{N}^2$ の部分集合であり、$\langle 1, 2\rangle$、$\langle 3, 7\rangle$ 等を要素として含む。一般に $\langle 1, 2\rangle \in <$ などと書く代わりに infix notation を用いて $1 < 2$ と書く。

自然数上の k **項関数** f とは、$\mathbf{N}^{k+1}$ の部分集合で次の性質を満たすもののことである：

(*) 任意の $\langle n_1, \ldots, n_k \rangle \in \mathbf{N}^k$ について $\langle n_1, \ldots, n_k, m \rangle \in f$ となるような $m \in \mathbf{N}$ がただ一つ存在する。

このただ一つ存在する m のことを $\langle n_1, \ldots, n_k \rangle$ に対する f の**値** (value) と呼び、$f(n_1, \ldots, n_k)$ と書く。f が（自然数上の）k 項関数であることを、

$$f : \mathbf{N}^k \longrightarrow \mathbf{N}$$

と書いて表す。

例えば、足し算 $+$ は集合論的には 2 項関数 $\{\langle x, y, z \rangle | \ x+y = z\}$ と表現できる。これは確かに関数の定義に合致しており、実際、どのような $\langle n_1, n_m \rangle$ が与えられても、$\langle n_1, n_2, m \rangle \in +$ を満たす m が唯一つ存在する。この値 m とは $n_1 + n_2$ のことに他ならない。

上の定義の特別な場合として、0 **項関数**とは自然数のことであると取り決めておく。すなわち、$0, 1, 2 \ldots$ は自然数であると同時に 0 項関数でもある。

自然数上の k **項部分関数** f とは、$\mathbf{N}^{k+1}$ の部分集合で次の性質を満たすもののことである：

(*) $\langle n_1, \ldots, n_k, m \rangle \in f$ となるような $m \in \mathbf{N}$ が存在するときには、そのような m は唯一つに限る。

$\langle n_1, \ldots, n_k \rangle$ に対してそのような m が存在するとき、関数 f は $\langle n_1, \ldots, n_k \rangle$ において**定義されている**という。そのような m を $\langle n_1, \ldots, n_k \rangle$ に対する f の**値** (value) と呼び、$f(n_1, \ldots, n_k)$ と書いて表す。

関数と部分関数の違いは、関数が全ての $\langle n_1, \ldots, n_k \rangle \in \mathbf{N}^k$ に対して定義されているのに対して、部分関数はそうとは限らないということである（部分関数と区別するために関数はしばしば**全域関数**と呼ばれる）。一方で、ある $\langle n_1, \ldots, n_k \rangle$ に対して部分関数が定義されているときには、その値は唯一つであるという点で関数と共通している。

例えば、引き算 $-$ は集合論的には 2 項部分関数 $\{\langle x, y, z \rangle | \ x - y = z\}$ と表現できる。$n \geq m$ を満たす $\langle n, m \rangle \in \mathbf{N}^2$ に対して引き算は定義されており、その値は $n - m$ である。そうでないような $\langle n, m \rangle \in \mathbf{N}^2$ に対しては引き算は定義されていない。同様に、自然数上の割り算も 2 項部分関数と見なすことができる。

自然数上の集合 $R \subseteq \mathbf{N}$ が与えられたとき、その**特性関数** (characteristic function) $\chi_R : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ とは次のように定義される関数のことである：

$$\begin{aligned}\chi_R(n) &= 1 \ (R(n) \text{ が成り立つとき}) \\ &= 0 \ (R(n) \text{ が成り立たないとき})\end{aligned}$$

例えば、集合 $Even = \{x | \ x \text{ は偶数である }\}$ の特性関数 χ_{Even} とは次のような関数のことである：

$$\begin{aligned}\chi_{Even}(n) &= 1 \ (n \text{ が偶数のとき}) \\ &= 0 \ (n \text{ が奇数のとき})\end{aligned}$$

より一般的に、自然数上の k 項関係 $R \subseteq \mathbf{N}^k$ が与えられたとき、その特性関数 $\chi_R : \mathbf{N}^k \longrightarrow \mathbf{N}$ は次のように定義される：

$$\begin{aligned}\chi_R(n_1, \ldots, n_k) &= 1 \ (R(n_1, \ldots, n_k) \text{ が成り立つとき}) \\ &= 0 \ (R(n_1, \ldots, n_k) \text{ が成り立たないとき})\end{aligned}$$

逆に、値が常に 0 か 1 であるような k 項関数 f （そのような関数を $f : \mathbf{N}^k \longrightarrow \{0,1\}$ と書いて表す）が与えられたとき、集合

$$\hat{f} = \{\langle x_1, \ldots, x_k \rangle | f(x_1, \ldots, x_k) = 1\}$$

を考えることができる。$\hat{f}$ は自然数上の k 項関係であり、任意の $R \subseteq \mathbf{N}^k$、任意の $f : \mathbf{N}^k \longrightarrow \{0,1\}$ について次の性質が成り立つ：

$$\hat{\chi}_R = R, \quad \chi_{\hat{f}} = f$$

このことから、自然数上の k 項関係の集合と、$\{0,1\}$ を値域とする自然数上の関数（$f : \mathbf{N}^k \longrightarrow \{0,1\}$ となる関数）の集合は一対一に対応することがわかる。

練習問題 3.1 $\hat{\chi}_R = R$, $\chi_{\hat{f}} = f$ が成り立つことを確かめよ。

4　原始再帰的関数

再帰的関数を研究する手始めとして、本章ではまず、より基本的な原始再帰的関数の概念を導入する。また原始再帰的関係についても言及する。原始再帰的関数とは、基本的な関数から始めて関数合成や原始再帰法（primitive recursion）を繰り返し適用することにより得られる関数のことである。そのようにして得られる関数が計算可能であることは比較的容易に理解できる。基本的関数はみな計算可能であることが明らかなものばかりであり、関数合成や原始再帰法は計算可能性を保存するからである。

原始再帰法による関数構成が計算可能性を保存するという点について簡単に補足しておく。原始再帰法とは数論における漸化式（recursive formula）による数列の定義を一般化したものである。漸化式による数列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ の定義とは例えば

$$\begin{aligned} a_0 &= 5 \\ a_{n+1} &= 2a_n + 3 \end{aligned}$$

のようなもので、このとき $a_0 = 5$ であることは定義通りであるし、$a_1 = 13$、$a_2 = 29$、$a_3 = 61$ であることは第二式を繰り返し適用すればすぐにわかる。一般に、どんな a_n の値も第二式を必要な回数だけ繰り返すことにより求めることができる。原始再帰法とはこのような数列（関数）の定義法を一般化したものに他ならず、そのようにして定義される関数が計算可能であることは同様の議論により理解することができる。

いかに基本的であるとはいえ、原始再帰的関数のクラスは広大である。実際、数論において現れる関数（関係）やコンピュータプログラマが取り扱う関数（関係）の大部分は原始再帰的関数（関係）であるといえる。にもかかわらず、後ほど例を挙げるように、全ての計算可能な関数が原始再帰的であるわけではない。直感的に言って、原始再帰的関数については「インプットが与えられたならばそのインプットの大きさから計算にどれくらいの時間がかかるか（何兆世紀かかるか）」が比較的容易に見積り可能である。先ほどの漸化式の場合のように、何回第二式（ステップ関数）を繰り返せばよいかが事前に見積り可能だからである。一方、世の中には計算可能であっても計算にどれくらいの時間がかかるか（いつ計算が終わるか）が全く予想できない関数というものも存在する。そのような関数はたとえ計算可能であっても原始再帰的ではありえない。

4.1　原始再帰的関数

定義 4.1 原始再帰的関数 *(primitive recursive functions)* の集合は次のように帰納的に定義される。

1. **ゼロ関数** *(zero function)*：$\mathsf{zero}^n(x_1, \ldots, x_n) = 0$ は原始再帰的関数である。ここで $0 \leq n$。

2. **射影関数** *(projection functions)*：$\mathsf{proj}^n_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ は原始再帰的関数である。ここで $1 \leq i \leq n$。

3. **後続者関数** *(successor function)*：$\mathsf{suc}(x) = x + 1$ は原始再帰的関数である。

4. **合成** *(composition)*：g が m 項原始再帰的関数であり、$h_1, \ldots, h_m$ が n 項原始再帰的関数ならば、

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g(h_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_m(x_1, \ldots, x_n))$$

により定義される関数 f は原始再帰的関数である。ここで $1 \leq m, 0 \leq n$。

5. **原始再帰法** *(primitive recursion)*：g が n 項原始再帰的関数であり、h が $n+2$ 項原始再帰的関数ならば、

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n, 0) &= g(x_1, \ldots, x_n) \\ f(x_1, \ldots, x_n, y+1) &= h(x_1, \ldots, x_n, y, f(x_1, \ldots, x_n, y)) \end{aligned}$$

により定義される $n+1$ 項関数 f は原始再帰的関数である。ここで $0 \leq n$。g は**基底関数** *(base function)* と呼ばれ、h は**（再帰）ステップ関数** *(recursion step function)* と呼ばれる。また、h の第 $n+1$ 項（y が代入されている項）は**後退項** *(regressive argument)* と呼ばれ第 $n+2$ 項（$f(x_1, \ldots, x_n, y)$ が代入されている項）は**再帰項** *(recursive argument)* と呼ばれる。

以上の定義により、足し算 $x+y$ は原始再帰的関数となる。このことは次のように確かめることができる。

- proj_1^1 は 2. により（1 項）原始再帰的関数である。
- proj_3^3 は 2. により（3 項）原始再帰的関数である。
- suc は 3. により（1 項）原始再帰的関数である。
- $h_0(x_1, x_2, x_3) = \mathsf{suc}(\mathsf{proj}_3^3(x_1, x_2, x_3))$ により定義される 3 項関数 h_0 は 4. により原始再帰的関数である。
- 次のように定義される 2 項関数 plus は 5. により原始再帰的関数である：

$$\begin{aligned} \mathsf{plus}(x, 0) &= \mathsf{proj}_1^1(x) \\ \mathsf{plus}(x, y+1) &= h_0(x, y, \mathsf{plus}(x, y)) \end{aligned}$$

このようにして得られる plus は確かに足し算を表す。例えば、$\mathsf{plus}(3, 2)$ を定義に従って

等式変形すると、次のようになる：

$$\begin{aligned}\mathsf{plus}(3,2) &= h_0(3,1,\mathsf{plus}(3,1)) \\ &= \mathsf{suc}(\mathsf{proj}^3_3(3,1,\mathsf{plus}(3,1))) \\ &= \mathsf{suc}(\mathsf{plus}(3,1)) \\ &= \mathsf{suc}(h_0(3,0,\mathsf{plus}(3,0))) \\ &= \mathsf{suc}(\mathsf{suc}(\mathsf{proj}^3_3(3,0,\mathsf{plus}(3,0)))) \\ &= \mathsf{suc}(\mathsf{suc}(\mathsf{plus}(3,0))) \\ &= \mathsf{suc}(\mathsf{suc}(\mathsf{proj}^1_1(3))) \\ &= \mathsf{suc}(\mathsf{suc}(3)) \\ &= \mathsf{suc}(4) \\ &= 5\end{aligned}$$

ゆえに $\mathsf{plus}(3,2) = 5$ であることが確かめられた。plus が足し算を表すことをより正確に検証するためには、数学的帰納法による証明を行う必要がある（次の練習問題の 2. を参照）。

練習問題 4.2

1. $\mathsf{plus}(4,3) = 7$ となることを確かめよ。
2. *(*)* 任意の自然数 n, m について、$\mathsf{plus}(n,m) = n + m$ となることを証明せよ。［ヒント：m に関する数学的帰納法による。］

同様にして、掛け算 $x \cdot y$ が原始再帰的関数であることは次のようにして確かめることができる。

- zero^1 は 1. により（1 項）原始再帰的関数である。
- plus は先ほど示したとおり（2 項）原始再帰的関数である。
- proj^3_1, proj^3_3 は 2. により（3 項）原始再帰的関数である。
- $h_1(x_1,x_2,x_3) = \mathsf{plus}(\mathsf{proj}^3_1(x_1,x_2,x_3), \mathsf{proj}^3_3(x_1,x_2,x_3))$ により定義される 3 項関数 h_1 は 4. により原始再帰的関数である。
- 次のように定義される 2 項関数 times は 5. により原始再帰的関数である：

$$\begin{aligned}\mathsf{times}(x,0) &= \mathsf{zero}^1(x) \\ \mathsf{times}(x,y+1) &= h_1(x,y,\mathsf{times}(x,y))\end{aligned}$$

練習問題 4.3

1. $\mathsf{times}(4,3) = 12$ となることを確かめよ。
2. *(*)* 任意の自然数 n, m について、$\mathsf{times}(n,m) = n \cdot m$ となることを証明せよ。［ヒント：m に関する数学的帰納法による。］

3. べき乗関数 x^y が原始再帰的関数であることを確かめよ。

4. 階乗関数 $x!$ が原始再帰的関数であることを確かめよ。

定義 4.1 における原始再帰的関数の定義はコンパクトではあるが、いろいろな関数の原始再帰性を示すときにはやや使いづらい。そこでそのような際に便利な補題をいくつか証明しておく。

補題 4.4 f が原始再帰的関数ならば、次のように定義される関数 f' も原始再帰的である：

$$f'(x_1,\ldots,x_n) = f(x_{i_1},\ldots,x_{i_m})$$

ここで $i_1,\ldots,i_m$ はそれぞれ $\{1,\ldots,n\}$ の要素である。

最後の条件が述べているのは、右辺に現れる変数は全て左辺にも現れるということである。この条件が成り立つような等式により定義される限り、f' は常に原始再帰的となるというのが上の補題の主張である。

例えば次のように定義される平方関数 square は原始再帰的であることがわかる：

$$\mathsf{square}(x) = \mathsf{times}(x,x)$$

また、y の値に関係なく常に $2x$ を返す関数 twice′ も原始再帰的であることがわかる：

$$\mathsf{twice}'(x,y) = \mathsf{plus}(x,x)$$

証明 f' は f と $\mathsf{proj}^n_{i_1},\ldots,\mathsf{proj}^n_{i_m}$ から合成により定義することができる：

$$f'(x_1,\ldots,x_n) = f(\mathsf{proj}^n_{i_1}(\vec{x}),\ldots,\mathsf{proj}^n_{i_m}(\vec{x}))$$

ここで $\vec{x} = x_1,\ldots,x_n$。ゆえに f' は原始再帰的である。 ■

上の補題の帰結として、次のような操作は原始再帰的関数を構成する際に自由に行ってもよいことになる：$f(x_1,\ldots,x_n)$ が原始再帰的関数であるとするならば、次のように定義される f_1, f_2, f_3 も原始再帰的関数である。

1. 余剰項の追加（weakening）：$f_1(x_1,\ldots,x_n,y) = f(x_1,\ldots,x_n)$

2. 同一項の複数回使用（contraction）：$f_2(x_1,\ldots,x_{n-2},y) = f(x_1,\ldots,x_{n-2},y,y)$

3. 項の順番の入れ替え（exchange）：$f_3(x_1,\ldots,x_{n-2},y,z) = f(x_1,\ldots,x_{n-2},z,y)$

上の補題のさらなる帰結として、合成や原始再帰法は次のように制限の緩和された、より使いやすい形と置き換えることができることになる：

補題 4.5

1. **自由合成**：$\vec{y}, \vec{z}\vec{w}$ を変数の列とする。g, h が原始再帰的ならば、次のように定義される関数 f も原始再帰的である：

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g(\vec{y}, h(\vec{z}), \vec{w})$$

ここで右辺に現れる変数 $\vec{y}, \vec{z}, \vec{w}$ はみな左辺にも現れる（すなわち $x_1, \ldots, x_n$ のどれかと等しい)。

2. **自由原始再帰法**：g, h が原始再帰的関数ならば、次のように定義される関数 f も原始再帰的である：

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n, 0) &= g(\vec{z}) \\ f(x_1, \ldots, x_n, y+1) &= h(\vec{w}, y, f(x_1, \ldots, x_n, y)) \end{aligned}$$

ここで右辺に現れる変数 $\vec{z}, \vec{w}$ はそれぞれ $x_1, \ldots, x_n$ のどれかである。さらに、下式右辺において、再帰項 $f(y, x_1, \ldots, x_n)$ と後退項 y は実際には何度現れていてもよく、どの順でどこに現れていてもよく、どちらか一方が（または両方とも）現れていなくともよい。

証明　1. 上の補題より、次のように定義される g', h' は原始再帰的である：

$$\begin{aligned} g'(x_1, \ldots, x_n, v) &= g(\vec{y}, v, \vec{w}) \\ h'(x_1, \ldots, x_n) &= h(\vec{z}) \end{aligned}$$

f は g' と h' と $\mathsf{proj}^n_1, \ldots, \mathsf{proj}^n_n$ から合成により定義することができる：

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g'(\mathsf{proj}^n_1(\vec{x}), \ldots, \mathsf{proj}^n_n(\vec{x}), h'(\vec{x}))$$

ここで $\vec{x} \equiv x_1, \ldots, x_n$ である。ゆえに f は原始再帰的である。
2. 練習問題とする。 ■

すなわち、合成により関数 $f(x_1, \ldots, x_n)$ を定義する場合、$x_1, \ldots, x_n$ の中には右辺では使われない変数があってもよいし、何度も使われる変数があってもよい。また、変数が使われる順番は関係ない。原始再帰法により関数 $f(y, x_1, \ldots, x_n)$ を定義する場合にも $x_1, \ldots, x_n$ について同様のことが成り立つ。加えて、原始再帰法による定義の第二式においては、再帰項や後退項は用いても用いなくともよい。

自由原始再帰法を使えば、足し算、掛け算が原始再帰的であることは直接的に示すことができる：

$$\begin{aligned} \mathsf{plus}(x, 0) &= x \\ \mathsf{plus}(x, y+1) &= \mathsf{suc}(\mathsf{plus}(x, y)) \\ \mathsf{times}(x, 0) &= 0 \\ \mathsf{times}(x, y+1) &= \mathsf{plus}(x, \mathsf{times}(x, y)) \end{aligned}$$

第一式右辺における x は $\mathsf{proj}^1_1(x)$ の略記であり、第三式右辺における 0 は zero^0 の略記である（zero^0 は 0 項の関数と見なされている点に注意)。以下、同様の略記を断りなく用い

る。第二式、第四式においては後退項 y は使われていない。このような定義によっても原始再帰的関数が得られることは、上の補題により保証されている。

今後は通常の表記法に従って、$\mathsf{plus}(x,y)$, $\mathsf{times}(x,y)$ を $x+y$, $x\cdot y$ と書く。以後同様の infix notation を断りなく用いることにする。また、$\vec{x},\vec{y}$ などのベクトル表記は常に変数の列を表すものとする。

命題 4.6 以下に挙げる関数は全て原始再帰的である。

1. 定数関数 *(constant functions)*：各 $p,n\geq 0$ について、$\mathsf{const}^n_p(x_1,\ldots,x_n)=p$。

2. 前者関数 *(predecessor function)*：

$$
\begin{aligned}
\mathsf{pred}(0) &= 0\\
\mathsf{pred}(y+1) &= y
\end{aligned}
$$

3. 引き算の改定版 *(modified subtraction)*：

$$
\begin{aligned}
x \dot{-} y &= x-y \quad (x\geq y\text{ のとき})\\
&= 0 \quad (x<y\text{ のとき})
\end{aligned}
$$

4. 正数テスト：

$$
\begin{aligned}
\mathsf{pos?}(0) &= 0\\
\mathsf{pos?}(y+1) &= 1
\end{aligned}
$$

5. ゼロテスト：

$$
\begin{aligned}
\mathsf{zero?}(0) &= 1\\
\mathsf{zero?}(y+1) &= 0
\end{aligned}
$$

6. 差：$|x-y|$

証明 1. $\mathsf{const}^n_p(\vec{x})=\underbrace{\mathsf{suc}(\cdots\mathsf{suc}}_{p\ times}(\mathsf{zero}(\vec{x}))\cdots)$。
2. 自由原始再帰法により定義されているので明らか。第二式右辺においては、再帰項は用いられず、後退項のみが用いられている点に注意。より正確に書けば、$\mathsf{pred}(y+1)=\mathsf{proj}^2_1(y,\mathsf{pred}(y))$ となる。
3. 自由原始再帰法により次のように定義できる：

$$
\begin{aligned}
x\dot{-}0 &= x\\
x\dot{-}(y+1) &= \mathsf{pred}(x\dot{-}y)
\end{aligned}
$$

4. $\mathsf{pos?}(y)=y\dot{-}\mathsf{pred}(y)$。
5. $\mathsf{zero?}(y)=1\dot{-}\mathsf{pos?}(y)$。
6. $|x-y|=(x\dot{-}y)+(y\dot{-}x)$。 ■

練習問題 4.7 *(*)* 最大値関数 $\mathsf{max}(x,y)$ （x と y のうち大きい方を返す関数)、最小値関数 $\mathsf{min}(x,y)$ （x と y のうち小さい方を返す関数）が原始再帰的関数であることを示せ。［ヒント：$+$ と $\dot{-}$ を合成する。］

命題 4.8 $n+1$ 項原始再帰的関数 $f(\vec{x},y)$（ここで $\vec{x}\equiv x_1,\ldots,x_n$）が与えられたとき、次のように定義される関数も $n+1$ 項原始再帰的関数である：

1. **限定和** *(bounded sum)*：

$$\sum_{y<z} f(\vec{x},y) = f(\vec{x},0)+f(\vec{x},1)+\cdots+f(\vec{x},z-1)$$

ここで左辺の y は束縛されているものと考える。すなわち $\sum_{y<z} f(\vec{x},y)$ は $n+1$ 個の項 $\vec{x},z$ についての関数である。また、$z=0$ のときは、$\sum_{y<z} f(\vec{x},y)=0$ とする。

2. **限定積** *(bounded product)*：

$$\prod_{y<z} f(\vec{x},y) = f(\vec{x},0)\cdot f(\vec{x},1)\cdots f(\vec{x},z-1)$$

$z=0$ のときは、$\prod_{y<z} f(\vec{x},y)=1$ とする。

証明 1. 次のように（h をステップ関数として）原始再帰法を用いて定義することができる：

$$\begin{aligned}
h(\vec{x},w_1,w_2) &= \mathsf{plus}(w_2,f(\vec{x},w_1))\\
\sum_{y<0} f(\vec{x},y) &= 0\\
\sum_{y<z+1} f(\vec{x},y) &= h(\vec{x},z,\sum_{y<z} f(\vec{x},y))
\end{aligned}$$

第一式と第三式を組み合わせると、

$$\begin{aligned}
\sum_{y<z+1} f(\vec{x},y) &= h(\vec{x},z,\sum_{y<z} f(\vec{x},y))\\
&= \mathsf{plus}(\sum_{y<z} f(\vec{x},y), f(\vec{x},z))
\end{aligned}$$

となる。これと第二式から、どんな $\vec{n},m\in\mathbf{N}$ についても

$$\sum_{y<m} f(\vec{n},y) = f(\vec{n},0)+f(\vec{n},1)+\cdots+f(\vec{n},m-1)$$

となることがわかる。
2. 練習問題とする。 ■

練習問題 4.9

1. $\sum_{y<3}\mathsf{suc}(y)=6$ となることを確かめよ。

2. $\prod_{y<2}\mathsf{square}(y+1)=4$ となることを確かめよ。

4.2 原始再帰的関係

定義 4.10 原始再帰的関係 *(primitive recursive relation)* とは、特性関数 χ_R が原始再帰的であるような関係 $R \subseteq \mathbf{N}^k$ のことである。

命題 4.11 大小関係 $x < y$、同値関係 $x = y$ は原始再帰的である。

証明 $x < y$ の特性関数は $\mathsf{pos?}(y \dot{-} x)$ に他ならない。すなわち、$\chi_<(x, y) = \mathsf{pos?}(y \dot{-} x)$ である。実際、任意の $n, m \in \mathbf{N}$ について、

$$\begin{aligned} \mathsf{pos?}(m \dot{-} n) &= 1 \quad (n < m \text{ のとき}) \\ &= 0 \quad (n \not< m \text{ のとき}) \end{aligned}$$

が成り立つ。関数合成により $\mathsf{pos?}(y \dot{-} x)$ は原始再帰的関数なので、定義により $x < y$ は原始再帰的関係である。また、$x = y$ の特性関数は $\mathsf{zero?}(x \dot{-} y) \cdot \mathsf{zero?}(y \dot{-} x)$ と書ける（練習問題：このことを確かめよ）。これは原始再帰的関数なので、$x = y$ は原始再帰的関係である。 ■

k 項原始再帰的関係 R と自然数 $n_1, \dots, n_k \in \mathbf{N}$ が与えられたとき、$R(n_1, \dots, n_k)$ が成り立つかどうかは機械的な手続により有限時間で判定可能である（このことを関係 R は**決定可能である** (decidable) という）。そのためには、R の特性関数 χ_R について、$\chi_R(n_1, \dots, n_k)$ の値を求めればよい。χ_R は原始再帰的関数であり、ゆえに $\chi_R(n_1, \dots, n_k)$ の値は常に有限時間で計算することができる。もしも値 1 が得られれば、$R(n_1, \dots, n_k)$ は成り立つし、そうでなければ $R(n_1, \dots, n_k)$ は成り立たない。

次の命題は、原始再帰的関係と原始再帰的関数を（自由）合成して得られる関係は原始再帰的になることを示している：

命題 4.12 原始再帰的関係 $R \subseteq \mathbf{N}^{k+1}$、原始再帰的関数 $f : \mathbf{N}^l \longrightarrow \mathbf{N}$ が与えられたとき、

$$R'(\vec{x}, \vec{y}) \text{ が成り立つ} \iff R(\vec{x}, f(\vec{y})) \text{ が成り立つ}$$

により定義される関係 $R' \subseteq \mathbf{N}^{k+l}$ は原始再帰的である。

証明 R' の特性関数は自由合成により、$\chi_{R'}(\vec{x}, \vec{y}) = \chi_R(\vec{x}, f(\vec{y}))$ と定義できる。ゆえに原始再帰的。 ■

この命題により、$x + y < z$ や $x + 4 = 2 \cdot x$ などは原始再帰的関係であることがわかる。なぜならば、これらは原始再帰的関係 $<, =$ と原始再帰的関数 $+, \cdot$ を合成して得られる関係だからである。

命題 4.13 関係 $R, S \subseteq \mathbf{N}^k$ が原始再帰的のとき、次のように定義される関係 $\neg R$, $R \wedge S$, $R \vee S$ も原始再帰的である：

$$\begin{aligned} \neg R(\vec{x}) \text{ が成り立つ} &\iff R(\vec{x}) \text{ が成り立たない。} \\ R \wedge S(\vec{x}) \text{ が成り立つ} &\iff R(\vec{x}), S(\vec{x}) \text{ が共に成り立たつ。} \\ R \vee S(\vec{x}) \text{ が成り立つ} &\iff R(\vec{x}), S(\vec{x}) \text{ のどちらかが成り立たつ。} \end{aligned}$$

証明 $\neg R$、$R \wedge S$, $R \vee S$ の特性関数は、それぞれ

$$\begin{aligned}\chi_{\neg R}(\vec{x}) &= \mathsf{zero?}(\chi_R(\vec{x}))\\ \chi_{R\wedge S}(\vec{x}) &= \chi_R(\vec{x})\cdot\chi_S(\vec{x})\\ \chi_{R\vee S}(\vec{x}) &= \mathsf{pos?}(\chi_R(\vec{x})+\chi_S(\vec{x}))\end{aligned}$$

と定義できる。ゆえに原始再帰的関数である。 ■

上の命題により、関係 $x \le y$ が原始再帰的であることがわかる。なぜならば、$x \le y$ は $x < y \vee x = y$ と同値だからである。

以下、$x \neq y$ は $\neg(x = y)$ の略記とし、$R \to S$, $R \leftrightarrow S$ はそれぞれ $\neg R \vee S$, $(R \to S) \wedge (S \to R)$ の略記とする。R, S が原始再帰的ならば、これらの関係も全て原始再帰的である。

練習問題 4.14 *3* 項関係「x、y、z は互いに異なる」が原始再帰的関係であることを示せ。

命題 4.15 関係 $R(\vec{x}, y) \subseteq \mathbf{N}^{k+1}$ が原始再帰的のとき、次のように定義される $k+1$ 項関係 $\forall y < zR(\vec{x}, y)$, $\exists y < zR(\vec{x}, y)$ も原始再帰的である：$\vec{n}, m \in \mathbf{N}$ とするとき、

$$\begin{aligned}\forall y < mR(\vec{n}, y) \text{ が成り立つ} &\iff \text{どんな } i < m \text{ についても } R(\vec{n}, i) \text{ が成り立つ。}\\ \exists y < mR(\vec{n}, y) \text{ が成り立つ} &\iff \text{ある } i < m \text{ について } R(\vec{n}, i) \text{ が成り立つ。}\end{aligned}$$

ここで変数 y は束縛されているものと考える。すなわち $\forall y < zR(\vec{x}, y)$, $\exists y < zR(\vec{x}, y)$ は $k+1$ 個の項 $\vec{x}, z$ についての関係である。

証明 $\forall y < zR(\vec{x}, y)$, $\exists y < zR(\vec{x}, y)$ の特性関数はそれぞれ

$$\begin{aligned}\chi_{\forall y<zR(\vec{x},y)}(\vec{x}, z) &= \prod_{y<z}\chi_R(\vec{x}, y)\\ \chi_{\exists y<zR(\vec{x},y)}(\vec{x}, z) &= \mathsf{pos?}(\sum_{y<z}\chi_R(\vec{x}, y))\end{aligned}$$

と書ける。 ■

原始再帰的関係 $R(\vec{x}, y) \subseteq \mathbf{N}^{k+1}$ が与えられたとき、上と同様にして、$k+1$ 項関係 $\forall y \le zR(\vec{x}, y)$, $\exists y \le R(\vec{x}, y)$ を定義することができる：$\vec{n}, m \in \mathbf{N}$ とするとき、

$$\begin{aligned}\forall y \le mR(\vec{n}, y) \text{ が成り立つ} &\iff \text{どんな } i \le m \text{ についても } R(\vec{n}, i) \text{ が成り立つ。}\\ \exists y \le mR(\vec{n}, y) \text{ が成り立つ} &\iff \text{ある } i \le m \text{ について } R(\vec{n}, i) \text{ が成り立つ。}\end{aligned}$$

$\forall y \le zR(\vec{x}, y)$, $\exists y \le zR(\vec{x}, y)$ は、それぞれ $(\forall y < zR(\vec{x}, y)) \wedge R(\vec{x}, z)$, $(\exists y < zR(\vec{x}, y)) \vee R(\vec{x}, z)$ と同値なので、R が原始再帰的のときにはやはり原始再帰的である。$\forall y < z$, $\exists y < z$, $\forall y \le z$, $\exists y \le z$ を**限定量化子** (bounded quantifiers) という。

以上により、原始再帰的関数・関係と $=, <, \neg, \wedge, \vee$ 及び限定量化子を用いて記述できる関係は全て原始再帰的であることがわかった。このことから、多くの数論的な性質・関係が原始再帰的であることがわかる：

命題 4.16 次の関係（性質）は原始再帰的である：

1. $\mathsf{even}(x)$：x は偶数である。
2. $\mathsf{div}(x, y)$：x は y の約数である。
3. $\mathsf{prime}(x)$：x は素数である。

証明 1. $\mathsf{even}(x)$ は $\exists y < x(x = 2y)$ と定義できる。ゆえに原始再帰的。
2. $\mathsf{div}(x, y) \iff \exists z \leq y(x \cdot z = y)$。
3. $\mathsf{prime}(x) \iff 2 \leq x \wedge \neg\exists y < x(y \neq 1 \wedge \mathsf{div}(y, x))$。 ■

練習問題 4.17 次の関係が原始再帰的であることを示せ。

1. $\mathsf{cd}(x, y, z)$ ： x は y と z の公約数である。
2. $\mathsf{cm}(x, y, z)$ ： x は y と z の公倍数である。
3. $\mathsf{rp}(x, y)$ ： x と y は互いに素である（1 以外の公約数を持たない）。
4. $\mathsf{mersenne}(x)$ ：x はメルセンヌ数である（x は $2^n - 1$ の形の素数である）。

原始再帰的関係は、原子再帰的関数を構成するときにも利用できる。そのような構成法を二つ挙げておく。

命題 4.18 原始再帰的関数 g、h、原始再帰的関係 R が与えられたとき、次のように定義される関数 f も原始再帰的である（このような定義を**場合分けによる定義** *(definition by cases)* という）。

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= g(\vec{x}) \ \ (R(\vec{x}) \text{ が成り立つとき}) \\ &= h(\vec{x}) \ \ (R(\vec{x}) \text{ が成り立たないとき}) \end{aligned}$$

証明 $f(\vec{x}) = g(\vec{x}) \cdot \chi_R(\vec{x}) + h(\vec{x}) \cdot \chi_{\neg R}(\vec{x})$ より。 ■

例えば、次のように定義される関数 f は原始再帰的である：

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 1 \qquad (\mathsf{even}(x) \text{ が成り立つとき}) \\ &= x^2 \qquad\qquad (\text{そうでないとき}) \end{aligned}$$

命題 4.19 関係 $R(\vec{x}, y) \subseteq \mathbf{N}^{k+1}$ が原始再帰的のとき、次のように定義される $k+1$ 項関数 $\mu y < zR(\vec{x}, y)$ は原始再帰的関数である：$\vec{n}, m \in \mathbf{N}$ とするとき、

$$\mu y < mR(\vec{n}, y) = k < m \text{ かつ } R(\vec{n}, k) \text{ を満たす最小の } k$$

ただしそのような k が存在しないときには $\mu y < mR(\vec{n}, y) = m$ とする。

ここでも y はやはり束縛されているものと考える。すなわち $\mu y < zR(\vec{x}, y)$ は項 $\vec{x}, z$ についての関数である。このような関数の構成法を**限定最小化** (bounded minimization) という。

証明　次のように場合分けと原始再帰法を組み合わせることにより定義できる。

$$\begin{array}{rcll} \mu y < 0R(\vec{x}, y) & = & 0 & \\ \mu y < z+1R(\vec{x}, y) & = & \mu y < zR(\vec{x}, y) & (\exists y \leq zR(\vec{x}, y) \text{ が成り立つとき}) \\ & = & z+1 & (\text{そうでないとき}) \end{array}$$

■

例えば、x と y の最大公約数を返す関数 $\mathsf{gcd}(x, y)$ は原始再帰的である。なぜならば、$\mathsf{gcd}(x, y)$ は次のように定義できるからである：

$$\mathsf{gcd}(x, y) \quad = \quad \mu z \leq y(\mathsf{cd}(x, y, z) \wedge \neg \exists w \leq y(z < w \wedge \mathsf{cd}(x, y, w)))$$

練習問題 4.20

1. x と y の最小公倍数を返す関数 $\mathsf{lcm}(x, y)$ が原始再帰的であることを示せ。
2. $\mu y < zR(\vec{x}, y) = \sum_{w<z} \prod_{y \leq w} \chi_{\neg R}(\vec{x}, y)$ となることを確かめよ。（ゆえに限定最小化は $\sum$ と $\prod$ を用いても定義できる。）
3. 関係 $R(\vec{x}, y) \subseteq \mathbf{N}^{k+1}$ が原始再帰的のとき、次のように定義される $k+1$ 項関数 $\sharp_{y<z} R(\vec{x}, y)$ が原始再帰的関数であることを示せ：$\vec{n}, m \in \mathbf{N}^k$ とするとき、

$$\sharp_{y<m} R(\vec{n}, y) \quad = \quad k < m \text{ かつ } R(\vec{n}, k) \text{ を満たす } k \text{ の個数}$$

（**限定数え上げ** *(bounded counting)*）

限定最小化を用いることにより、後々重要になる次の命題が証明できる。

命題 4.21 n 番目の素数を p_n により表すことにする。このとき p_x は原始再帰的関数である。

ただし、0 番目から数えていくことにする。例えば $\mathsf{p}_0 = 2$、$\mathsf{p}_1 = 3$、$\mathsf{p}_2 = 5$ である。

証明　$\mathsf{p}_n! + 1$ の最小の自明でない約数（1 以外の約数）を m とすると、$\mathsf{p}_n < m \leq \mathsf{p}_n! + 1$ が成り立つ。最初の不等号が成り立つのは、$\mathsf{p}_n! + 1$ は 2 以上 p_n 以下のどのような数であっても必ず 1 余り、すなわち、$\mathsf{p}_n! + 1$ の自明でない約数は p_n 以下には存在せず、ゆえに m は p_n 以下ではありえないからである。二番目の不等号は自明である。また、m は素数である。なぜならばどのような数についても、その最小の自明でない約数は常に素数だからである。このことから、p_n の次の素数は、必ず $\mathsf{p}_n! + 1$ までの範囲の中に見つかることがわかる。

適切な上界 (upper bound) が得られたので限定最小化を用いることができ、p_x は次のように定義することができる：

$$\begin{aligned}\mathsf{p}_0 &= 2\\ \mathsf{p}_{x+1} &= \mu y \leq \mathsf{p}_x! + 1(\mathsf{p}_x < y \wedge \mathsf{prime}(y))\end{aligned}$$

■

素因数分解の一意性を用いれば、自然数の列を一つの自然数によりコード化することができる。自然数の列 $n_1, \ldots, n_k$ が与えられたとき、

$$\langle n_1, \ldots, n_k \rangle = \mathsf{p}_0^{n_1+1} \cdots \mathsf{p}_{k-1}^{n_k+1}$$

と定義する。これは $k+1$ 項の原始再帰的関数である。自然数 x が上のようなかたちで何らかの列を表すとき、その i 番目の要素は

$$(x)_i = \mu y < x(\neg \mathsf{div}(\mathsf{p}_{i-1}^{y+2}, x))$$

により取り出すことができる。コード x の長さは

$$\mathsf{leng}(x) = \mu i < x(\neg \mathsf{div}(\mathsf{p}_i, x))$$

と表すことができ、また自然数 x が列のコードになる条件は

$$\mathsf{seq}(x) \Longleftrightarrow \forall i < x(\mathsf{div}(\mathsf{p}_i, x) \rightarrow i < \mathsf{leng}(x))$$

と表すことができる。これらは全て原始再帰的である。後ほど、より経済的な列のコード化の方法を導入する。

4.3 原始再帰的関数の限界

これまではどのようなタイプの関数が原始再帰的と見なせるかという、いわば原始再帰的関数の質的な側面に着目してきたが、ここでは視点を変えて、どれくらい大きな関数が原始再帰的であるかという、原始再帰的関数の量的側面について考えてみる。関数の大きさは "支配する" という関係によって与えることができる。1 項関数 f が g を支配するとは、十分に大きな数 N をとれば、それより大きな全ての数 $x > N$ について $g(x) \leq f(x)$ となることとする。例えば、二次関数 x^2 は全ての一次関数 $ax+b$ を支配する（ここで a, b は定数）。同様に三次関数 x^3 は全ての二次関数を支配し、べき乗関数 2^x は全ての多項式を支配する。超指数関数 2^{2^x} は全ての指数関数を支配する、といった具合である。

ここでは原始再帰的関数の列 $\Upsilon_0, \Upsilon_1, \Upsilon_2, \ldots$ を構成し、どのような原始再帰的関数 f もある Υ_n により支配されることを示す。一方、関数列 $\Upsilon_0, \Upsilon_1, \Upsilon_2 \ldots$ を "対角化" することにより、明らかに計算可能でありながらどんな Υ_n によっても支配されない関数 $\Upsilon_x(x)$ を構成することができる。そのような関数は原始再帰的ではありえない。ゆえに原始再帰的関数のクラスは全ての計算可能な関数を覆い尽くしてはいないことがわかる。

命題 4.22 *1* 項原始再帰的関数 $f(x)$ が与えられたとき、二項原始再帰的関数 $f^{(y)}(x)$ を次のように定義する：

$$f^{(y)}(x) = \underbrace{f \cdots f}_{y\ times}(x)$$

ただし $f^{(0)}(x) = x$ とする。このとき $f^{(y)}(x)$ は原始再帰的関数である。

この関数構成法は原始再帰法の特別な場合であり、**反復法**（iteration）と呼ばれる。

証明

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= x \\ f^{(y+1)}(x) &= f(f^{(y)}(x)) \end{aligned}$$

■

定義 4.23 *1* 項原始再帰的関数の列 $\Upsilon_0, \Upsilon_1, \Upsilon_2 \ldots$ を次のように帰納的に定義する：

$$\begin{aligned} \Upsilon_0(x) &= \mathsf{suc}(x) \\ \Upsilon_{n+1}(x) &= \Upsilon_n^{(x)}(x) \end{aligned}$$

例えば、

$$\begin{aligned} \Upsilon_1(x) &= \Upsilon_0^{(x)}(x) = \mathsf{suc}^{(x)}(x) = 2x \\ \Upsilon_2(x) &= \Upsilon_1^{(x)}(x) = 2^{(x)}(x) = 2^x \cdot x \leq 2^{2x} = 4^x \\ \Upsilon_3(x) &= \Upsilon_2^{(x)}(x) \leq \left. 4^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{4^x}}}} \right\} x\ times \end{aligned}$$

となる。

補題 4.24

1. 全ての n, x について、$x < \Upsilon_n(x)$。

2. $n < m$, $x > 0$ ならば、$\Upsilon_n(x) < \Upsilon_m(x)$。

3. $x \le y$ ならば、$\Upsilon_n(x) \le \Upsilon_n(y)$。

証明 1. n についての帰納法による。まず、$x < \mathsf{suc}(x) = \Upsilon_0(x)$。つぎに $x < \Upsilon_n(x)$ が成り立つと仮定して（帰納法の仮定）、$x < \Upsilon_{n+1}(x)$ が成り立つことを示す。実際どんな x についても、帰納法の仮定を x 回用いれば

$$x < \Upsilon_n(x) < \Upsilon_n(\Upsilon_n(x)) < \cdots < \underbrace{\Upsilon_n \cdots \Upsilon_n}_{x\ times}(x) = \Upsilon_n^{(x)}(x) = \Upsilon_{n+1}(x).$$

よってどんな n についても $x < \Upsilon_n(x)$ である。
2. $x > 0$ のとき、

$$\begin{array}{rcll} \Upsilon_n(x) & < & \underbrace{\Upsilon_n \cdots \Upsilon_n}_{x\ times}(x) & \text{（上記 1,}x > 0\text{ より）} \\ & = & \Upsilon_n^{(x)}(x) = \Upsilon_{n+1}(x) & \\ & < & \Upsilon_{n+1}^{(x)}(x) = \Upsilon_{n+2}(x) & \text{（同様にして）} \\ & < & \cdots < \Upsilon_m(x). & \end{array}$$

3. n についての帰納法による。まず、$\Upsilon_0(x) = \mathsf{suc}(x) \le \mathsf{suc}(y) = \Upsilon_0(y)$。次に $\Upsilon_n(x) \le \Upsilon_n(y)$ が成り立つと仮定して（帰納法の仮定）、$\Upsilon_{n+1}(x) \le \Upsilon_{n+1}(y)$ が成り立つことを示す。実際上記 1 と帰納法の仮定により、どんな x についても

$$\begin{array}{rcll} \Upsilon_{n+1}(x) & = & \Upsilon_n^{(x)}(x) & \\ & = & \underbrace{\Upsilon_n \cdots \Upsilon_n}_{x\ times}(x) & \\ & \le & \underbrace{\Upsilon_n \cdots \Upsilon_n}_{x\ times}(y) & \text{（帰納法の仮定を }x\text{ 回用いて）} \\ & \le & \underbrace{\Upsilon_n \cdots \Upsilon_n}_{y\ times}(y) & \text{（上記 1 より）} \\ & = & \Upsilon_n^{(y)}(y) = \Upsilon_{n+1}(y) & \end{array}$$

が成り立つ。 ■

定義 4.25 f を *1* 項関数とする。f が *1* 項関数 g を**支配する** *(dominates)* とは、ある $N \in \mathbf{N}$ が存在し、全ての $x > N$ について $g(x) \le f(x)$ が成り立つこととする。同様に、f が n 項関数 g を支配するとは、ある $N \in \mathbf{N}$ が存在し、全ての $\vec{x} = x_1, \ldots, x_n > N$ について $g(\vec{x}) \le f(\mathsf{max}(\vec{x}))$ が成り立つこととする。

すなわち、f が g を支配するとは、十分大きなインプットについては常に f のアウトプットは g のアウトプット以上となることに他ならない。

定理 4.26 どんな原始再帰的関数 f もある Υ_n により支配される。より詳しく言えば、ある n が存在し、どんな $\vec{x} = x_1, \ldots, x_k > 1$ についても $f(\vec{x}) \le \Upsilon_n(\mathsf{max}(\vec{x}))$ となる。

証明 f の構成に関する帰納法により証明する。

f が zero, suc, proj のときには明らかに Υ_0 により支配される。

f が原始再帰的関数 $g,\ h_1, \ldots, h_m$ から合成により定義されているとする（すなわち $f(\vec{x}) = g(h_1(\vec{x}), \ldots, h_m(\vec{x}))$）。帰納法の仮定及び補題 4.24.2 により、$n$ を十分に大きくとれば、全ての $\vec{x}, \vec{y} > 1$ について $g(\vec{y}) \le \Upsilon_n(\mathsf{max}(\vec{y})),\ h_1(\vec{x}) \le \Upsilon_n(\mathsf{max}(\vec{x})),\ \ldots,\ h_m(\vec{x}) \le \Upsilon_n(\mathsf{max}(\vec{x}))$ が成り立つ。よって

$$
\begin{array}{rcl}
f(\vec{x}) & = & g(h_1(\vec{x}), \ldots, h_m(\vec{x})) \\
& \le & \Upsilon_n(\mathsf{max}(h_1(\vec{x}), \ldots, h_m(\vec{x}))) \\
& \le & \Upsilon_n(\mathsf{max}(\Upsilon_n(\mathsf{max}(\vec{x})), \ldots, \Upsilon_n(\mathsf{max}(\vec{x})))) \\
& = & \Upsilon_n(\Upsilon_n(\mathsf{max}(\vec{x}))) \\
& = & \Upsilon_n^{(2)}(\mathsf{max}(\vec{x})) \\
& \le & \Upsilon_n^{(\mathsf{max}(\vec{x}))}(\mathsf{max}(\vec{x})) \quad \text{（}\mathsf{max}(\vec{x}) \ge 2\text{、補題 4.24.1 より）} \\
& \le & \Upsilon_{n+1}(\mathsf{max}(\vec{x})).
\end{array}
$$

f が原始再帰的関数 g, h から原始再帰法により定義されているとする。すなわち、

$$
\begin{array}{rcl}
f(\vec{x}, 0) & = & g(\vec{x}) \\
f(\vec{x}, y+1) & = & h(\vec{x}, y, f(\vec{x}, y)).
\end{array}
$$

帰納法の仮定及び補題 4.24.2 により、ある n があり、全ての $\vec{x}, y, z > 1$ について、$g(\vec{x}) \le \Upsilon_n(\mathsf{max}(\vec{x})),\ h(\vec{x}, y, z) \le \Upsilon_n(\mathsf{max}(\vec{x}, y, z))$ が成り立つ。

このとき $f(\vec{x}, m) \le \Upsilon_n^{(m+1)}(\mathsf{max}(\vec{x}, m))$ となることを m についての数学的帰納法により示す。実際、

$$
\begin{array}{rcl}
f(\vec{x}, 0) & = & g(\vec{x}) \le \Upsilon_n(\mathsf{max}(\vec{x})) = \Upsilon_n^{(1)}(\mathsf{max}(\vec{x}, 0)) \\
f(\vec{x}, m+1) & = & h(\vec{x}, m, f(\vec{x}, m)) \\
& \le & \Upsilon_n(\mathsf{max}(\vec{x}, m, f(\vec{x}, m))) \\
& \le & \Upsilon_n(\mathsf{max}(\vec{x}, m, \Upsilon_n^{(m+1)}(\mathsf{max}(\vec{x}, m)))) \quad \text{（帰納法の仮定、補題 4.24.3 より）} \\
& = & \Upsilon_n(\Upsilon_n^{(m+1)}(\mathsf{max}(\vec{x}, m+1))) \quad \text{（補題 4.24.1 より）} \\
& = & \Upsilon_n^{(m+2)}(\mathsf{max}(\vec{x}, m+1)).
\end{array}
$$

ゆえに、

$$\begin{array}{rcl} f(\vec{x},y) & \leq & \Upsilon_n^{(y+1)}(\mathsf{max}(\vec{x},y)) \\ & = & \Upsilon_n(\Upsilon_n^{(y)}(\mathsf{max}(\vec{x},y))) \\ & \leq & \Upsilon_n(\Upsilon_n^{(\mathsf{max}(\vec{x},y))}(\mathsf{max}(\vec{x},y))) \quad （\vec{x},y>1\text{ より}） \\ & = & \Upsilon_n(\Upsilon_{n+1}(\mathsf{max}(\vec{x},y))) \\ & \leq & \Upsilon_{n+1}(\Upsilon_{n+1}(\mathsf{max}(\vec{x},y))) \\ & = & \Upsilon_{n+1}^{(2)}(\mathsf{max}(\vec{x},y)) \\ & \leq & \Upsilon_{n+1}^{(\mathsf{max}(\vec{x},y))}(\mathsf{max}(\vec{x},y)) \quad （\mathsf{max}(\vec{x},y)\geq 2\text{ より}） \\ & = & \Upsilon_{n+2}(\mathsf{max}(\vec{x},y)). \end{array}$$

■

系 4.27 $\Upsilon(x)=\Upsilon_x(x)$ により定義される関数 Υ は原始再帰的ではない。

証明 仮に Υ が原始再帰的であるとすると、定理 4.26 により、Υ はある Υ_n により支配されるはずである。しかしどんなに大きな $N\in\mathbf{N}$ をとっても、$m=\mathsf{max}(n,N)+1$ とすれば、

$$\Upsilon(m)=\Upsilon_m(m)>\Upsilon_n(m)$$

となる（最後の $>$ は補題 4.24.2 より）。ゆえに Υ は Υ_n によっては支配されない。これは矛盾である。 ■

一方、Υ が計算可能であることは明らかである。なぜならば具体的なインプット n が与えられたとき、$\Upsilon(n)=\Upsilon_n(n)$ であり、Υ_n は原始再帰的であるから、$\Upsilon_n(n)$ の値は確かに求めることができる。ゆえにこの Υ は計算可能であっても原始再帰的でない関数の具体例になっている（後ほど Υ は再帰的関数であることが明らかになる）。

ところで上のように関数の列 $\Upsilon_0,\Upsilon_1,\Upsilon_2,\ldots$ から Υ を構成する方法を**対角化** (diagonalization) と言う。これは、$\Upsilon_n(m)$ の値（$n=0,1,\ldots;m=0,1,\ldots$）を表

$$\begin{array}{c|cccccc} & 0 & 1 & \cdots & m & \cdots \\ \hline 0 & \Upsilon_0(0) & \Upsilon_0(1) & \cdots & \Upsilon_0(m) & \cdots \\ 1 & \Upsilon_1(0) & \Upsilon_1(1) & \cdots & \Upsilon_1(m) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ n & \Upsilon_n(0) & \Upsilon_n(1) & \cdots & \Upsilon_n(m) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \end{array}$$

で表したとき、$\Upsilon(n)$ の値（$n=0,1,\ldots$）はその対角線に相当するからである。

練習問題 4.28 *(**)* 次のように定義される関数（**アッカーマン関数**）が原始再帰的関数ではないことを証明せよ。

$$\begin{array}{rcl} f(0,y) & = & y+1 \\ f(x+1,0) & = & f(x,1) \\ f(x+1,y+1) & = & f(x,f(x+1,y)). \end{array}$$

4.4　コード化の技法

ここでは数の順序対や有限集合、数の有限列など数以外のものを一つの数で表す**コード化**の技法を紹介する。既に 4.2 章で素因数分解の一意性に基づいて数の有限列をコード化する方法について触れたが、ここで導入するのはより能率のよい（したがってより工夫を要する）方法である。これらは後に**算術化**（arithmetization, 論理式や証明などのメタレヴェルの概念を数についての関数や性質として対象レヴェルで表現すること）を行う際に本質的な役割を果たす。まずは原始再帰的関係のクラスよりもはるかに小さい Δ_0 関係のクラスを導入しておこう。

定義 4.29 Δ_0 関係のクラスは次のように定義される：

1. f, g が $0, \mathsf{suc}, +, \cdot$ から自由合成（補題 *4.5*）により得られる関数のとき、$f(\vec{x}) = g(\vec{x})$ は Δ_0 関係である。

2. R, S が Δ_0 関係のとき、$\neg R, R \wedge S, R \vee S$ は Δ_0 関係である。

3. R が Δ_0 関係で f が $0, \mathsf{suc}, +, \cdot$ から自由合成により得られる関数のとき、$\forall y < f(\vec{x}).R(\vec{x}, y)$, $\exists y < f(\vec{x}).R(\vec{x}, y)$ は Δ_0 関係である。ただし y は $\vec{x}$ の中に現れない変数とする。

すなわち Δ_0 関係とは、$0, \mathsf{suc}, +, \cdot, =, \neg, \wedge, \vee$ および限定量化子（および合成）のみを用いて定義することができる関係のことである。

まず最初に、自然数の順序対 (m, n) を一つの自然数でコード化する方法について考える。順序対全体の集合は $\mathbf{N}^2$ であり、これは x 軸、y 軸とも自然数で目盛りづけられた平面上の格子点の集合と一致する。次のような数え上げ方を見てみよう。

$$
\begin{array}{l}
(0,0) \\
(1,0),(0,1) \\
(2,0),(1,1),(0,2) \\
(3,0),(2,1),(1,2),(0,3) \\
(4,0),(3,1),(2,2),(1,3),(0,4) \\
\quad\vdots
\end{array}
$$

このようにすればちょうど一回ずつ、全ての格子点を数え上げることができる。言い換えれば、集合 $\mathbf{N}^2$ を集合 $\mathbf{N}$ へと一対一に対応付けることができる。この数え方において（一番上の行を 0 行目とすれば）、

- (m, n) は $m + n$ 行目に現れる（例えば $(3, 1)$ は 4 行目に現れる）
- i 行目には $i + 1$ 個の格子点が現れる（例えば 4 行目には 5 個の格子点が現れる）

ことに注目すると、格子点 (m, n) は

$$\left(\sum_{i<m+n} i+1\right) + n = \frac{(m+n)(m+n-1)}{2} + n$$

番目に数え上げられることがわかる。ゆえに 2 項関数

$$\langle x, y\rangle = \frac{(x+y)(x+y-1)}{2} + y$$

を順序対を単一の自然数でコード化するために用いることができる。これは原始再帰的であり、全単射である。逆関数は

$$\begin{array}{rcl}\pi_1(z) & = & \mu x \le z(\exists y \le z.z = \langle x, y\rangle) \\ \pi_2(z) & = & \mu y \le z(\exists x \le z.z = \langle x, y\rangle)\end{array}$$

により与えられる。すなわち $\pi_i(\langle n_1, n_2\rangle) = n_i\ (i = 1, 2)$ である。これらも原始再帰的関数である。しかも次の性質が成り立つ。

命題 4.30 *3 項関係 $\langle x, y\rangle = z$ は Δ_0 である。*

証明 $\langle x, y\rangle = z \Longleftrightarrow 2z = (m+n)(m+n-1) + 2n$ より。 ■

練習問題 4.31 *(*)* $\langle x, y\rangle$ が $\mathbf{N}^2$ から $\mathbf{N}$ への全単射であることを証明せよ。

以上により順序対は自然数によりコード化できることがわかった。次に有限集合のコード化について考えよう。以下の手法はクワインとスマリヤンによる（[11] 参照）。

補題 4.32 次の関係は Δ_0 である。

1. $\mathsf{power}_p(x)$: x は p の累乗である（すなわち、ある n について $x = p^n$）。ただし p は素数であるとする。

2. $y = \mathsf{lstpow}_p(x)$: y は x より大きな p の累乗のうち最小のものである。ただし p は素数であるとする。

たとえば $\mathsf{power}_2(16)$ は成り立つが、$\mathsf{power}_2(18)$ は成り立たない。$16 \le n < 32$ のとき、$32 = \mathsf{lstpow}_2(n)$ である。自然数 n を p 進法で書くときに必要な桁数を k とすると、$\mathsf{lstpow}_p(n)$ は p 進法で $1\underbrace{0\cdots0}_{k}$ と書ける。

証明 1. p が素数のとき、x が p の累乗であるための必要十分条件は x の全ての自明でない約数（1 以外の約数）が p で割り切れることである。ゆえに:

$$\mathsf{power}_p(x) \Longleftrightarrow \forall z \le x((\mathsf{div}(z, x) \wedge z \ne 1) \to \mathsf{div}(p, z)).$$

（div が Δ_0 関係であることは命題 4.16 の証明から明らかである。）
2. 次の通り:

$$y = \mathsf{lstpow}_p(x) \Longleftrightarrow (y > x \wedge \mathsf{power}_p(y)) \wedge \neg\exists z < y(z > x \wedge \mathsf{power}_p(z)).$$

■

「x と y を p 進法で書いて x, y の順に繋げることにより得られる数」を $x *_p y$ により表すことにする。たとえば、$123 *_{10} 4567 = 1234567$ であり、$3 *_2 2 = 14$ である（二進数で書くと 3 は 11、2 は 10、14 は 1110 である）。

補題 4.33 *p が素数のとき、3 項関係 $x *_p y = z$ は Δ_0 関係である。*

証明

$$\begin{aligned} x *_p y = z &\iff x \cdot \mathsf{lstpow}_p(y) + y = z \\ &\iff \exists w \le z. w = \mathsf{lstpow}_p(y) \wedge x \cdot w + y = z. \end{aligned}$$

■

x と y を p 進法で書いたとき、「x が y の始切片である」ことを $\mathsf{initseg}_p(x, y)$、「x が y の終切片である」ことを $\mathsf{endseg}_p(x, y)$、「x が y の部分である」ことを $\mathsf{part}_p(x, y)$ と書いて表す。例えば、$\mathsf{initseg}_{10}(123, 123456789)$、$\mathsf{endseg}_{10}(789, 123456789)$、$\mathsf{part}_{10}(456, 123456789)$ が成り立つ。

補題 4.34 *p が素数のとき、$\mathsf{initseg}_p(x, y)$、$\mathsf{endseg}_p(x, y)$、$\mathsf{part}_p(x, y)$ は Δ_0 関係である。*

証明

$$\begin{aligned} \mathsf{initseg}_p(x, y) &\iff x = y \vee (x \neq 0 \wedge \exists z < y. x *_p z = y) \\ \mathsf{endseg}_p(x, y) &\iff x = y \vee (x \neq 0 \wedge \exists z < y. z *_p x = y) \\ \mathsf{part}_p(x, y) &\iff \exists z < y. \mathsf{initseg}_p(z, y) \wedge \mathsf{endseg}_p(x, z). \end{aligned}$$

■

以下では素数 $p > 2$ を固定し（例えば $p = 7$ とする)、$\mathsf{part}_p(x, y)$ を単に $\mathsf{part}(x, y)$ と書く。また $x *_p y$ を単に xy と書く。p 進法で書いたとき $2111 \cdots 12$ の形になる数を**区切り数**と呼ぶことにする。

補題 4.35 *次の関係は Δ_0 である。*

1. *$\mathsf{1seq}(x)$: x は p 進法で書いたとき $1 \cdots 1$ の形になる。*
2. *$\mathsf{delim}(x)$: x は区切り数である。*
3. *$\mathsf{maxdelim}(x, y)$: x は y を p 進法で書いたときその中に現れる最大の区切り数である。*

証明

$$\begin{aligned} \mathsf{1seq}(x) &\iff x \neq 0 \wedge \forall y \le x (\mathsf{part}(y, x) \wedge y < p \to y = 1) \\ \mathsf{delim}(x) &\iff \exists z < x. (x = 2z2 \wedge \mathsf{1seq}(z)) \\ \mathsf{maxdelim}(x, y) &\iff \mathsf{delim}(x) \wedge \neg \exists z \le y (\mathsf{delim}(z) \wedge x < z) \end{aligned}$$

■

さて、数の有限集合 $A = \{a_0, \ldots, a_n\}$ が与えられたとする。どの a_i の部分でもない区切り数を一つ取りそれを l とするとき、$la_0la_1l \cdots la_nl$ の形の自然数を A の**コード**ということにする。A のコードは一意には定まらない。それは区切り数 l の取り方に依存するからである。しかしそれでも、「x は $\{a_0, \ldots, a_n\}$ のコードである」という関係を考えることには意味があり、これが原始再帰的関係であることは容易に確かめることができる。このような状況の下で、次の命題が成り立つ。

命題 4.36 次の性質を持つ Δ_0 関係 $\in$ が存在する: どんな有限集合 $A = \{a_0, \ldots, a_n\}$ についてもある y が存在し、

$$x \in y \Longleftrightarrow x \text{ は } A \text{ の要素である。}$$

また $a_0, \ldots, a_n < y$ である。

ここで y としては A の（任意の）コードが想定されている。

証明 $x \in y \Longleftrightarrow \exists z < y.\mathsf{maxdelim}(z, y) \wedge \mathsf{part}(zxz, y)$ と定義すればよい。いま、l をどの a_i の部分でもない区切り数とするとき、それを用いて構成できる A の集合コード $la_0la_1l \cdots la_nl$ を y として取る。すると、l は y に含まれる最大の区切り数であり、lxl が y の部分であることと x が A の要素であることは一致する。すなわち、$x \in y$ であることと x が A の要素であることは一致する。$a_0, \ldots, a_n < y$ であることは明らかである。 ■

順序対のコード化と有限集合のコード化が与えられれば有限列のコード化は容易である。数列 $a_0, \ldots, a_n$ は集合 $\{\langle 0, a_0\rangle, \langle 1, a_1\rangle, \ldots, \langle n, a_n\rangle\}$ であいまい性なく表現できるからである。次の定理はいわゆる β **関数**の存在を主張している。

定理 4.37 次の性質を満たす *2* 項原始再帰的関数 β が存在する。

1. どんな自然数の列 $a_0, \ldots, a_n$ に対してもある自然数 w が存在し、

$$\beta(w, 0) = a_0,\ \beta(w, 1) = a_1,\ \ldots,\ \beta(w, n) = a_n$$

が成り立つ。また、$a_0, \ldots, a_n < w$ である。

2. *3* 項関係 $\beta(w, x) = y$ は Δ_0 関係である。

証明

$$\beta(w, x) = \mu y < w.\langle x, y\rangle \in w$$

と定義すればよい。w を $\{\langle 0, a_0\rangle, \ldots, \langle n, a_n\rangle\}$ のコードとすれば、明らかに $\beta(w, 0) = a_0, \beta(w, 1) = a_1, \ldots, \beta(w, n) = a_n$ が成り立つ。

また、関係 $\beta(w, x) = y$ は

$$(\langle x, y\rangle \in w \wedge \forall z < y.\langle x, z\rangle \notin w) \vee (\neg \exists z \leq w(\langle x, z\rangle \in w) \wedge y = w)$$

と書けるので Δ_0 である。 ■

β 関数を最初に明示的に導入したのはゲーデル (1931) である。彼は中国剰余定理という数論の基本定理の一つを用いて β 関数を構成した。本節の構成法はクワイン、スマリヤンによる。

5　再帰的関数

5.1　再帰的関数と原始再帰法の除去

前章までに取り扱ってきた原始再帰的関数の定義を拡張することにより、再帰的関数のクラスが得られる。後で説明するように、再帰的関数は「計算可能である」という直感的概念を数学的に定式化したものと考えることができる（チャーチのテーゼ)。

定義 5.1 再帰的関数 *(recursive functions)* の集合は次のように帰納的に定義される。

1. ゼロ関数、射影関数、後続者関数は再帰的である。

2. 再帰的関数から合成により得られる関数は再帰的である。

3. 再帰的関数から原始再帰法により得られる関数は再帰的である。

4. **最小化**（*minimization*）：g が $n+1$ 項再帰的関数であり、

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \exists y (g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0)$$

を満たすとする（これを**実効性条件**（*effectiveness condition*）と呼ぶ)。$g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$ を満たす最小の y を $\mu y(g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0)$ と書いて表す。このとき

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mu y(g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0)$$

により定義される関数 f は再帰的である。

再帰的関係 *(recursive relations)* とは、特性関数が再帰的であるような関係のことである。

最小化による関数の構成法を次のように言い換えてもよいことはただちにわかる。

- g が $n+1$ 項再帰的関係であり、$\forall x_1 \cdots \forall x_n \exists y (R(x_1, \ldots, x_n, y))$ を満たすとする（これを**実効性条件**と呼ぶ)。$R(x_1, \ldots, x_n, y)$ を満たす最小の y を $\mu y(R(x_1, \ldots, x_n, y))$ と書いて表す。このとき

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mu y(R(x_1, \ldots, x_n, y))$$

により定義される関数 f は再帰的である。

関係 R が決定可能であり、かつ実効性条件を満たすときには、上のように最小化により定義される f が計算可能であることはただちにわかる。実際、インプット $\vec{m} = m_1, \ldots, m_n \in \mathbf{N}$ が与えられたとき $f(\vec{m})$ の値を求めるには次のようにすればよい。

1. $R(\vec{m}, 0)$ が成り立つかどうかを判定する（R は決定可能であると仮定しているので、このことは有限時間内に遂行できる)。もしも成り立つならば、$f(\vec{m}) = 0$ である。

2. さもなくば、$R(\vec{m}, 1)$ が成り立つかどうかを判定する。もしも成り立つならば、$f(\vec{m}) = 1$ である。さもなくば、$R(\vec{m}, 2)$ が成り立つかどうかを判定する。

3. 以下同様に、アウトプットが得られるまで $R(\vec{m},3), R(\vec{m},4), R(\vec{m},5), \ldots$ と続ける。

R は実効性条件を満たすので、ある k が存在し、$R(\vec{m},k)$ が成り立つ。ゆえに上のプロセスは必ずいつかは停止し、$f(\vec{m})$ のアウトプットが得られるはずである。しかし一般には、上のプロセスがいつ停止するのかは全くわからず、実行時間の予想は立てられない。この点が原始再帰法との大きな違いである。

上の再帰的関数の定義は原始再帰法と最小化を両方用いているが、初期関数が十分に多くある場合には実は原始再帰法は必要ないということが知られている。この結果は後に再帰的関数を算術の体系において表現する際に便利である。

定理 5.2 次のように定義される再帰的'関数のクラスは再帰的関数のクラスと一致する。

1. ゼロ関数、射影関数、後続者関数、$+, \cdot$ および $\chi_=$ は再帰的'である。

2. 再帰的'関数から合成および最小化により得られる関数は再帰的'である。

証明 再帰的' 関数が再帰的であることは明らかである。逆を示すために、まずは Δ_0 関係が再帰的' であることを証明しておく。

1. 関係 $f(\vec{x}) = g(\vec{x})$ が再帰的' であることは明らか（ここで f, g は $0, \mathsf{suc}, +, \cdot$ から自由合成により構成される関数）。

2. R が再帰的' のとき $\neg R$ も再帰的' である。実際、$\neg R$ の特性関数は $\chi_{\neg R}(\vec{x}) = \chi_=(\chi_R(\vec{x}), 0)$ と定義することができ、$\chi_=$ は定義により再帰的' だからである。

3. R が再帰的' のとき $R \vee S$, $R \wedge S$ も再帰的' である。練習問題とする。

4. $R(\vec{x}, z)$ が再帰的' のとき限定最小化により得られる関数 $f(\vec{x}, y) = \mu z < y.R(\vec{x}, z)$ も再帰的' である。実際、$f(\vec{x}, y) = \mu z.(R(\vec{x}, z) \vee z = y)$ と定義できる。

5. $R(\vec{x}, z)$ が再帰的' のとき $\exists z < y.R(\vec{x}, z)$ も再帰的' である。実際、$\exists z < y.R(\vec{x}, z) \iff (\mu z < y.R(\vec{x}, z)) \neq y$ と定義でき、$\neq$ は再帰的' であり、また限定最小化は再帰的' であることを保存することから明らかである。$\forall z < x.R(\vec{x}, z)$ は $\neg$ と $\exists z < x$ を用いて定義できるから再帰的' である。

これで全ての Δ_0 関係が再帰的' であることがわかった。特に 4.4 章の β 関数は再帰的' である。

最後に再帰的関数がすべて再帰的' であることを示そう。それには g, h が再帰的' 関数ならば

$$\begin{aligned} f(\vec{x}, 0) &= g(\vec{x}) \\ f(\vec{x}, y+1) &= h(\vec{x}, y, f(\vec{x}, y)). \end{aligned}$$

により定義される f も再帰的' であることを示せばよい。まず、どんな $\vec{x}, y$ についても有限列 $f(\vec{x}, 0), \ldots, f(\vec{x}, y)$ のコードを返す関数 $t(\vec{x}, y)$ は再帰的' であることに注意する。実際、t は β 関数と最小化を用いて

$$t(\vec{x}, y) = \mu z(\beta(z, 0) = g(\vec{x}) \wedge \forall i < y.\beta(z, i+1) = h(\vec{x}, i, \beta(z, i)))$$

と定義することができる。ここで関係 $\beta(z,0)=g(\vec{x})\wedge\forall i<y.\beta(z,i+1)=h(\vec{x},i,\beta(z,i)))$ が実効性条件を満たすこと、すなわちどんな $\vec{x},y$ が与えられてもこの関係を満たす z が存在することは、定理 4.37 により保証されている。

　この t を用いれば、目標の関数 f は

$$f(\vec{x},y)=\beta(t(\vec{x},y),y)$$

と定義できる。よって f は再帰的' である。 ■

5.2 標準形定理

4.4 節では順序対、有限集合、有限列などを自然数へとコード化したが、ここではさらに再帰的関数を自然数へとコード化する方法について述べる。一般に再帰的関数のコードは指標と呼ばれているので、ここでも指標という呼び方を用いる。さて、関数 f を自然数 e でコード化するということが意味をなすためには、e が与えられたとき、そこから f の入出力関係を正確に復元できるのでなければならない。そのためには、指標 e として選ばれる数はどんな自然数でもよいわけではなく、それは関数の計算の仕方（インプットが与えられたときアウトプットを求めるにはどうしたらよいか）、あるいは別の言い方をすれば関数の設計図（すなわちその関数がどのように構成されているか）を情報として含んでいるのでなければならない。つまり、関数の指標は関数を計算するためのプログラムとみなすことができるのでなければならない。

本章の主定理はクリーネの標準形定理と呼ばれるものであるが、その核心はまさに、指標が与えられたときにそこから関数を復元する方法を（一群の）再帰的関数により与えるという点にある。すなわち、どんな関数 f についてもその指標 e さえ与えられれば、f の入出力関係を正確にシミュレートできる、そういう**万能な**再帰的関数（群）を構成する。今、指標 e のことを関数 f を計算するためのプログラムだと思うことにすれば、ここで構成する万能再帰的関数（群）はプログラムを解釈し実行するインタプリタに相当するものと考えることができる。

このようなコード化を行うためには有限列のコードを用いることが必要である。我々はすでに二つのコード化の手法（すなわち 4.2 節の素因数分解の一意性を用いた方法と 4.4 の部分列・区切り数などに依拠した方法）を導入したが、ここでは前者を用いることにする。（後者を用いても同等のことができる。）4.2 節では以下の原始再帰的関数・関係を定義したことを思い出しておこう。

1. 自然数の列 $n_1, \ldots, n_k$ が与えられたとき、別の自然数 $\langle n_1, \ldots, n_k \rangle$ を割り当てる関数。
2. 列のコード x が与えられたとき、その i 番目の要素を取り出す 2 項関数 $(x)_i$。とくに $1 \leq i \leq k$ について
$$(\langle n_1, \ldots, n_k \rangle)_i = n_i.$$
3. コード x の長さを返す関数 $\mathsf{leng}(x)$。特に次のことが成り立つ:
$$\mathsf{leng}(\langle n_1, \ldots, n_k \rangle) = k.$$
4. 「x が列のコードである」ことを表す関係 $\mathsf{seq}(x)$。とくに $\mathsf{seq}(\langle n_1, \ldots, n_k \rangle)$ は真である。

定理 5.2 により、どんな再帰的関数も初期関数 zero, suc, proj, $+$, $\cdot$, $\chi_=$ から始めて合成や最小化を繰り返し用いることにより定義できる。これを自然数であらわすには、まず初期関数に指標（自然数）を割り当て、次に単純な関数の指標からより複雑な関数の指標を構成するための規則を述べればよい。

定義 5.3 再帰的’関数 f の**指標** *(index)* とは、次のように定義される自然数のことである。

1. $\ulcorner zero^n \urcorner = \langle 0, n\rangle$ は zero^n の指標である。

2. $\ulcorner suc \urcorner = \langle 1, 1\rangle$ は suc の指標である。

3. $\ulcorner proj^n_i \urcorner = \langle 2, n, i\rangle$ は proj^n_i の指標である。

4. $\ulcorner plus \urcorner = \langle 3, 2\rangle$ は $+$ の指標である。

5. $\ulcorner mult \urcorner = \langle 4, 2\rangle$ は $\cdot$ の指標である。

6. $\ulcorner equal \urcorner = \langle 5, 2\rangle$ は $\chi_=$ の指標である。

7. f が再帰的関数 $g, h_1, \ldots, h_m$ から合成により定義されているとする。すなわち $f(\vec{x}) = g(h_1(\vec{x}), \ldots, h_m(\vec{x}))$。$\ulcorner g \urcorner, \ulcorner h_1 \urcorner, \ldots, \ulcorner h_m \urcorner$ がそれぞれ $g, h_1, \ldots, h_m$ の指標のとき、$\ulcorner comp(g, h_1, \ldots, h_m) \urcorner = \langle 6, n, \ulcorner g \urcorner, \ulcorner h_1 \urcorner, \ldots, \ulcorner h_m \urcorner\rangle$ は f の指標である（ここで n は f の項数)。

8. f が再帰的関数 g から最小化により定義されているとする。ただし g は実効性条件を満たしているとする。このとき、$\ulcorner min(g) \urcorner = \langle 7, n, \ulcorner g \urcorner\rangle$ は f の指標である（ここで n は f の項数)。

再帰的関数の指標は唯一つには定まらない。なぜならば一つの関数を構成するのにはさまざまな方法があり、それぞれに対して別々の指標が割り当てられるからである。また、どんな再帰的関数の指標でもない自然数が存在する。それには三つの場合がある。第一に自然数 n がどのような有限列をも表さない場合、すなわち $\neg\mathsf{seq}(n)$ の場合であり、第二に n は何らかの有限列を表すが、上の形に当てはまらない場合であり、第三に n は上の形に当てはまるが、n は $\ulcorner min(g) \urcorner$ を含みながらも指標 $\ulcorner g \urcorner$ の表す関数が実効性条件を満たしていない場合である。

一項関数 arity と一項関係 wf を次のように定義する。

$$\begin{array}{rcl}
\mathsf{arity}(x) & = & (x)_2 \\
\mathsf{wf}(x) & \iff & \mathsf{seq}(x) \land (0 \le (x)_1 \le 7) \\
& & \land((x)_1 = 0 \to \mathsf{leng}(x) = 2) \\
& & \land((x)_1 = 1 \to \mathsf{leng}(x) = 2 \land \mathsf{arity}(x) = 1) \\
& & \land((x)_1 = 2 \to \mathsf{leng}(x) = 3 \land (x)_3 \le \mathsf{arity}(x)) \\
& & \land(3 \le (x)_1 \le 5 \to \mathsf{leng}(x) = 2 \land \mathsf{arity}(x) = 2) \\
& & \land((x)_1 = 6 \to \mathsf{leng}(x) = \mathsf{arity}((x)_2) + 3 \land \forall 1 \le y \le m(\mathsf{arity}((x)_{y+2}) = \mathsf{arity}(x))) \\
& & \land((x)_1 = 7 \to \mathsf{leng}(x) = 3 \land \mathsf{arity}(x) = \mathsf{arity}((x)_3))
\end{array}$$

直感的にいえば、$\mathsf{wf}(e)$ は「自然数 e は一番外側だけを見れば指標の定義の形に合致している」ことを述べている。特に e を関数 f の指標とすると、$\mathsf{wf}(e)$ が成り立つ。しかし $\mathsf{wf}(e)$ が成り立つからといって、必ずしも e が指標であるとは限らない。実効性条件が満たされていないかもしれないし、e の内側までみれば指標の定義にあっていないかもしれない。$\mathsf{arity}(e)$ は e が関数 f の指標のときには、関数 f の項数を表す。

$\ulcorner f \urcorner$ を k 項関数の指標とし、$\vec{m} = m_1, \ldots, m_k$、$n$ を自然数とするとき、自然数 $\langle \ulcorner f \urcorner, \vec{m}, n \rangle$ のことを $\ulcorner f(\vec{m}) = n \urcorner$ と書いて表す。表記法から推察できるように、この自然数は等式 $f(\vec{m}) = n$ を表すコードである。

次に 1 項関数 fname, output、1 項関係 equation を次のように定義する。

$$
\begin{aligned}
\mathsf{fname}(x) &= (x)_1 \\
\mathsf{output}(x) &= (x)_{\mathsf{leng}(x)} \\
\mathsf{equation}(x) &\iff \mathsf{wf}(\mathsf{fname}(x)) \wedge \mathsf{leng}(x) = \mathsf{arity}(\mathsf{fname}(x)) + 2
\end{aligned}
$$

すると $\mathsf{equation}(\ulcorner f(\vec{m}) = n \urcorner)$ は常に成り立ち、また

$$
\begin{aligned}
\mathsf{fname}(\ulcorner f(\vec{m}) = n \urcorner) &= \ulcorner f \urcorner \\
\mathsf{output}(\ulcorner f(\vec{m}) = n \urcorner) &= n
\end{aligned}
$$

が成り立つ。

$\ulcorner comp(g, h_1, \ldots, h_k)(\vec{m}) = n \urcorner$ の形の自然数が与えられたとき、次の自然数をこの等式コードの**証拠**と呼ぶことにする。

$$\langle \ulcorner h_1(\vec{m}) = n_1 \urcorner, \ldots, \ulcorner h_k(\vec{m}) = n_k \urcorner, \ulcorner g(n_1, \ldots, n_k) = n \urcorner \rangle$$

もしもこのような自然数が存在し、かつ $h_1(\vec{m}) = n_1$, ..., $h_k(\vec{m}) = n_k$, $g(n_1, \ldots, n_k) = n$ がすべて成り立つならば、$\ulcorner comp(g, h_1, \ldots, h_m) \urcorner$ が表す関数 f について $f(\vec{m}) = k$ が成り立つ。ゆえにこの自然数は $f(\vec{m}) = k$ が成り立つためのまさに "証拠" なのである。

$\ulcorner min(g)(\vec{m}) = n \urcorner$ の形の自然数が与えられたとき、次の自然数をこの等式コードの**証拠**と呼ぶ。

$$\langle \ulcorner g(\vec{m}, 0) = k_0 \urcorner, \ldots, \ulcorner g(\vec{m}, n-1) = k_{n-1} \urcorner, \ulcorner g(\vec{m}, n) = 0 \urcorner \rangle$$

ただし $k_0, \ldots, k_{n-1} > 0$ とする。上と同じ意味で、この自然数は $\mu z(g(\vec{m}, z) = 0) = n$ が成り立つことの "証拠" になっている。

二項関係 cwitness と muwitness を次のように定義する。

$$
\begin{aligned}
\mathsf{cwitness}(x, y) \iff\ & \mathsf{seq}(y) \wedge (\forall 1 \le z \le \mathsf{leng}(y).\mathsf{equation}((y)_z)) \\
& \wedge \forall 1 \le z \le \mathsf{leng}(y) \dot{-} 1((\mathsf{fname}(x))_{z+3} = \mathsf{fname}((y)_z) \\
& \quad \wedge \forall 1 \le w \le \mathsf{arity}(\mathsf{fname}(x))((x)_{w+1} = ((y)_z)_{w+1}) \\
& \quad \wedge \mathsf{output}((y)_z) = ((y)_{\mathsf{leng}(y)})_z) \\
& \wedge (\mathsf{fname}(x))_3 = \mathsf{fname}((y)_{\mathsf{leng}(y)}) \wedge (\mathsf{output}((y)_{\mathsf{leng}(y)}) = \mathsf{output}(x)). \\
\mathsf{muwitness}(x, y) \iff\ & \mathsf{seq}(y) \wedge (\forall 1 \le z \le \mathsf{leng}(y).\mathsf{equation}((y)_z) \wedge (\mathsf{fname}(x))_3 = \mathsf{fname}((y)_z) \\
& \wedge \forall 1 \le w \le \mathsf{arity}(\mathsf{fname}(x))((x)_{w+1} = ((y)_z)_{w+1}) \\
& \wedge (((y)_z)_{\mathsf{arity}(\mathsf{fname}(x))+1} + 1 = z) \wedge (z \neq \mathsf{leng}(y) \to \mathsf{output}((y)_z) > 0)) \\
& \wedge (\mathsf{leng}(y) = \mathsf{output}(x) + 1).
\end{aligned}
$$

このように定義すると次のことが成り立つ: $eq_1 = \ulcorner comp(g, h_1, \ldots, h_k)(\vec{m}) = n \urcorner$, $eq_2 = \ulcorner min(g)(\vec{m}) = n \urcorner$ のとき、

$$
\begin{aligned}
\mathsf{cwitness}(eq_1, w) &\iff w \text{ が } eq_1 \text{ の証拠である。} \\
\mathsf{muwitness}(eq_2, w) &\iff w \text{ が } eq_2 \text{ の証拠である。}
\end{aligned}
$$

自然数 $\langle q_1, \ldots, q_r \rangle$ が q_r の**計算列**と呼ばれるのは、各 q_i が次の条件を満たす場合である：

1. q_i は等式のコードである。
2. $\mathsf{fname}(q_i) = \ulcorner zero^k \urcorner$ ならば $q_i = \ulcorner zero^k(\vec{m}) = 0 \urcorner$ の形である。
3. $\mathsf{fname}(q_i) = \ulcorner suc \urcorner$ ならば $q_i = \ulcorner suc(m) = m + 1 \urcorner$ の形である。
4. $\mathsf{fname}(q_i) = \ulcorner proj_j^k \urcorner$ ならば $q_i = \ulcorner proj_j^k(m_1, \ldots, m_k) = m_j \urcorner$ の形である。
5. $\mathsf{fname}(q_i) = \ulcorner plus \urcorner$ ならば $q_i = \ulcorner plus(m_1, m_2) = m_1 + m_2 \urcorner$ の形である。
6. $\mathsf{fname}(q_i) = \ulcorner mult \urcorner$ ならば $q_i = \ulcorner mult(m_1, m_2) = m_1 \cdot m_2 \urcorner$ の形である。
7. $\mathsf{fname}(q_i) = \ulcorner equal \urcorner$ ならば $q_i = \ulcorner mult(m_1, m_2) = \chi_=(m_1, m_2) \urcorner$ の形である。
8. $\mathsf{fname}(q_i) = \ulcorner comp(g, h_1, \ldots, h_k) \urcorner$ または $\mathsf{fname}(q_i) = \ulcorner min(g) \urcorner$ ならば、q_i の証拠はすべて $q_1, \ldots, q_{i-1}$ の中に現れる。

補題 5.4 $\ulcorner f \urcorner$ を再帰的関数 f の指標とする。このとき、

$f(\vec{m}) = n$ である $\Longleftrightarrow$ $\ulcorner f(\vec{m}) = n \urcorner$ の計算列が存在する。

証明 $(\Rightarrow)$ 再帰的' 関数 f の構成に関する帰納法による。
$(\Leftarrow)$ k を何らかの等式 $\ulcorner g(\vec{m}') = n' \urcorner$ の計算列とするとき、$g(\vec{m}') = n'$ となることを $\mathsf{leng}(k)$ に関する帰納法により証明すればよい。ここで $\ulcorner g \urcorner$ は g の指標である。 ■

1 項関係 $\mathsf{compseq}(x)$、1 項関数 $\mathsf{main}(x)$ を次のように定義する。

$$
\begin{aligned}
\mathsf{compseq}(x) \quad \Longleftrightarrow \quad & \mathsf{seq}(x) \wedge \forall 1 \le i \le \mathsf{leng}(x)(\mathsf{equation}(x) \\
& \wedge \forall k < x(\mathsf{fname}((x)_i) = \ulcorner zero^k \urcorner \to \mathsf{output}((x)_i) = 0) \\
& \wedge(\mathsf{fname}((x)_i) = \ulcorner suc \urcorner \to \mathsf{output}((x)_i) = ((x)_i)_2 + 1) \\
& \wedge \forall k_1 < x \forall k_2 < x(\mathsf{fname}((x)_i) = \ulcorner proj_{k_2}^{k_1} \urcorner \to \mathsf{output}((x)_i) = ((x)_i)_{k_2+1}) \\
& \wedge(\mathsf{fname}((x)_i) = \ulcorner plus \urcorner \to \mathsf{output}((x)_i) = ((x)_i)_2 + ((x)_i)_3) \\
& \wedge(\mathsf{fname}((x)_i) = \ulcorner mult \urcorner \to \mathsf{output}((x)_i) = ((x)_i)_2 \cdot ((x)_i)_3) \\
& \wedge(\mathsf{fname}((x)_i) = \ulcorner equal \urcorner \to \mathsf{output}((x)_i) = \chi_=(((x)_i)_2, ((x)_i)_3)) \\
& \wedge((\mathsf{fname}((x)_i))_1 = 6 \to \exists y < x(\mathsf{cwitness}(y) \\
& \quad \wedge \forall 1 \le z \le \mathsf{leng}(y) \exists 1 \le j < i((y)_i = (x)_j))) \\
& \wedge((\mathsf{fname}((x)_i))_1 = 7 \to \exists y < x(\mathsf{muwitness}(y) \\
& \quad \wedge \forall 1 \le z \le \mathsf{leng}(y) \exists 1 \le j < i((y)_i = (x)_j))). \\
\mathsf{main}(x) \quad = \quad & (x)_{\mathsf{leng}(x)}.
\end{aligned}
$$

このように定義すると、次のことが成り立つ：eq を等式のコードとするとき、

$$\mathsf{compseq}(w) \wedge \mathsf{main}(w) = eq \Longleftrightarrow w \text{ は } eq \text{ の計算列である。}$$

次の定理はクリーネの**標準形定理** (normal form theorem) と呼ばれている。これは再帰的関数論の基本定理であるといってよい。

定理 5.5 次のような性質を持つ *1* 項原始再帰的関数 U と原始再帰的関係 T_1, T_2, ... が存在する（ここで各 T_i は $i+2$ 項関係)。e を i 項再帰的関数 f の指標とするとき、

$$f(\vec{x}) = \mathsf{U}(\mu y \mathsf{T}_i(e, \vec{x}, y))$$

また、指標 e を固定したとき、$i+1$ 項関係 $\mathsf{T}_i(e, \vec{x}, y)$ は実効性条件を満たす。

ここで U や各 T_i は原始再帰的であるから、次のことが帰結する：

- どんな再帰的関数も、最小化を高々1 回使えば定義することができる。

証明 T_i, U を次のように定義すればよい。

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{T}_i(e, \vec{x}, y) & \Longleftrightarrow & \mathsf{compseq}(y) \wedge \exists z < y(\mathsf{main}(y) = \langle e, \vec{x}, z \rangle). \\ \mathsf{U}(y) & = & \mathsf{output}(\mathsf{main}(y)). \end{array}$$

さて、f を i 項再帰的関数とし、e をその指標とする。もしも $f(\vec{m}) = n$ ならば、補題 5.4 により $\ulcorner e(\vec{m}) = n \urcorner$ の計算列が存在する。その中でも最小の計算列を w とする。このとき $\mathsf{compseq}(w) \wedge \mathsf{main}(w) = \langle e, \vec{m}, n \rangle$ であり、当然 $n < w$ であるから、$\mathsf{T}_i(e, \vec{m}, w)$ が成り立つ。w の最小性により、

$$\mathsf{U}(\mu y \mathsf{T}_i(e, \vec{m}, y)) = \mathsf{U}(w) = \mathsf{output}(\langle e, \vec{m}, n \rangle) = n.$$

これで $f(\vec{m}) = n$ ならば $\mathsf{U}(\mu y \mathsf{T}_i(e, \vec{m}, y)) = n$ となることが示された。逆方向も同様に証明できる。 ■

練習問題 5.6

1. *(**)* 定義 *5.3* では再帰的'関数の構成法にのっとって指標を定義した。代わりに（原始再帰法を含む）もともとの再帰的関数の構成法にのとって指標を定義し、標準形定理を証明せよ。

2. *(*)* 上の問題に基づいて、「x は原始再帰的関数の指標である」という性質は原始再帰的であることを証明せよ。（この事実は、後で証明する次の事実と対比すると面白い：「x は再帰的関数の指標である」という性質は再帰的ではない。）

3. *(*)* 補題 *5.4* を証明せよ。

4.3 節では、原始再帰的関数の限界について考察した。特に原始再帰的関数の列 Υ_0, Υ_1, ... を構成し、そこから定義できる関数 $\Upsilon(x) = \Upsilon_x(x)$ は原始再帰的ではないことを証明した。一方、標準形定理を用いれば次のことが証明できる。

命題 5.7 Υ は再帰的関数である。

証明 各 $n \geq 0$ について Υ_n は原始再帰的関数であるから、指標 $\mathsf{ups}(n)$ を持つ。しかも $\mathsf{ups}(n)$ を n についての 1 項関数とみたとき、ups が原始再帰的であることも証明することができる。

標準形定理により、

$$\Upsilon_w(x) = \mathsf{U}(\mu y \mathsf{T}_1(\mathsf{ups}(w), x, y)).$$

$ups(w)$ はどんな w についても指標を返すから、実効性条件 $\forall w \forall \vec{x} \exists y(\mathsf{T}_1(\mathsf{ups}(w), x, y))$ が成り立つ。ゆえに $\Upsilon_w(x)$ は w, x についての 2 項再帰的関数であることがわかる。よって $\Upsilon(x) = \Upsilon_x(x)$ も再帰的関数である。 ■

Υ は原始再帰的ではないが再帰的である。ゆえに再帰的関数のクラスは原始再帰的関数のクラスよりも真に大きいことがわかる。

練習問題 5.8 練習問題 *4.28* に出てきたアッカーマン関数が再帰的関数であることを証明せよ。

1 項再帰的関数の指標の集合を考える。各指標は自然数であるから、自然数の大小関係に従って、指標は一列に並べることができる。いま、n 番目の指標を $\mathsf{recindex}(n)$ と書くことにすれば、$\mathsf{recindex}(x)$ は x についての 1 項関数としてみることができる。標準化定理とカントールの対角線論法を組み合わせることにより、次のことが証明できる。

定理 5.9 recindex は再帰的関数ではない。

証明 仮に recindex が再帰的関数だとして、2 項関数 $\mathsf{value}(w, x)$ を次のように定義する：

$$\mathsf{value}(w, x) = \mathsf{U}(\mu y \mathsf{T}_1(\mathsf{recindex}(w), x, y)).$$

$\mathsf{value}(w, x)$ は、「w 番目の 1 項関数にインプット x を与えたときのアウトプット」を表す。$\mathsf{recindex}(w)$ は再帰的であり、なおかつどんな w に対しても常に何らかの指標を返すので、実効性条件 $\forall w \forall x \exists y \mathsf{T}_1(\mathsf{recindex}(w), x, y))$ が成り立つ。ゆえに $\mathsf{value}(w, x)$ は再帰的であることになる。

ゆえに次のように対角化により定義される 1 項関数 $\overline{\mathsf{value}}$ も再帰的である：

$$\overline{\mathsf{value}}(x) = \mathsf{value}(x, x) + 1.$$

$\overline{\mathsf{value}}$ は何らかの指標 e を持つはずである。e が k 番目の（1 項再帰的関数の）指標であるとすると、すると定義により、$\mathsf{value}(k, x) = \overline{\mathsf{value}}(x)$ が成り立つはずである。しかしこれは不合理。なぜならば、

$$\overline{\mathsf{value}}(k) = \mathsf{value}(k, k) + 1 = \overline{\mathsf{value}}(k) + 1$$

となり矛盾するからである。ゆえに recindex は再帰的ではない。 ■

ここで 2 項関数 value から 1 項関数 $\overline{\mathsf{value}}$ を構成する方法が対角化と呼ばれるのは次の理由による。いま $\mathsf{value}(n, m)$ の値（$n = 0, 1, \ldots; m = 0, 1, \ldots$）を表

	0	1	$\cdots$	m	$\cdots$
0	$\mathsf{value}(0,0)$	$\mathsf{value}(0,1)$	$\cdots$	$\mathsf{value}(0,m)$	$\cdots$
1	$\mathsf{value}(1,0)$	$\mathsf{value}(1,1)$	$\cdots$	$\mathsf{value}(1,m)$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
n	$\mathsf{value}(n,0)$	$\mathsf{value}(n,1)$	$\cdots$	$\mathsf{value}(n,m)$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

で表したとき、$\overline{\mathsf{value}}(n)$ は対角線上の n 番目の値 $\mathsf{value}(n,n)$ に 1 を加えたものに相当するからである。

系 5.10 次のように定義される性質 recindex? は再帰的ではない：

$$\mathsf{recindex?}(n) \iff n \text{ は } \mathit{1} \text{ 項再帰的関数の指標である。}$$

証明　性質 recindex? を用いれば、1 項関数 recindex は次のように定義できる：

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{recindex}(0) & = & \mu x.\mathsf{recindex?}(x) \\ \mathsf{recindex}(y+1) & = & \mu x(\mathsf{recindex}(y) < x \land \mathsf{recindex?}(x)). \end{array}$$

ここで $\mathsf{recindex}(y) < x \land \mathsf{recindex?}(x)$ に関して実効性条件が成り立つこと、すなわちどんな y が与えられても、この性質を満たす x が常に存在することは明らかである。ゆえにもしも index? が再帰的だとすると、recindex も再帰的になり、前の定理に反する。 ■

6　部分再帰的関数と再帰的枚挙可能集合

6.1　部分再帰的関数

再帰的関数は「計算可能な」関数という直感的概念を数学的に定式化したものである。ここで計算可能な関数 f とは、すなわちインプットが与えられたときにアウトプットを計算するための具体的な手続が存在し、その手続は常に有限時間で実行できるというようなもののことだと思ってよい。これを少し弱めて次のような直感的概念にも数学的定式化を与えておくと便利である：「f にはインプットが与えられたときアウトプットを計算するための具体的な手続があるのだが、その手続は常に有限時間で実行できるわけではなく、ときには計算がいつまでたっても終了しないこともある。それでも計算が終了するときにはその手続は f の正しい値を出力してくれる。」この直感に相当するのが**部分再帰的関数**の概念である。

部分再帰的関数は部分関数の概念に基づいて定義される。**部分関数**とは、大雑把にいって全てのインプットについてアウトプットが存在するとは限らないような “関数” のことである。（正確な定義は 3 章を参照。）例えば割り算 / は自然数上の演算として見た場合、部分関数である。なぜならば n が m で割り切れない場合には n/m は定義されていないからである。同様に / は有理数上の演算としても部分関数である。なぜならば分母が 0 の場合 $n/0$ が定義されていないからである。一方、/ は 0 以外の有理数の集合上では関数であるといえる。

まず、予備的な定義からはじめる。

定義 6.1

- f を部分関数とし、$\vec{n} \in \mathbf{N}$ とするとき、$f(\vec{n})$ の値が定義されているときには $f(\vec{n})\downarrow$ と書き、さもなければ $f(\vec{n})\uparrow$ と書く。
- $f(\vec{x})$、$g(\vec{x})$ を部分関数とするとき、$f(\vec{x}) \sim g(\vec{x})$ が成り立つのは、どんな $\vec{n} \in \mathbf{N}$ についても

  1. $f(\vec{n})\downarrow \Longleftrightarrow g(\vec{n})\downarrow$
  2. $f(\vec{n})\downarrow$ ならば $f(\vec{n}) = g(\vec{n})$

  が成り立つときである。

部分関数 f が**全域的** (total) といわれるのは、どんな $\vec{n} \in \mathbf{N}$ についても $f(\vec{n})\downarrow$ が成り立つ場合である。全域的な部分関数とは、すなわち関数のことに他ならない。

部分再帰的関数とは、大雑把に言って再帰的関数の定義 (5.1) から実効性条件を取り除くことにより得られるもののことである。

定義 6.2 部分再帰的関数 *(partially recursive functions)* の集合は次のように帰納的に定義される。

1. ゼロ関数、射影関数、後続者関数は部分再帰的である。

2. **合成** *(composition)*：g が m 項部分再帰的関数であり、$h_1,\ldots,h_m$ が n 項部分再帰的関数ならば、

$$f(x_1,\ldots,x_n)\sim g(h_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,h_m(x_1,\ldots,x_n))$$

により定義される関数 f は部分再帰的関数である。ただし $g(h_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,h_m(x_1,\ldots,x_n))$ は $h_1(\vec{x})=z_1$, $\ldots$, $h_m(\vec{x})=z_m$ かつ $g(z_1,\ldots,z_m)$ が定義されているときにのみ定義されており、値 z をとるものとする。

3. **原始再帰法** *(primitive recursion)*：g が n 項部分再帰的関数であり、h が $n+2$ 項部分再帰的関数ならば、

$$\begin{aligned} f(x_1,\ldots,x_n,0) &\sim g(x_1,\ldots,x_n) \\ f(x_1,\ldots,x_n,y+1) &\sim h(x_1,\ldots,x_n,y,f(x_1,\ldots,x_n,y)) \end{aligned}$$

により定義される関数 f も部分再帰的である。ただし $h(x_1,\ldots,x_n,y,f(x_1,\ldots,x_n,y))$ は $f(\vec{x},y)=z_0$ かつ $h(\vec{x},y,z_0)=z$ が定義されているときにのみ定義されており、値 z をとるものとする。（このことからすぐわかるように、ある n について $f(\vec{x},n)\uparrow$ ならば、全ての $m\geq n$ について $f(\vec{x},m)\uparrow$ である。）

4. **最小化**（*minimization*)：g が $n+1$ 項部分再帰的関数のとき

$$f(x_1,\ldots,x_n)\sim\mu y(g(x_1,\ldots,x_n,y)=0)$$

により定義される関数 f は部分再帰的である。ここで $\mu y(g(x_1,\ldots,x_n,y)=0)$ は $g(x_1,\ldots,x_n,y)=0$ が成り立つような y が存在するときにはその中で最小のものを表し、さもなければ値が定義されていないものとする。（ここでは実効性条件は仮定されていないことに注意。この点が再帰的関数との最大の違いである。）

明らかに全ての再帰的関数は部分再帰的関数でもある。再帰的関数の場合と同様に、次の定理が成り立つ。

定理 6.3 次のように定義される部分再帰的'関数のクラスは部分再帰的関数のクラスと一致する。

1. ゼロ関数、射影関数、後続者関数、$+,\cdot$ および $\chi_=$ は部分再帰的'である。

2. 部分再帰的'関数から合成および（実効性条件なしの）最小化により得られる関数は再帰的'である。

ゆえに以後部分再帰的関数と部分再帰的　'関数を同一視してよい。定義 5.3 と同様にしてどんな部分再帰的関数にも指標を与えることができる。それには定義 5.3 における最小化の場合で実効性条件を取り除けばよい。

定義 6.4 部分再帰的'関数 f の**指標** *(index)* の定義は、定義 *5.3* の *8.* を次のように変更することにより得られる。

8. f が再帰的関数 g から最小化により定義されているとする。このとき、$\lceil min(g) \rceil = \langle 7, n, \lceil g \rceil \rangle$ は f の指標である（ここで n は f の項数）。

すると部分再帰的関数についても標準形定理が成り立つ：

定理 6.5 次のような性質を持つ *1* 項原始再帰的関数 U と原始再帰的関係 $\mathsf{T}_1, \mathsf{T}_2, \ldots$ が存在する（ここで各 T_i は $i+2$ 項関係）。e を i 項再帰的部分関数 f の指標とするとき、

$$f(\vec{x}) \sim \mathsf{U}(\mu y \mathsf{T}_i(e, \vec{x}, y)).$$

実際、原始再帰的関数 U と T_i の定義は再帰的関数の場合と全く同じである。唯一の違いは、たとえ e を固定しようとも $\mathsf{T}_i(e, \vec{x}, y)$ についての実効性条件が満たされているとは限らないという点だけである。

しかし再帰的関数とのアナロジーが成り立つのはここまでである。例えば定理 13.2 と対照的に次のことが成り立つ。

命題 6.6 x 番目の *1* 項部分再帰的関数の指標を返す関数 $\mathsf{parrecindex}(x)$ は再帰的でありしかも原始再帰的である。また、x が *1* 項部分再帰的関数の指標であるときに限って成立する性質 $\mathsf{parrecindex?}(x)$ も原始再帰的である。

性質 parrecindex? は原始再帰的であるが、recindex? は再帰的でない。両者を分けているのは、最小化を用いる際に実効性を判定するかどうかの違いであり、この点が困難の核心であると言える。

練習問題 6.7 *(*)* 命題 *6.6* を証明せよ。

再帰的関数を構成するときには、最小化を用いるたびに逐一、構成部分の実効性条件を判定する必要があった。次の定理が示しているのは、このように実効性をいちいち判定せずとも、全体として得られる部分再帰的関数が全域的でさえあれば、それは再帰的関数であるといってよいということである。

定理 6.8 全域的な部分再帰的関数は再帰的関数である。

証明 f を i 項の全域的な部分再帰的関数とする。e を f の指標とすると、定理 6.5 により、$f(\vec{x}) \sim \mathsf{U}(\mu y \mathsf{T}_i(e, \vec{x}, y))$ が成り立つ。f は全域的であるから、$\mu y \mathsf{T}_i(e, \vec{x}, y)$ はどんな $\vec{x}$ についても定義されていなければならず、ゆえに $\mathsf{T}_i(e, \vec{x}, y)$ は実効性条件を満たしているのでなければならない。ゆえに $\mathsf{U}(\mu y \mathsf{T}_i(e, \vec{x}, y))$ は再帰的関数である。 ■

上の定理があるので、再帰的関数とは部分再帰的関数の中で全域的であるもののことに過ぎないと考えることができる。ゆえに今後は部分再帰的関数一般について話を進めることにする。

$n+1$ 項部分再帰的関数 $\{e\}^n(x_1, \ldots, x_n)$ を

$$\{e\}^n(\vec{x}) \sim \mathsf{U}(\mu y \mathsf{T}_n(e, \vec{x}, y))$$

により定義する。ここで U, T_n は定理 6.5 に現れたものである。すなわち、$\{e\}^n(x_1, \ldots, x_n)$ は、もしも e が何らかの n 項部分再帰的関数 f の指標の場合には $f(x_1, \ldots, x_n)$ と一致し、そうでなければ（未定義の場合も含めて）任意の値をとるような部分関数である。

次の定理は**パラメータ定理** (parameter theorem) または **s-m-n 定理**と呼ばれる。

定理 6.9 任意の n について原始再帰的関数 S_n が存在し、

$$\{e\}^{n+1}(x_1,\dots,x_n,y) \sim \{\mathsf{S}_n(e,y)\}(x_1,\dots,x_n)$$

が成り立つ。より一般的に、任意の $m,n \geq 0$ について原始再帰的関数 S_n^m が存在し、

$$\{e\}^{m+n}(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m) \sim \{\mathsf{S}_n^m(e,y_1,\dots,y_m)\}(x_1,\dots,x_n)$$

が成り立つ。

証明 ここでは一番目の主張のみを示す。

定数関数 $\mathsf{const}_k^n(\vec{x}) = k$ は原始再帰的関数である。この関数の指標を $\ulcorner const_k^n \urcorner$ と書くことにすると、n を固定したとき $\ulcorner const_y^n \urcorner$ は y についての 1 項関数としてみることができる。しかもこの関数は原始再帰的であることが証明できる。S_n を次のように定義する:

$$\mathsf{S}_n(e,y) = \langle 6, n, e, \ulcorner proj_1^n \urcorner, \dots, \ulcorner proj_n^n \urcorner, \ulcorner const_y^n \urcorner \rangle.$$

すると、自然数 e, p が与えられたとき、もしも e が $n+1$ 項部分関数 $f(\vec{x},y)$ の指標ならば $\mathsf{S}_n(e,p)$ は n 項部分再帰的関数 $f(\vec{x},\mathsf{const}_p^n(\vec{x}))$ の指標となっていることがわかる。ゆえに

$$\begin{aligned}
\{e\}^{n+1}(\vec{x},p) = q \quad &\iff \quad f(\vec{x},p) = q \\
&\iff \quad f(\vec{x},\mathsf{const}_p^n(\vec{x})) = q \\
&\iff \quad \{\mathsf{S}_n(e,p)\}^n(\vec{x}) = q.
\end{aligned}$$

(より厳密には、e がたとえ指標でなくても、(何らかの事故的な理由で) $\{e\}^{n+1}(\vec{x},p) = q$ となる場合には $\{\mathsf{S}_n(e,p)\}^n(\vec{x}) = q$ となり、逆もまた真になるということを示さねばならないが、ここでは割愛する。) ■

この定理の帰結として次の**再帰定理** (recursion theorem)、あるいは**不動点定理** (fixpoint theorem) が得られる。

定理 6.10 $f(x_1,\dots,x_n,y)$ を再帰的部分関数とするとき、ある自然数 fix_f が存在して、

$$\{\mathsf{fix}_f\}^n(x_1,\dots,x_n) \sim f(x_1,\dots,x_n,\mathsf{fix}_f)$$

が成り立つ。

証明 $\mathsf{omega}(y) = \mathsf{S}_n(y,y)$ と定義する。すると定理 6.9 によりどんな y についても

$$\{y\}^{n+1}(\vec{x},y) \sim \{\mathsf{S}_n(y,y)\}^n(\vec{x}) \sim \{\mathsf{omega}(y)\}^n(\vec{x})$$

が成り立つ。$f(\vec{x},\mathsf{omega}(y))$ は再帰的部分関数であるから、指標 e が存在する。このとき、$\mathsf{fix}_f = \mathsf{omega}(e)$ と定義する。すると、

$$\{\mathsf{fix}_f\}^n(\vec{x}) \sim \{\mathsf{omega}(e)\}^n(\vec{x}) \sim \{e\}^{n+1}(\vec{x},e) \sim f(\vec{x},\mathsf{omega}(e)) \sim f(\vec{x},\mathsf{fix}_f)$$

が成り立つ。 ■

6.2　再帰的枚挙可能関係

再帰的関数を特性関数とするような関係のことを再帰的関係と呼んだ。すなわち再帰的関数からはじめて、それに対応する関係を考え、それを再帰的関係と呼んだわけである。同じような考え方により、部分再帰的関数に対応する関係の概念を定義することができる。

定義 6.11 n 項関係 $R \subseteq \mathbf{N}^n$ が**再帰的枚挙可能** *(recursively enumerable)* であるのは、次のように定義される n 項部分関数 χ'_R が部分再帰的関数の場合である：

$$\begin{array}{rcll} \chi'_R(\vec{x}) & = & 1 & R(\vec{x}) \text{ が成り立つとき} \\ & = & \text{未定義} & \text{そうでないとき} \end{array}$$

命題 6.12 再帰的関係は全て再帰的枚挙可能関係である。

証明　$R \subseteq \mathbf{N}^n$ が再帰的関係であるとする。このとき、χ'_R は次のように定義することができる。

$$\chi'_R(\vec{x}) = \mu z(R(\vec{x}) \wedge z = 1).$$

■

「再帰的枚挙可能」の名前は次の性質に由来する。

命題 6.13 $R \subseteq \mathbf{N}$ を空でない集合とする。このとき R が再帰的枚挙可能集合であるのは次のような原始再帰的関数 enum_R が存在する場合である：

$$R(n) \Longleftrightarrow \text{ある } m \in \mathbf{N} \text{ について } \mathsf{enum}_R(m) = n$$

すなわち $R = \{\mathsf{enum}_R(m) | m \in \mathbf{N}\}$ が成り立つ場合である。

より一般的に、$R \subseteq \mathbf{N}^n$ を空でない n 項関係とする。このとき R が再帰的枚挙可能であるのは次のような原始再帰的関数 enum_R が存在する場合である：

$$R(\vec{n}) \Longleftrightarrow \text{ある } m \in \mathbf{N} \text{ について } \mathsf{enum}_R(m) = \langle \vec{n} \rangle.$$

証明　最初の主張のみ証明する。$R \subseteq \mathbf{N}$ を空でない再帰的枚挙可能集合とすると、部分再帰的関数 χ'_R が存在して、

$$\begin{array}{rcll} \chi'_R(x) & = & 1 & R(x) \text{ が成り立つとき} \\ & = & \text{未定義} & \text{そうでないとき} \end{array}$$

となる。e を χ'_R の指標とすれば、標準形定理（定理 6.5）により原始再帰的関数 U と T が存在して

$$\chi'_R(x) \sim \mathsf{U}(\mu y \mathsf{T}(e, x, y))$$

が成り立つ。ゆえに任意の $n \in \mathbf{N}$ について、

$$(*) \quad R(n) \Longleftrightarrow \text{ある } k \in \mathbf{N} \text{ について } \mathsf{T}(e, n, k)$$

である。

仮定により R は空ではないので、$R(d)$ となる要素 d が存在する。このとき、関数 enum_R を次のように定義する。

$$\begin{array}{rcll} \mathsf{enum}_R(z) & = & \pi_1(z) & \mathsf{T}(\pi_1(z), \pi_2(z)) \text{ が成り立つとき} \\ & = & d & \text{そうでないとき} \end{array}$$

ここで π_1, π_2 は 4.4 節で定義された、順序対をコード化する関数 $\langle x_1, x_2\rangle$ の逆関数である。すなわち、$\pi_i(\langle x_1, x_2\rangle) = x_i \quad (i = 1, 2)$。このように定義された enum_R が原始再帰的関数であることは明らかなので、あとはこの関数が求められる性質を満たすことを示せばよい。

まず、自然数 n について $R(n)$ が成り立つとする。すると、$(*)$ により、ある $k \in \mathbf{N}$ について $\mathsf{T}(e, n, k)$ である。$m = \langle n, k\rangle$ とすれば、$\mathsf{T}(\pi_1(m), \pi_2(m))$ が成り立つ。すなわち、$\mathsf{enum}_R(m) = \pi_1(m) = n$ である。

逆に、ある m について $\mathsf{enum}_R(m) = n$ であるとする。もしも $\mathsf{T}(\pi_1(m), \pi_2(m))$ が成り立つならば、定義により $n = \pi_1(m)$ であり、(*) により、$R(n)$ となる。また $\mathsf{T}(\pi_1(m), \pi_2(m))$ が成り立たないときには、$n = d$ で $R(d)$ であるから、やはり $R(n)$ となる。 ■

このことが意味するのは、R の要素は、原始再帰的関数 enum_R によって、「0 番目の要素」$\mathsf{enum}_R(0)$, 「1 番目の要素」$\mathsf{enum}_R(1)$, 「2 番目の要素」$\mathsf{enum}_R(2), \ldots$ というふうに枚挙できるということである（ただし重複を許す）。それゆえ自然数 n が与えられて $R(n)$ が成り立つことを確かめるには、この枚挙を続けていきなんらかの m について $\mathsf{enum}_R(m) = n$ が成り立つことを示せばよい。しかしこのような枚挙をいくら続けても $R(n)$「でない」ということは確認することができない。例え 100000000 までこの枚挙を続けて n が現れなかったとしても 100000001 番目に n が現れる可能性は捨てきれないからである。このため、再帰的枚挙可能集合はしばしば**半決定可能** (partially decidable) 集合とも呼ばれる。

命題 6.14 R, S が再帰的枚挙可能関係のとき、$R \wedge S$, $R \vee S$, $\forall y < zR(\vec{x}, y)$, $\exists y < zR(\vec{x}, y)$, $\exists yR(\vec{x}, y)$ も再帰的枚挙可能関係である。

証明 $R \wedge S$, $R \vee S$, $\forall y < zR(\vec{x}, y)$, $\exists y < zR(\vec{x}, y)$ が再帰的枚挙可能関係となることは、命題 4.13、命題 4.15 と同様にして証明することができる。

$\exists yR(\vec{x}, y)$ については、部分再帰的関数 $\chi'_{\exists yR}$ を次のように定義すればよい：

$$\chi'_{\exists yR}(\vec{x}) = \mathsf{pos?}((\mu yR(\vec{x}, y)) + 1).$$

ここで $\mu yR(\vec{x}, y)$ が部分再帰的関数であることは明らかなので、$\chi'_{\exists yR}$ も部分再帰的関数である。 ■

上の性質は $\neg R$, $\forall yR(\vec{x}, y)$ については成り立たない。

定理 6.15 $R \subseteq \mathbf{N}^n$ が再帰的関係であるための必要十分条件は、R と $\neg R$ がともに再帰的枚挙可能関係となることである。

証明 R と $\neg R$ が再帰的枚挙関係であるとする。すると命題 6.13 により、

$$\begin{array}{rcl} R(\vec{x}) & \iff & \exists y(\mathsf{enum}_R(y) = \langle\vec{x}\rangle) \\ \neg R(\vec{x}) & \iff & \exists y(\mathsf{enum}_{\neg R}(y) = \langle\vec{x}\rangle) \end{array}$$

が成り立つ。いま、$S(\vec{x},y) \iff \mathsf{enum}_R(y) = \langle \vec{x} \rangle$、$T(\vec{x},y) \iff \mathsf{enum}_{\neg R}(y) = \langle \vec{x} \rangle$ と書くことにする。排中律により $R(\vec{x}) \vee \neg R(\vec{x})$ は常に成り立ち、また

$$\begin{aligned} R(\vec{x}) \vee \neg R(\vec{x}) &\iff \exists y S(\vec{x},y) \vee \exists y T(\vec{x},y) \\ &\iff \exists y (S(\vec{x},y) \vee T(\vec{x},y)). \end{aligned}$$

であるから、$\exists y(S(\vec{x},y) \vee T(\vec{x},y))$ も常に成り立つ。ゆえに $\mu y(S(\vec{x},y) \vee T(\vec{x},y))$ は再帰的関数である。そして

$$R(\vec{x}) \iff S(\vec{x}, \mu y(S(\vec{x},y) \vee T(\vec{x},y)))$$

がいえるので、R は再帰的関係である。■

命題 6.12 により、再帰的関係は全て再帰的枚挙可能関係であることが示された。では逆はどうだろうか？すなわち再帰的枚挙可能関係はすべて再帰的関係であるといえるだろうか？答えはノーである。このことを示しておこう。

前節で論じたように、１項部分再帰的関数は、1 番目の関数 $f_0(x)$、２番目の関数 $f_1(x)$、３番目の関数 $f_2(x)$ $\dots$ と全部枚挙することができる。しかも x 番目の 1 項部分再帰的関数の指標を返す関数 $\mathsf{parrecindex}(x)$ は原始再帰的関数である。このことから、次のような性質を考えることができる。

> $\mathsf{defined?}(x,y) \Leftrightarrow x$ 番目の１項部分再帰的関数はインプット y において定義されている。すなわち $f_x(y)\downarrow$。

命題 6.16 $\mathsf{defined?}(x,y)$ は再帰的枚挙可能関係である。

証明

$$\begin{aligned} \mathsf{defined?}(x,y) &\iff f_x(y)\downarrow \\ &\iff \mathsf{U}(\mu z \mathsf{T}_1(\mathsf{parrecindex}(x),y,z))\downarrow \\ &\iff \mu z \mathsf{T}_1(\mathsf{parrecindex}(x),y,z)\downarrow \\ &\iff \exists z.\mathsf{T}_1(\mathsf{parrecindex}(x),y,z) \end{aligned}$$

T_1 は原始再帰的関係であるから、命題 6.14 により、$\exists z \mathsf{T}_1(\mathsf{parrecindex}(x),y,z)$ は再帰的枚挙可能関係である。■

命題 6.17 $\mathsf{defined?}(x,y)$ は再帰的関係ではない。

証明 $\mathsf{defined?}(x,y)$ が再帰的関係であると仮定して矛盾を導く。$\mathsf{defined?}(x,y)$ が再帰的関係ならばその否定 $\neg\mathsf{defined?}(x,y)$ も明らかに再帰的なので、次のように定義される関数 g は 1 項部分再帰的関数となる：

$$g(x) = \mu z(\neg\mathsf{defined?}(x,x) \wedge z = 1).$$

今、この関数が k 番目の 1 項部分再帰的関数 f_k であるとする。すると

$$\begin{aligned} \mathsf{defined?}(k,k) &\iff f_k(k)\downarrow \\ &\iff \mu z(\neg\mathsf{defined?}(k,k) \wedge z = 1)\downarrow \\ &\iff \neg\mathsf{defined?}(k,k) \end{aligned}$$

となり矛盾する。ゆえに defined?(x, y) は再帰的関係ではない。 ■

証明から明らかなように、実際には次のことが成り立つ。

系 6.18 $\mathsf{K}(x) \Longleftrightarrow$ defined?(x, x) により定義される性質 K は再帰的枚挙可能であるが、再帰的ではない。

以上をまとめると、次の関係が成り立つ：

$$(\text{再帰的関係のクラス}) = (\text{再帰的枚挙可能関係のクラス}) \cap (\text{再帰的枚挙可能関係のクラス})^C$$

$$(\text{再帰的関係のクラス}) \subsetneq (\text{再帰的枚挙可能関係のクラス})$$

ここで X^C は X の補集合をあらわす。

6.3 再帰的関数論の歴史的背景

以下は次の論文を参考にしている。

> Robin Gandy, The Confluence of Ideas in 1936, *The Universal Turing Machine: A Half-Century Survey (2nd. ed.)*, 1995.

決定問題を巡って：

- D. Hilbert(1900):「２０世紀に取り組むべき２３問題」の第１０番目：

  > ディオファントス方程式が与えられたとき、整数解を持つか否かを**有限回の操作により判定する方法**を見つけよ。

- M. Dehn (1911), A. Thue (1914): 群論における語の問題
- H. Behmann (1922): 高階論理を含む論理一般についての決定問題
- D. Hilbert (1928): 一階述語論理の決定問題（Entscheidungsproblem）：

  > （一階述語論理の）論理的表現が与えられたとき、それが恒真である（あるいは充足可能である）かどうかを**有限回の操作により判定する手続**は存在するか？

「有限回の操作により判定する手続」とは何か？例えば最後の問題について言うならば、論理式の恒真性を判定する手続が存在するのならば、そのような手続を一つ具体的に提示すれば事は足りるが、もしもそのような方法がないのだとしたら、「ない」ということを数学的定理として示すためには、「有限回の操作により判定する方法」とは何かを数学的に定義する必要が出てくる。

不完全性定理を巡って：

- K. Gödel (1931,1934)：第一不完全性定理（の一般化されたヴァージョン）

  > 原始再帰的関数がすべて（数値ごとに）表現可能であるような**形式的体系** T をについて、もしも T が無矛盾ならば T には証明可能でも反証可能でもない論理式が存在する。

「形式的体系」とは何か？大雑把にいって、与えられた記号表現が公理であるかどうか、あるいは正しい推論規則の適用になっているかどうかが、「有限的に判定可能である」ような論理体系のこと。では「有限的に判定可能」とは一体どういうことか？$\Longrightarrow$ 「有限的に判定可能」の一般的定義へ。

原始再帰的関数：

- R. Dedekind (1888): 関数の帰納的定義
- T. A. Skolem (1923): 原始再帰的関数の研究

- D. Hilbert (1926): 高階の原始再帰法（of finite types)
- W. Ackermann (1928): 原始再帰的ではないが、二重原始再帰法（あるいは高階の原始再帰法）を使えば定義できる関数（アッカーマン関数）の発見

アッカーマンの結果により、少なくとも原始再帰的関数だけでは「実効的に計算可能」（Herbrand 1931）な関数全てを特徴付けるのには足りないことがわかる。

実効的に計算可能な関数の定式化：

- J. Herbrand (1931): ゲーデルへの手紙
- A. Church (1932): ラムダ計算の導入（プリンストン在籍）
- K. Gödel (1934): Herbrand-Gödel 再帰性の定義（不完全性定理の一般化に向けて。プリンストンでの講義にて）
- A. Church (1934): 「実効的計算可能性＝ラムダ定義可能性」としようという提案
- S. C. Kleene (1936): 「Herbrand-Gödel 再帰性＝ラムダ定義可能性」の証明。（現在普通使われている形の）一般再帰的関数の定義。後者も前二者と一致する。
- A. Church (1936): **チャーチのテーゼ**

  実効的に計算可能な関数とは、再帰的関数のことに他ならない。

チャーチのテーゼは本当に妥当か？だとしたらどのように正当化することができるのか？

機械的手続の分析：

- A. M. Turing (1936): テューリング機械の概念の導入。

  本当の問題は（「何が計算可能な関数か」ではなく）「数を計算するときに起こりうるプロセス（すなわち機械的手続）とは何か」である。

テューリングは、数学者が紙と鉛筆を用いて計算を行う過程を極限まで抽象化することによりテューリング機械の定義に到達した。（ちなみに現在使われている “computer” という言葉は彼の論文に由来するが、そこでは単に「計算する人」を意味するに過ぎない。）しかもテューリングは、テューリング機械により計算可能な関数はラムダ定義可能な関数と一致することも（ほぼ）証明している。よってチャーチのテーゼは二重の意味で補強されることになった。第一に、全く違う立場からの定義がラムダ定義可能性＝再帰性と一致したということ。これは偶然とは考えにくい。第二に、テューリングの定義は人間が行う具体的な計算行為の徹底的な分析に基づいていること。これにより再帰性の概念が人為的なものではなく、現実に行われている計算に根ざすものであることが保証されたのである。

かくして「実効的に計算可能である」という直感的な概念は「再帰的である」（あるいはラムダ定義可能である、テューリング機械で計算可能である）という数学的な定義によって置き換えられうるということが広く認められるようになったのである。

- E. Post (1936)
- A. Church (1936), A. M. Turing (1936)： ヒルベルトの決定問題の否定的解決

第 II 部

算術と不完全性

7　はじめに

数学者の主な仕事は定理を証明することである。定理を証明する過程には、直感的ひらめき、具体例の検討、例から普遍への一般化、論証の明確化など、一見したところ意味的・非形式的なプロセスが多く伴う。しかしひとたび定理や証明が書き下されたならば、少なくともその書き下されたところのものは**形式化**（formalize）することが可能である。すなわち、あらかじめ定められた記号を用い、あらかじめ定められたルールに従って生成された記号列として表現することができる。形式化により、（幾何学や算術などの）**理論**や、その理論における**定理**などは形式的な概念となり、それらについては形式的・数学的手法により分析を行うことが可能になる。一言で言えば、数学について数学することができるようになり、**メタ数学**（**数学基礎論**）という数学の新しい一分野が拓かれることになる。

さて、ひとたび数学理論 T（たとえば整数論や解析学など）が形式化されると、次のような問いが興味深い問題として現れてくる。

1. T における言明が真であるとはどういうことかを、T の言明のみを用いて定義することはできるか？
2. ある言明が与えられたとき、その言明が T の定理かどうかを有限時間で判定することはできるか？
3. T における言明のうちで真なものは、全て T の定理として導出することができるか？
4. T におけるどんな言明についても、T において証明するか反証するかのどちらかができるか？
5. T が無矛盾であることは、T において許されている論法のみを用いて確かめることができるか？

これらの問いに対しては、部分的な肯定的結果と一般的な否定的結果が共に知られている。特に１、２、４、５に対する否定的結果は、それぞれ**真理述語の定義不能性**（Tarski）、算術および一階述語論理の**決定不能性**（Church）、**第一不完全性**（Gödel-Rosser）、**第二不完全性**（Gödel）と呼ばれている。（３に対する否定的結果は広義には第一不完全性に含めてよいであろう。）ここでの目的は、形式的手法の限界を示すと言われるこれらの否定的な結果について、統一的な観点から解説を行うことにある。

上記の結果は、ほとんど全ての数学理論にあてはまる（特に数学のほぼ全てを体系化できる ZF 集合論にもあてはまる）普遍的な成果であるが、ここでは話を単純にするため、一階算術（自然数論）に議論を限定する。ひとたび一階算術に身を置くと、そこに**算術的階層**の存在とその**厳密性** (Kleene) という重要な事実が立ち現れる。すなわち算術的に定義可能な集合は、それを定義する論理式の複雑さに応じてある階層性をなし、各階層の間には厳密な含意関係が存在するという事実である。以下では、上記の諸成果（第二不完全性を除く）を算術的階層の厳密性という単一の事実に基づいて説明するという方針をとる。

そのメリットとしては、一階算術に対して統一的な見方を与えられることや、諸定理間の関連性（特に肯定的結果と否定的結果の関連性）を明確にできることなどが挙げられるが、特に重要なのは、真理、証明可能性などのメタ数学的な概念を算術的階層という強固な階層のうちに位置づけることができるという点である。対象理論に身を置こうとも、メタ数学に身を移そうとも、形式的な手法を用いる限り、我々の前には圧倒的に強固な算術的階層が立ちはだかっており、それを崩壊させたり、そこから逃れ出たりする余地は全くない。その不可避性が、形式的手法に関する否定的な結果の真意を最もよく表しているように思われるのである。

8　自然数としての論理式

本章ではまず準備として、算術の論理式とは何かを定義し、次に算術の論理式が（標準モデルにおいて）真であるとはどういうことかの定義を与える。表題が示すとおり、ここでは論理式を自然数として表す方法について考える。命題を記述する表現であるはずの論理式が自然数を用いて表されるというのは一見奇妙に思われるかもしれない。事実、最初にこのアイデアが詳細に展開されたゲーデルの時代にあっては革新的なことであったと思われる。しかし、このことは現代にあってはもはやそれほど不思議なことではない。われわれは日常的にコンピュータやワードプロセッサを用いて文章を作成するが、それらはコンピュータ内部においてはある意味「数」と同等のものである。ハードウェアレベルでは文章も数も同じデジタル信号に過ぎないし、ソフトウェアレベルでも両者は互いに変換可能だからである。

定義 8.1 (算術の項) **算術の項** *(*arithmetic terms*)* は以下のように帰納的に定義される。

1. 変項 $x_0, x_1, x_2 \ldots$ は算術の項である。

2. 0 は算術の項である。

3. t と u が算術の項ならば、(St), $(t+u)$, $(t \cdot u)$ も算術の項である。

例えば、「$((S0)+(S(x_9 \cdot (S0))))$」は算術の項であるが、「$0S$」や「$2^{Sx_0}$」や「$++0$」は算術の項ではない。ここでは、変項とは「$x$」に何らかの自然数を添え字として加えたもののこととしている。このような取り決めをしておくと、後でゲーデル符号化を行う際に便利だからである。しかし変項が「x_{1000}」や「$x_{1234354367}$」のようなものしかないのでは、論理式を実際に書くときにはあまりにも不便なので、インフォーマルには y, z, y_4, z_3 などの記号も変項として用いることにする。

定義 8.2 (数項) 自然数 $0, 1, 2, 3, \ldots$ を以下の項を用いて表す。

$$0, S0, S(S0), S(S(S0)), \ldots$$

これらを**数項** *(*numerals*)* と呼ぶ。自然数 n に相当する数項を $\overline{n}$ により表す。

例えば $\overline{3} \equiv S(S(S0))$ である。

定義 8.3 (算術の論理式) 算術の論理式 *(arithmetic formulas)* は以下のように帰納的に定義される。

1. t と u が算術の項ならば、$(t = u)$ は算術の論理式である。

2. A と B が算術の論理式ならば、$(\neg A)$, $(A \vee B)$ は算術の論理式である。

3. A が算術の論理式で x が変項ならば、$(\forall x A)$ は算術の論理式である。

例えば、$(((Sx) = x) \vee (\neg(\forall y(y = (x + z)))))$ は算術の論理式であるが、$0 = \neg(0 = 0)$ や $\neg \vee 0 = 0$ はそうではない。

以下、算術の項、算術の論理式のことを単に項、論理式と呼ぶことにする。かっこは適宜省略する。自由変項、束縛変項の定義は通常通りとする。変項を含まない項のことを**閉項** (closed terms)、自由変項を一つも含まない論理式のことを**閉論理式** (closed formulas)、あるいは**文** (sentences) と呼ぶ。また、自由変項を一つだけ含む論理式を**一項論理式**と呼ぶ。一項論理式は、その中にただ一つ現れる自由変項 x を明記して $A(x), B(y)$ などと書くことにする。二項論理式、三項論理式なども同様に定義する。そして $A(x, y), B(x, y, z)$ などと書くことにする。

例えば、$S(0 + (SS0 \cdot 0))$ は閉項であるが、$S(x)$ はそうではない。また $\forall x(Sx = x)$ は閉論理式であるが $y = 0 \vee (\forall x(Sx = x))$ や $\forall x(Sx = y \vee y = 0)$ はそうではない。後者二つは一項論理式である（最後の論理式は同じ変項 y を二つ含むが、このようなものも一項論理式と呼ぶのである）。

代入については、いわゆる variable clash の問題があるために注意が必要である。例えば $\forall x \exists y(x < y)$ は真な論理式であり、それゆえ全称例化の法則により、$\exists y(x < y)$ における自由変項 x にどんな項を代入しても真となるはずである。しかし x に y を代入すると $\exists y(y < y)$ となりこれは偽である。ゆえに代入を適切に行うためには何らかの処方が必要である。

ここでは次の取り決めを行う。

(*) 論理式 A に項 t を代入できるのは、t が A の束縛変項を含まないときに限る。

このような取り決めをしても、何ら一般性が失われることはない（特に全称例化の法則が偽になるわけではない）。なぜならば論理式 A の束縛変項の名前を付け替えることにより、A は常に (*) を満たすような形に書き換えられるからである。以下代入を行う際には、常に (*) が満たされているものと仮定する。項 t の中に現れる変項 x に項 u を代入することにより得られる項を $t[u/x]$ と書く。特に t の中に x が現れないときには、代入は影響を及ぼさない。すなわち、$t[u/x] \equiv t$ である。同様に、論理式 A の中の自由変項 x 全てに項 u を代入することにより得られる論理式を $A[u/x]$ と書く（ここで t は A の束縛変項を含まない）。また、一項論理式 $A(x)$ に現れる自由変項 x 全てに項 u を代入することにより得られる論理式を $A(u)$ のようにも書くことにする。

連言 $\wedge$、含意 $\rightarrow$、同値 $\leftrightarrow$、存在 $\exists$ 等は $\neg$、$\vee$、$\forall$ を用いて用いて定義することができる。

$$\begin{aligned} A \wedge B &\equiv \neg(\neg A \vee \neg B) \\ A \rightarrow B &\equiv \neg A \vee B \\ A \leftrightarrow B &\equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \\ \exists x.A &\equiv \neg(\forall x.\neg A) \end{aligned}$$

さらに不等号と限定量化子を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} t \le u &\equiv \exists x(t + x = u) \quad \text{（ここで } x \text{ は } t, u \text{ に現れない）} \\ \forall x \le t.A &\equiv \forall x(x \le t \rightarrow A) \text{（ここで } x \text{ は } t \text{ に現れない）} \\ \exists x \le t.A &\equiv \exists x(x \le t \wedge A) \text{（ここで } x \text{ は } t \text{ に現れない）} \end{aligned}$$

これらはあくまでも省略表現であり、算術の論理式そのものではないことに注意。例えば、$S0 \le SS(z)$ は $\exists x(S0 + x = SS(z))$ の省略表現であり、これはさらに $\neg(\forall x.(\neg S0 + x = SS(z)))$ の省略表現である。

論理式は、**ゲーデル符号化**の手法を用いることにより、自然数で表すことができる。具体的には 4.2 節で定義した符号化のための道具立てを用いる。4.2 節では以下の原始再帰的関数・関係を定義した。

1. 自然数の列 $n_1, \ldots, n_k$ が与えられたとき、別の自然数 $\langle n_1, \ldots, n_k \rangle$ を割り当てる関数。
2. 列のコード x が与えられたとき、その i 番目の要素を取り出す 2 項関数 $(x)_i$。とくに $1 \le i \le k$ について
$$(\langle n_1, \ldots, n_k \rangle)_i = n_i.$$
3. コード x の長さを返す関数 $\mathsf{leng}(x)$。特に次のことが成り立つ:
$$\mathsf{leng}(\langle n_1, \ldots, n_k \rangle) = k.$$
4. 「x が列のコードである」ことを表す関係 $\mathsf{seq}(x)$。とくに $\mathsf{seq}(\langle n_1, \ldots, n_k \rangle)$ は真である。

これらを用いて、以下の定義を行う。

定義 8.4 (ゲーデル数) *1.* 任意の項 t に対して t の**ゲーデル数** $\ulcorner t \urcorner$ を以下のように割り当てる。

$$\begin{aligned} \ulcorner 0 \urcorner &= \langle 0 \rangle \\ \ulcorner x_i \urcorner &= \langle 1, i \rangle \\ \ulcorner St \urcorner &= \langle 2, \ulcorner t \urcorner \rangle \\ \ulcorner t + u \urcorner &= \langle 3, \ulcorner t \urcorner, \ulcorner u \urcorner \rangle \\ \ulcorner t \cdot u \urcorner &= \langle 4, \ulcorner t \urcorner, \ulcorner u \urcorner \rangle \end{aligned}$$

2. 任意の論理式 A に対して A の**ゲーデル数** $\ulcorner A \urcorner$ を以下のように割り当てる。

$$\begin{array}{rcl}\ulcorner t = u \urcorner & = & \langle 5, \ulcorner t \urcorner, \ulcorner u \urcorner \rangle \\ \ulcorner \neg A \urcorner & = & \langle 6, \ulcorner A \urcorner \rangle \\ \ulcorner A \vee B \urcorner & = & \langle 7, \ulcorner A \urcorner, \ulcorner B \urcorner \rangle \\ \ulcorner \forall x A \urcorner & = & \langle 8, i, \ulcorner A \urcorner \rangle \end{array}$$

前章までの議論を吟味すれば、次の補題が成り立つことは明らかであろう：

補題 8.5 以下の性質は全て原始再帰的である。

1. 「x は項のゲーデル数である」ことを表す性質 $\mathsf{term}(x)$。

2. 「x は論理式のゲーデル数である」ことを表す性質 $\mathsf{formula}(x)$。

3. 「x は閉論理式のゲーデル数である」ことを表す性質 $\mathsf{cformula}(x)$。

4. 「x は自由変項として x_0 を含む *1* 項論理式のゲーデル数である」ことを表す性質 $\mathsf{1formula}(x)$。

以下の関数は原始再帰的である。

1. 「x, y, z がそれぞれ項 t、変項 x_k、項 u のゲーデル数のときには項 $t[u/x_k]$ のゲーデル数を返し、そうでないときには 0 を返す」関数 $\mathsf{tsubst}(x, y, z)$。

2. 「x, y, z がそれぞれ論理式 A、変項 x_k、項 u のゲーデル数であり、かつ u が A の束縛変項を含まないときには項 $A[u/x_k]$ のゲーデル数を返し、そうでないときには 0 を返す」関数 $\mathsf{subst}(x, y, z)$。

証明 1. t の項構成列とは項の列 $t_0, \dots, t_n$ で $t_n \equiv t$、かつ次の性質を満たすものであるとする：全ての t_i について

- t_i は 0 であるか、変項であるか、あるいはある $j < i$ について $S(t_j)$ の形であるか、ある $j_1, j_2 < i$ について $t_{j_1} + t_{j_2}$ または $t_{j_1} \cdot t_{j_2}$ の形である。

このとき、t が項であることと、t が項構成列を持つことは明らかに一致する。

「x は y の項構成列である」ことを表す関係 $\mathsf{tconsseq}(x, y)$ を次のように定義する：

$$\begin{array}{rcl}\mathsf{tconsseq}(x, y) & \Longleftrightarrow & \mathsf{seq}(x) \wedge (x)_{\mathsf{leng}(x)} = y \wedge \forall i \leq \mathsf{leng}(x) \\ & & ((x)_i = \langle 0 \rangle \vee \exists k < y((x)_i = \langle 1, k \rangle) \\ & & \vee \exists j < i((x)_i = \langle 2, (x)_j \rangle) \\ & & \vee \exists j_1 < i. \exists j_2 < i.((x)_i = \langle 3, (x)_{j_1}, (x)_{j_2} \rangle) \\ & & \vee \exists j_1 < i. \exists j_2 < i.((x)_i = \langle 4, (x)_{j_1}, (x)_{j_2} \rangle))\end{array}$$

これは原始再帰的関係である。さらに、十分大きな n をとれば（たとえば $n = 4$）、全ての項 t について、$\mathsf{tconsseq}(x, \ulcorner t \urcorner)$ かつ $x < \Upsilon_n(\ulcorner t \urcorner)$ となる x が存在することがわかる。ゆえに $\mathsf{term}(x)$ は次のように定義できる：

$$\mathsf{term}(x) \iff \exists y < \Upsilon_n(x)(\mathsf{tconsseq}(y, x))$$

これは限定量化子と原始再帰的関数 Υ_n を用いて定義されているので、原始再帰的である。
その他の場合も同様である。 ■

練習問題 8.6 前の補題のその他の場合を証明せよ。すなわち、性質 formula(x)、cformula(x)、1formula(x)、関数 tsubst(x,y,z)、subst(x,y,z) が原始再帰的であることを証明せよ。

このようにして、論理式は自然数と同一視することができるし、論理式についての性質は自然数についての性質と見なすことができる。そして、「偶数である」や「素数である」などの自然数についての性質とまったく同様に「閉論理式である」や「一項論理式である」などの性質についても算術の理論において語れるようになる。そして「完全数である」という自然数についての性質が原始再帰的であるというのと正確に同じ意味で「閉論理式である」という論理式についての性質も原始再帰的であるということができる。つまり、論理式というメタ数学的対象についても計算論的な分析ができるようになるのである。
次に、算術の論理式が「（標準モデルにおいて）真である」とはどういうことかを正確に定めておくことにする。

定義 8.7 (算術の項の値) 任意の閉項 t について、t の**値**とは以下のように定義される自然数のことである。

1. 項 0 の値は自然数 0 である。
2. 項 t の値が自然数 n のとき、項 $S(t)$ の値は自然数 $n+1$ である。
3. 項 t,u の値がそれぞれ自然数 n,m のとき、項 $t+u$ の値は自然数 $n+m$ である。
4. 項 t,u の値がそれぞれ自然数 n,m のとき、項 $t\cdot u$ の値は自然数 $n\cdot m$ である。

もちろん t の値と t のゲーデル数 $\lceil t \rceil$ は混同されてはならない。たとえば $SS(0)$ の値と $S(0)+S(0)$ の値は等しいが、$\lceil SS(0) \rceil$ と $\lceil S(0) \rceil$ は異なる自然数である。

定義 8.8 (算術の論理式の真偽) 任意の閉論理式 A について、A が（標準モデルにおいて）**真である**のは、以下の場合である。

1. 原子論理式 $t=u$ が真であるのは、t の値と u の値が等しいときである。
2. $t \le u$ が真であるのは、t の値が u の値以下の場合である。
3. $\neg A$ が真であるのは、A が真でないときである。
4. $A \wedge B$ が真であるのは、A と B が両方とも真であるときである。
5. $\forall x \le t.A$ が真であるのは、t の値よりも小さい全ての数 n について、$A[\overline{n}/x]$ が真となる場合である。
6. $\exists x \le t.A$ が真であるのは、t の値よりも小さいある数 n が存在して、$A[\overline{n}/x]$ が真となる場合である。
7. $\forall x A$ が真であるのは、**全て**の数 n について、$A[\overline{n}/x]$ が真となる場合である。

8. $\exists x A$ が真であるのは、**ある**数 n が存在して、$A[\overline{n}/x]$ が真となる場合である。

自由変項を含む論理式 $A(x_1,\ldots,x_n)$ が**真である**とは、その**全称閉包** $\forall x_1 \cdots \forall x_n . A(x_1,\ldots,x_n)$ が真であることとする。

論理式 A と B が**同値である**とは、$A \leftrightarrow B$ が真であることとする。

論理式 A が（標準モデルにおいて）真であることは、しばしば $\mathbb{N} \models A$ と表される。

論理式は自然数と同一視できるのであるから、「真である」という性質も自然数についての性質と見なすことが可能である。すなわち性質 $\mathsf{true}(x)$ を

$$\mathsf{true}(n) \iff n = \ulcorner A \urcorner \text{ かつ } A \text{ は真である}$$

と定義することができる。では、この性質は計算論的にいってどの程度複雑なのだろうか。原始再帰的だろうか？再帰的だろうか？あるいは再帰的枚挙可能だろうか？実は、もっとはるかにはるかに複雑なのである。「真である」という性質は、次章で定義する算術的階層を「飛び越えて」おり、そのことが真理述語の定義不可能性という結果につながるのである。

9 算術的階層

自然数の集合は非可算無限に存在する。それらのうちの大部分は、いかなる定義をも受け付けない混沌たるものであるが、中には算術の論理式により定義できるような集合も存在する。例えば、偶数の集合は $\exists y(2 \cdot y = n)$ を満たす自然数 n の集合と同一視することができる。そのような集合は算術の論理式により定義可能である、と言われる。ここでの目標は、そのようにして算術の論理式により定義可能な集合全体の集まりは、**算術的階層** (arithmetical hierarchy) と呼ばれる階層性を成すことを示すことである。算術的階層は、自然数の集合についての複雑さの尺度を導入する。この尺度は、論理式の複雑さに基づいて定義される純論理的性格のものであるが、興味深いことに、それは計算論的な複雑さの概念に正確に対応することが知られている。本章の最後では、そのような論理と計算論の間の関係を示す定理を紹介する。

定義 9.1 (Δ_0, Σ_i, Π_i 論理式)

Δ_0 論理式： 算術の項から $=, \leq, \neg, \wedge, \forall x \leq t, \exists x \leq t$ を用いて構成される論理式。（量化子は**限定量化子** $\forall x \leq t, \exists x \leq t$ のみ）

Σ_1 論理式： $\exists x_1 \cdots \exists x_n A$ の形の論理式 （ここで $n \geq 0$、A は Δ_0 論理式）。

Π_1 論理式： $\forall x_1 \cdots \forall x_n A$ の形の論理式 （ここで $n \geq 0$、A は Δ_0 論理式）。

Σ_{i+1} 論理式： $\exists x_1 \cdots \exists x_n A$ の形の論理式 （ここで $n \geq 0$、A は Π_i 論理式）。

Π_{i+1} 論理式： $\forall x_1 \cdots \forall x_n A$ の形の論理式 （ここで $n \geq 0$、A は Σ_i 論理式）。

定義 9.2 (集合の定義) $A(x)$ を一項論理式とする。このとき、$A(x)$ が自然数の集合 $X \subseteq \mathbb{N}$ を**定義する**とは、任意の $n \in \mathbb{N}$ について

$$A(\overline{n}) \text{ は真である } \iff n \in X$$

が成り立つことである。

もしも論理式 $A(x)$ と $B(x)$ が同値ならば、それらが同じ集合を定義することは明らかである。

定義 9.3 (算術的階層)

- 自然数の集合 $X \subseteq \mathbb{N}$ が Δ_0 **集合**であるとは、X が何らかの Δ_0 論理式により定義されることである。
- 同様に、Σ_i **集合**とは、Σ_i 論理式により定義される集合のことであり、Π_i **集合**とは、Π_i 論理式により定義される集合のことである。
- Σ_i 集合であり、Π_i 集合でもあるような集合のことを Δ_i **集合**と呼ぶ。

Δ_i 集合全ての集まりのことを単に Δ_i と書く。Σ_i、Π_i についても同様である。

例えば、偶数の集合は Σ_1 論理式 $\exists y(x = 2 \cdot y)$ によって定義できるので Σ_1 集合である。しかし、実際には $Even(x) \equiv \exists y \leq x(x = 2 \cdot y)$ という Δ_0 論理式による定義も存在するので、Δ_0 集合であるとも言える。また、素数の集合も

$$\begin{aligned} Div(y, x) &\equiv \exists z \leq x(y \cdot z = x) \\ Prime(x) &\equiv \overline{2} \leq x \wedge (\forall y \leq x.Div(y, x) \to (y = \overline{1} \vee y = x)) \end{aligned}$$

と定義できるので、Δ_0 集合である。

定義 9.4 (冠頭標準形) **冠頭標準形**とは、以下の形をした論理式のことである：

$$Q_1 x_1 Q_2 x_2 \cdots Q_n x_n B$$

ここで各 Q_i は $\forall$ か $\exists$ のいずれかであり、B は Δ_0 論理式である。

次の補題は（限定量化子に関する点をのぞけば）論理学の基礎的な結果である。

補題 9.5 どんな算術の論理式もある冠頭標準形と同値である。

証明 論理式が与えられたとき、以下の同値性に基づいて書き換えを行うことにより、それと同値な冠頭標準形を得ることができる。

1. $(\forall x A) \vee B \leftrightarrow \forall x(A \vee B)$、$(\forall x A) \wedge B \leftrightarrow \forall x(A \wedge B)$、（ただし B は x を自由変項として含まない）
2. $(\exists x A) \vee B \leftrightarrow \exists x(A \vee B)$、$(\exists x A) \wedge B \leftrightarrow \exists x(A \wedge B)$、（ただし B は x を自由変項として含まない）

3. $\neg\forall xA \ \leftrightarrow\ \exists x\neg A$、$\neg\exists xA \ \leftrightarrow\ \forall x\neg A$ （ドモルガンの法則）

4. $\forall x \le t.\exists yA \ \leftrightarrow \exists z\forall x \le t.\exists y \le z.A$、$\exists x \le t.\forall yA \ \leftrightarrow \forall z\exists x \le t.\forall y \le z.A$ （ただし t, A は z を自由変項として含まない）

ここで１、２、４については自由変項に関する但し書きがついているが、これは実際上問題にはならない。例えば $\forall xA \vee B \ \leftrightarrow\ \forall x(A \vee B)$ について、もしも B に x が含まれる場合には $\forall xA$ を $\forall x_0A[x_0/x]$ （ここで x_0 は新しい変項）と書き換えてから同値変形を行えばよい。

４の一番目の式についてだけ同値性を証明しておく。仮に $\forall x \le t.\exists yA$ が真であるとする。t の値を n とする。すると $\exists yA[\overline{0}/x], \ldots, \exists yA[\overline{n}/x]$ が全て真であり、従って $A[\overline{0}/x, \overline{m_1}/y]$, $\ldots$, $A[\overline{k}/x, \overline{m_k}/y]$ が全て真となるような自然数の集合 $\{m_1, \ldots, m_k\}$ がある。今その最大値を m とすると、明らかに $\exists y \le \overline{m}.A[\overline{0}/x], \ldots, \exists y \le \overline{m}.A[\overline{n}/x]$ が全て真となる。すなわち $\forall x \le t.\exists \overline{m} \le z.A$ が真であり、従って $\exists z\forall x \le t.\exists y \le z.A$ が真となる。

逆に $\exists z\forall x \le t.\exists y \le z.A$ が真であるとすると、ある $\overline{m}$ について $\forall x \le t.\exists y \le \overline{m}.A$ が真である。ゆえに明らかに $\forall x \le t.\exists yA$ も真である。 ■

練習問題 9.6

1. $\forall x(x = \overline{5}) \vee \exists y \le \overline{8}.\forall z(x \cdot y \le z)$ を同値な冠頭標準形に書き換えよ。

2. 上の補題の証明における４の一番目以外の式について同値性を証明せよ。

3. 上の補題を数学的帰納法を用いて厳密に証明せよ。

補題 9.7

1. Δ_i, Σ_i, Π_i は以下の包含関係にある。（ここで $\longrightarrow$ は包含関係 $\subseteq$ を表す。例えば、$\Delta_i \longrightarrow \Sigma_i$ は、集合 X が Δ_i 集合ならば、それは Σ_i 集合でもあるということを表す。）

$$\begin{tikzcd}
 & \Delta_{i+1} & \\
\Sigma_i \arrow[ur] & & \Pi_i \arrow[ul] \\
 & \Delta_i \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

2. 集合 $X \subseteq \mathbb{N}$ が何らかの算術の論理式 $A(x)$ により定義されるならば、X は算術的階層に属する。即ち、ある n について $X \in \Sigma_n$ である。

3. $X \in \Sigma_i \Longleftrightarrow \neg X \in \Pi_i$ （ここで $\neg X$ は $\mathbb{N}$ に関する X の補集合を表す。）

証明

1. 定義より、$\Delta_i \subseteq \Sigma_i$, $\Delta_i \subseteq \Pi_i$。また、$\Sigma_i \subseteq \Pi_{i+1}$ （$\Pi_i \subseteq \Sigma_{i+1}$）である。さらに $\Sigma_i \subseteq \Sigma_{i+1}$ （$\Pi_i \subseteq \Pi_{i+1}$）であることは、次のように確かめることができる。例えば X が Σ_2 論理式 $\exists y \forall z.A$ により定義されるならば、A は Δ_0 論理式であるから同時に Σ_1 論理式でもあり、ということは $\forall z.A$ は Π_2 論理式であり、結局 $\exists y \forall z.A$ は Σ_3 論理式でもあることになる。正確な証明は i に関する帰納法による。以上により、

$$\Sigma_i \subseteq \Sigma_{i+1} \cap \Pi_{i+1} = \Delta_{i+1} \qquad \Pi_i \subseteq \Sigma_{i+1} \cap \Pi_{i+1} = \Delta_{i+1}.$$

2. 前述の補題により、$A(x)$ は冠頭標準形 $Q_1 x_1 Q_2 x_2 \cdots Q_n x_n B$ （ここで各 Q_i は $\forall$ または $\exists$、B は Δ_0 論理式）と同値である。$Q_1, \ldots, Q_n$ における $\forall$ と $\exists$ の交替の回数が k 回であるとすると、それは Σ_{k+1} 論理式である。ゆえに $A(x)$ が表す集合は Σ_{k+1} 集合である。

3. ドモルガンの法則より。例えば X が Σ_2 論理式 $\exists y \forall z.A$ により定義されるならば、$\neg X$ は $\neg \exists y \forall z.A$ により定義されるが、後者は Π_2 論理式 $\forall y \exists z.\neg A$ と論理的に同値である。

このようにして、論理式の複雑さによってさまざまな自然数の集合の間に階層性、あるいは複雑さの尺度を導入することができた。もちろんこの階層が真に有意義であるためには、それは厳密なのでなければならない。上の補題で

$$\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2 \subseteq \Sigma_3 \subseteq \ldots$$

であることは示したが、これだけではもしかしたら実は

$$\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma_3 = \ldots$$

なのかも知れず、そうだとしたら複雑さの尺度を導入したことには全然なっていないからである。このことについては次の章で議論するが、その前に次の重要な事実について述べておく。算術的階層は論理式の複雑さにより導入されたものであるが、それは実は計算論的な複雑さと密接な関係にあるのである。特に、算術的階層の最下層については、次の定理が成り立つ。

定理 9.8 (算術的階層 vs 計算論的複雑さ) X を自然数の集合とするとき、次の同値関係が成り立つ。

1. X は Σ_1 集合である $\Longleftrightarrow$ X は再帰的枚挙可能集合である。

2. X は Π_1 集合である $\Longleftrightarrow$ X は再帰的枚挙可能集合の補集合である。

3. X は Δ_1 集合である $\Longleftrightarrow$ X は再帰的集合である。

この定理を示すためにはいくつかの補題を先に証明しておく必要がある。

補題 9.9 算術の項により定義される関数はどれも原始再帰的関数である。より正確には、$v(x_1, \ldots, x_k)$ を自由変項として $x_1, \ldots, x_k$ のみを含む算術の項とするとき、次のように定義される関数 $f_v(x_1, \ldots, x_k)$ は原始再帰的である：任意の $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ について

$$f_v(n_1, \ldots, n_k) = v(\overline{n}_1, \ldots, \overline{n}_k) \text{ の値}$$

証明　項 v の複雑さに関する帰納法による。0 は 0 項の原始再帰的関数 zero を定義する。また $t(\vec{x}), u(\vec{x})$ が原始再帰的関数 $f_t(\vec{x}), f_u(\vec{x})$ を定義するならば、明らかに $S(t(\vec{x})), t(\vec{x})+u(\vec{x})$ $t(\vec{x})\cdot u(\vec{x})$ は原始再帰的関数 $\mathsf{suc}(f_t(\vec{x}))$, $\mathsf{plus}(f_t(\vec{x}), f_u(\vec{x}))$, $\mathsf{times}(f_t(\vec{x}), f_u(\vec{x}))$ を定義する。
■

補題 9.10 Δ_0 論理式により定義される関係はどれも原始再帰的関係である。より正確には、$A(x_1,\ldots,x_k)$ を Δ_0 論理式とするとき、次のように定義される関係 $R_A \subseteq \mathbb{N}^k$ は原始再帰的関係である：任意の $n_1,\ldots,n_k \in \mathbb{N}$ について

$$R_A(n_1,\ldots,n_k) \iff A(\overline{n}_1,\ldots,\overline{n}_k) \text{ は真である。}$$

証明　論理式 $A(\vec{x})$ の複雑さに関する帰納法による。原子論理式 $t(\vec{x}) = u(\vec{x})$ が原始再帰的関係を定義することは、前の補題および命題 4.11, 命題 4.12 による。A が $\neg B$、$B \vee C$、$B \wedge C$、$\forall x \leq t.B$、$\exists x \leq t.B$ の形ときには、帰納法の仮定により、B, C は原始再帰的関係を定義する。ゆえに命題 4.13、4.15 により A も原始再帰的関係を定義する。■

補題 9.11 $f(x_1,\ldots,x_k)$ が原始再帰的関数ならば、$k+1$ 項関係 $f(x_1,\ldots,x_k) = y$ は Σ_1 論理式により定義することができる。

証明　f の構成に関する帰納法による。ゼロ関数 $\mathsf{zero}^k(x_1,\ldots,x_k) = 0$ はは論理式 $0 = y$ により定義できる。射影関数 $\mathsf{proj}_i^k(x_1,\ldots,x_k) = x_i$ は論理式 $x_i = y$ により、また後続者関数 $\mathsf{suc}(x) = x+1$ は論理式 $S(x) = y$ により定義できる。

次に関数 f が原始再帰的関数 $g_1(\vec{x}),\ldots,g_m(\vec{x}), h(z_1,\ldots,z_m)$ から合成により得られるとする。すなわち、

$$f(\vec{x}) = h(g_1(\vec{x}),\ldots,g_m(\vec{x}))$$

帰納法の仮定により、各 i について、関係 $g_i(\vec{x}) = y_i$ は Σ_1 論理式 $G_i(\vec{x}, y_i)$ により定義することができ、また、関係 $h(z_1,\ldots,z_m) = y$ は Σ_1 論理式 $H(z_1,\ldots,z_m,w)$ により定義することができる。このとき $f(\vec{x}) = y$ は次の論理式により定義することができる：

$$\exists y_1 \ldots \exists y_m (G_1(\vec{x}, y_1) \wedge \cdots \wedge G_m(\vec{x}, y_m) \wedge H(y_1,\ldots,y_m,y)).$$

この論理式は補題 9.5 の証明で挙げた書き換え規則によって、同値な Σ_1 論理式へと変形することができる。

最後に関数 $f(\vec{x}, x')$ が原始再帰的関数 $g(\vec{x}), h(\vec{x}, z, w)$ から原始再帰法により得られるとする。すなわち

$$\begin{array}{rcl} f(\vec{x},0) & = & g(\vec{x}) \\ f(\vec{x},z+1) & = & h(\vec{x},z,f(\vec{x},z)) \end{array}$$

まず、第 4.4 節で導入した β 関数（定理 4.37 参照）を用いれば、f は次のようにも定義できることに注意する：

$$f(\vec{x},x') = y \iff \exists c(\beta(c,0) = g(\vec{x}) \wedge \forall z < x'(\beta(c,z+1) = h(\vec{x},z,\beta(c,z))) \wedge y = \beta(c,x')))$$

ここで 3 項関係 $\beta(c,z)=w$ は Δ_0 関係であるから、Δ_0 論理式 $B(c,z,y)$ により定義することができる。また帰納法の仮定により、関係 $g(\vec{x})=w_0$ は Σ_1 論理式 $G(\vec{x},w_0)$ により定義することができ、関係 $h(\vec{x},z,w)=w'$ は Σ_1 論理式 $H(\vec{x},z,w,w')$ により定義することができる。このとき関係 $f(\vec{x},x')=y$ は次の論理式により定義することができる：

$$\begin{aligned}&\exists c(\exists w_0(G(\vec{x},w_0)\wedge B(c,0,w_0))\wedge\\&\quad\forall z<x'\exists w\exists w'(B(c,z,w)\wedge H(\vec{x},z,w,w')\wedge B(c,S(z),w'))\wedge B(c,x',y)))\end{aligned}$$

この論理式もやはり補題 9.5 の証明で挙げた書き換え規則によって、同値な Σ_1 論理式へと変形することができる。 ■

定理 9.8 の証明：
1. $X\subseteq\mathbb{N}$ が Σ_1 論理式 $A(x)$ により定義されているとする。すると $A(x)$ は $\exists y_1\cdots\exists y_k$ $B(y_1,\ \ldots,\ y_k,x)$ の形であり、$B(y_1,\ldots,y_k,x)$ は Δ_0 論理式である。補題 9.10 により、$B(y_1,\ldots,y_k,x)$ により定義される関係は原始再帰的関係である。ゆえに命題 6.14 により、$A(x)$ により定義される集合は再帰的枚挙可能集合である。

逆に $X\subseteq\mathbb{N}$ が再帰的枚挙可能集合であるとすると、命題 6.13 により、次のような原始再帰的関数 enum_X が存在する：任意の $n\in\mathbb{N}$ について

$$n\in X\iff \text{ある } m\in\mathbf{N} \text{ について } \mathsf{enum}_X(m)=n$$

補題 9.11 により、二項関係 $\mathsf{enum}_X(x)=y$ は Σ_1 論理式 $E(x,y)$ により定義できる。ゆえに集合 X は Σ_1 論理式 $\exists yE(x,y)$ により定義することができる。

2. 以下の通り：

$$\begin{aligned}X \text{ は } \Pi_1 \text{ 集合である} &\iff \neg X \text{ は } \Sigma_1 \text{ 集合である}\\&\iff \neg X \text{ は再帰的枚挙可能集合である}\\&\iff X \text{ は再帰的枚挙可能集合の補集合である。}\end{aligned}$$

3. 以下の通り：

$$\begin{aligned}X \text{ は } \Delta_1 \text{ 集合である} &\iff X \text{ は } \Sigma_1 \text{ かつ } \Pi_1 \text{ 集合である}\\&\iff X \text{ は再帰的枚挙可能かつ } \neg X \text{ も再帰的枚挙可能である}\\&\iff X \text{ は再帰的集合である。}\end{aligned}$$

最後の同値性は定理 6.15 による。 ■

最後に以下頻繁に用いられる次の補題を証明しておく。

補題 9.12 性質 $R(x)$ を Σ_i 集合（すなわち $R\subseteq\mathbb{N}$ は Σ_i 集合）、$f(x)$ を原始再帰的関数とすると、性質 $R(f(x))$ は Σ_i 集合である。

同様に、$R(x)$ を Δ_i 集合（$i\geq 1$）、$f(x)$ を原始再帰的関数とすると、$R(f(x))$ は Δ_i 集合である。

証明　ここでは最初の主張のみを証明する。いま、性質 $R(x)$ は Σ_i 論理式 $A(x)$ により定義されるものとする。f は原始再帰的なので、補題 9.11 より、二項関係 $f(x) = y$ は Σ_1 論理式 $F(x, y)$ により定義できる。このとき、性質 $R(f(x))$ は論理式 $\exists y(F(x, y) \wedge A(y))$ により定義できる。なぜならば、任意の $n \in \mathbb{N}$ についてある $m \in \mathbb{N}$ が存在し、以下の同値性が成り立つからである：

$$\begin{aligned} R(f(n)) &\iff f(n) = m \text{ かつ } R(m) \\ &\iff F(\overline{n}, \overline{m}) \text{ が真、かつ } A(\overline{m}) \text{ が真} \\ &\iff \exists y(F(\overline{n}, y) \wedge A(y)) \text{ が真。} \end{aligned}$$

この論理式が Σ_i 論理式と同値であることは容易に確かめることができる（$\exists z B(z) \wedge \exists z C(z)$ と $\exists z \exists w(B(z) \wedge C(w))$ の同値性を用いよ）。■

10　算術的階層の厳密性

前章で残されていた問いは、算術的階層は果たして**厳密**かどうか、すなわち算術的階層を構成する各クラス間の包含関係 $\subseteq$ は実際には $\subsetneq$ であるかどうか、というものであった。

実を言えば、算術的階層の最下層、すなわち $\Delta_1, \Sigma_1, \Pi_1, \Delta_2$ については、包含関係が厳密であることは第 6 の系 6.18 および前章の定理 9.8 によって既に示されている。実際、系 6.18 では再帰的枚挙可能ではあるが、再帰的ではない集合の存在が示されていたし、定理 9.8 によれば、再帰的枚挙可能集合とは Σ_1 集合に他ならず、再帰的集合とは Δ_1 集合のことに他ならないからである。このことから特に $\Sigma_1 \subsetneq \Delta_1$ が帰結する。

本章では、まずこの結果について別の角度から概観し、また、算術的階層の厳密性は最下層のみならず一般にも成立することを示す。その際、メインの道具立てとして用いられるのが、カントールの**対角線論法**である。

Σ_1 集合とは Σ_1 論理式により定義される集合のことであった。一方、Σ_1 論理式は、（ゲーデル数が小さいほうから順番に数えることで）0 番目の Σ_1 論理式、1 番目の Σ_1 論理式というように全て枚挙することができる。ゆえに（重複を無視すれば）Σ_1 集合も

$$X_0, X_1, X_2, \ldots$$

というように枚挙することができるはずである。いま、集合 K を $K = \{n | n \in X_n\}$ により定義する。すると次の性質が成り立つ。

補題 10.1 (Σ_1 対角化)

(1) K は Σ_1 集合である。

(2) K は Π_1 集合ではない。

証明

(1) 証明の概略は次のとおりである。任意の $n \in \mathbb{N}$ が与えられたとき、$n \in K$ が成り立つかどうかを調べるためには $n \in X_n$ が成り立つかどうかを調べればよい。X_n は Σ_1 集合だから、このことを調べるための半決定的アルゴリズム（すなわち部分再帰的関数）が存在する。ゆえに $n \in K$ かどうかを調べるための半決定的アルゴリズムも存在することになる。よって K は Σ_1 集合である。

(2) 仮に K が Π_1 集合であるとすると、補題 9.7 により $\neg K$ は Σ_1 集合となる。ゆえにある k について $X_k = \neg K$ となるはずであるが、

$$k \notin \neg K \iff k \in K \iff k \in X_k \iff k \in \neg K$$

となり矛盾する。

■

ここで用いられた論法が対角線論法と呼ばれることの理由は、以下のように説明することができる。

自然数の集合 $X \subseteq \mathbb{N}$ が与えられたとき、

$$
\begin{aligned}
x_i &= 1 \quad i \in X \text{ のとき} \\
&= 0 \quad i \notin X \text{ のとき}
\end{aligned}
$$

とおく。すると X に対して、0 と 1 から成る無限列

$$x_0, x_1, x_2, \ldots$$

を対応させることができる。例えば、偶数の集合 $Even = \{0, 2, 4, \ldots\}$ には

$$1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$$

が対応し、素数の集合 $Prime = \{2, 3, 5, 7, 11 \ldots\}$ には

$$0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, \ldots$$

が対応する。逆にこのような無限列が与えられたら、そこから自然数の集合 X を一意に復元することができる。

さて、本章の最初で定義した Σ_1 集合の列 $X_0, X_1, X_2, \ldots$ の各要素 X_i に対して上のように 0,1 の無限列を対応させると、次のような表を得ることができる。

	0	1	2	3	$\cdots$
X_0	0	0	1	1	$\cdots$
X_1	0	1	1	0	$\cdots$
X_2	0	0	1	0	$\cdots$
X_3	1	0	1	0	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

この表の対角線 $0, 1, 1, 0, \ldots$ をとると、それ自体 0,1 の無限列になっている。集合 K はこの無限列に相当する。そしてその補集合 $\neg K$ は、対角線の 0,1 を逆にして得られる無限列 $1, 0, 0, 1, \ldots$ に相当する。補題 10.1 が示しているのは、K はこの表の中に何らかの X_k として現れるが、$\neg K$ はこの表の中には現れないということである。（なぜならばいかなる X_k についても、$\neg K$ と X_k は、その k 番目の要素について異なっているからである。）

補題 10.1 およびその一般形から、次の定理 [7] が帰結する。

定理 10.2 (算術的階層の厳密性)

1. $\Sigma_1 \not\subseteq \Pi_1$、$\Pi_1 \not\subseteq \Sigma_1$

2. $\Delta_1 \subsetneq \Sigma_1$、$\Delta_1 \subsetneq \Pi_1$

3. $\Sigma_1 \subsetneq \Delta_2$、$\Pi_1 \subsetneq \Delta_2$

4. 一般に算術的階層は厳密である。すなわち、各 i について包含関係

$$\begin{tikzcd}
 & \Delta_{i+1} & \\
\Sigma_i \arrow[ur] & & \Pi_i \arrow[ul] \\
 & \Delta_i \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

は厳密である。

証明　(1) については、補題 10.1 より、$K \in \Sigma_1$ かつ $K \notin \Pi_1$ であること、また逆に $\neg K \in \Pi_1$ かつ $\neg K \notin \Sigma_1$ であることから。

(2),(3) は (1) から容易に示すことができる。

(4) は以上の事柄の一般化である。 ■

11　真理述語の定義不能性

本章では、算術的階層の厳密性の第一の帰結として、真理述語の定義不能性（Tarski）を証明する。

一項論理式 $A(x_0)$ が与えられたとき、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対してゲーデル数 $\ulcorner A(\overline{n}) \urcorner$ を割り当てる操作は $\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への関数と考えることができる。この関数を $\ulcorner A(\overline{}) \urcorner$ と書くことにする。すると、$\ulcorner A(\overline{}) \urcorner : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ が原始再帰的関数であることは、容易に見てとることができる。

定理 11.1 (真理述語の定義不能性) 算術の論理式に関して「真である」という性質は、算術の論理式によっては定義することができない。すなわち、次の条件を満たす述語 $\mathsf{true}(x)$ は算術の論理式によっては定義することができない：任意の閉論理式 A について

$$A \text{ が真} \Longleftrightarrow \mathsf{true}(\ulcorner A \urcorner)$$

証明　仮に $\mathsf{true}(x)$ が算術の論理式によって定義可能であるとすると、補題 9.7 により、true は算術的階層に属し、ある k について Σ_k 集合となるはずである。いま、X を算術的階層に属する任意の集合とすると、X は何らかの一項論理式 $A(x_0)$ により定義可能である。すなわち、

$$n \in X \Longleftrightarrow A(\overline{n}) \text{ が真}$$

が成り立つ。補題 9.12 により $\mathsf{true}(\ulcorner A(\overline{}) \urcorner)$ は Σ_k 集合である。また、任意の n について

$$A(\overline{n}) \text{ が真} \Longleftrightarrow \mathsf{true}(\ulcorner A(\overline{n}) \urcorner)$$

が成り立つ。ゆえに X は Σ_k 集合となる。このようにして算術的階層に属する任意の集合が Σ_k 集合であることになってしまい、算術的階層は崩壊する。しかしこのことは算術的階層の厳密性に反する。 ■

よって、算術の論理式一般に関する真理概念は算術の言語によっては定義することができない。一方、各 Σ_n については、このことは可能であることが知られている（cf. [6]）。

定理 11.2 (各層ごとの真理述語の定義可能性) 任意の $n \geq 0$ について、次の性質を満たす集合 $\mathsf{true}_n \subseteq \mathbb{N}$ は Σ_n 論理式によって定義可能である：任意の Σ_n 閉論理式 A について

$$A \text{ が真} \Longleftrightarrow \mathsf{true}_n(\ulcorner A \urcorner).$$

12 形式的理論について

以下においては、形式的数学理論に関して一連の性質を証明していくが、本章ではその準備としていくつかの基本的な概念を定義し、形式的理論の例として算術の理論 Q と PA を導入する。

定義 12.1 (理論) 理論 *(theory)* とは、閉論理式の集合である。理論 T が理論 S の**拡大** *(extension)* であるとは、$S \subseteq T$ が成り立つことである。このとき、S は T の**縮小**であるともいう。理論 T が**再帰的** *(recursive)* であるのは、集合 $\{\ulcorner A \urcorner \in \mathbb{N} \mid A \in T\}$ が再帰的集合（Δ_1 集合）のときである。

定義 12.2 (証明可能性) 論理式 A が理論 T において**証明可能**であるとは、一階述語論理（等号に関する公理を含む）に T を公理として付け加えた体系において、A の証明が存在することである。A が理論 T において証明可能であることを、$\vdash_T A$ により表す。理論 T が**無矛盾** *(consistent)* であるのは、$\vdash_T 0 = 1$ が成り立たないときである。

例として、算術の理論 Q と PA を導入する。

定義 12.3 (Q, PA) 理論 Q は、以下の論理式の全称閉包から成る。（ここで論理式 A の全称閉包とは、A に含まれる自由変項 $x_1, \ldots, x_n$ すべてについて全称量化を行うことにより得られる論理式、すなわち $\forall x_1 \cdots \forall x_n A$ のことである。）

1. $S(x) = S(y) \to x = y$
2. $S(x) \neq 0$
3. $x \neq 0 \to \exists y(x = S(y))$
4. $x + 0 = x$
5. $x + S(y) = S(x + y)$
6. $x \cdot 0 = 0$
7. $x \cdot S(y) = (x \cdot y) + x$
8. $x \leq y \leftrightarrow \exists z.x + z = y$

理論 PA とは、理論 Q に次の形の論理式の全称閉包を全て加えたものである。

$$A(0) \wedge \forall x(A(x) \to A(S(x))) \to \forall y A(y)$$

Q も PA も明らかに再帰的である。PA が無限集合であるのに対して、Q は有限集合であることに注意。

Q の拡大と PA の縮小に関しては、以下の（部分的な）完全性定理および健全性定理が成り立つ。

定理 12.4 (**Q の Σ_1 完全性**) 任意の閉 Σ_1 論理式 A について

$$A \text{ が真} \Longrightarrow \vdash_Q A.$$

証明 A の構造に関する帰納法による。 ■

よって任意の Q の拡大 T は Σ_1 完全である。

定理 12.5 (**PA の健全性**) 任意の閉論理式 A について

$$\vdash_{PA} A \Longrightarrow A \text{ が真}.$$

証明 証明図の大きさに関する帰納法による。次の二つを示せばよい。

1. 公理は（標準モデルにおいて）真である。
2. 真な論理式から論理的推論により導かれる論理式は真である。（ここで変項を含む論理式が真であるとは、変項にどんな数項を代入しても結果として得られる閉論理式が真であることと定義する。）

■

よって $T \subseteq PA$ となる任意の理論（特に Q）は健全である。健全性よりも弱い性質として、次の Σ_1 健全性を考えることができる。

定義 12.6 (**Σ_1 健全性**) 理論 T が Σ_1 **健全**であるとは、任意の閉 Σ_1 論理式 A について

$$\vdash_T A \Longrightarrow A \text{ が真}$$

が成り立つことである。

Σ_1 健全性は無矛盾性を含意する。もしも T が Σ_1 健全であり、かつ $\vdash_T 0 = 1$ であるとすると、$0 = 1$ は（Σ_1 論理式なので）真となるはずであるが、$0 = 1$ は明らかに偽だからである[1]。

[1] Σ_1 健全性は [5] における ω 無矛盾性の仮定を弱めたものである。（理論 T が ω **無矛盾**であるのは、$\vdash_T \exists x.A(x)$ かつ全ての $n \in \mathbb{N}$ について $\vdash_T \neg A(\overline{n})$ となるような論理式 $A(x)$ は存在しないときである。）まとめると、以下の含意関係が成り立つ：

$$\text{健全性} \Longrightarrow \omega \text{ 無矛盾性} \Longrightarrow \Sigma_1 \text{ 健全性} \Longrightarrow \text{無矛盾性}$$

13　Σ_1 表現可能性と理論の決定不能性

一変項論理式 $A(x)$ は、一方で真であるという概念を通して、ある自然数の集合 $\{n \in \mathbb{N} \mid A(\overline{n})$ は真である $\}$ を定義する。同じ論理式は、他方で証明可能であるという概念を通して、別の仕方で自然数の集合 $\{n \in \mathbb{N} \mid A(\overline{n})$ は T において証明可能である $\}$ を定義する。では、両者は一体どのような関係にあるのだろうか？前章においては、Q の拡大の Σ_1 完全性を示したが、ここではその直接の帰結として、もしも理論 T が十分に強力（$Q \subseteq T$）かつ自然（Σ_1 健全）ならば、少なくとも Σ_1 一変項論理式に関しては上の二つの定義は一致することを明らかにする[2]。別の言い方をすれば、証明可能性述語 $\vdash_T$ は少なくとも Σ_1 論理式に関しては真理述語と見なすことができる、ということである[3]。

結果として、T における証明可能性は決定不能であるということが帰結し、さらにそこから、一階述語論理は（等号を含んでも含まなくても）決定不能であるということが帰結する。後に第 17 章で、ここでの Σ_1 健全性の仮定を無矛盾性に弱めても類似の性質が成り立つことを見る。

定理 13.1 (Σ_1 表現可能性) 理論 T が Q の拡大であり、かつ Σ_1 健全であるとすると、任意の Σ_1 一変項論理式 $A(x)$ について

$$A(\overline{n}) \text{ が真} \iff \vdash_T A(\overline{n})$$

証明　T の Σ_1 健全性および Σ_1 完全性より。 ■

論理式はゲーデル符号化を通じて自然数と同一視することができ、それゆえ「真である」という性質は自然数についての性質と見なすことができたことを思い起こしてほしい。すなわち性質 $\mathsf{true}(x)$ を

$$\mathsf{true}(n) \iff n = \ulcorner A \urcorner \text{ かつ } A \text{ は真である}$$

と定義することができた。同様にして、「T において証明可能である」という性質も自然数についての性質とみなすことができる。すなわち性質 $\mathsf{provable}_T(x)$ を

$$\mathsf{provable}_T(n) \iff n = \ulcorner A \urcorner \text{ かつ} \vdash_T A$$

と定義することができる。

定理 13.2 (決定不能性) 理論 T が Q の拡大であり、かつ Σ_1 健全であるとすると、T における証明可能性 $\vdash_T$ は再帰的（決定可能）ではない。すなわち、性質 $\mathsf{provable}_T(x)$ は再帰的ではない。

証明　仮に $\mathsf{provable}_T(x)$ が再帰的であり、すなわち Δ_1 集合であるとする。いま、X を任意の Σ_1 集合とする。すると X は何らかの一変項 Σ_1 論理式 $A(x)$ により定義することが

[2]本稿で表現可能性と呼ぶところの性質は、しばしば**弱い意味での表現可能性**（weak representability）と呼ばれているので注意が必要である。

[3]純粋に外延的に考えれば、$\vdash_T$ は定理 11.2 で示した階層ごとの真理概念の特殊例であると見なすこともできよう。ただし、真理概念が通常論理式の構成に関する帰納法により定義されるのに対して、証明可能性概念は証明の構成に関する帰納法により定義されるという重要な相違がある。

できるはずである。補題 9.12 により、$\mathsf{provable}_T(\ulcorner A(\overline{\ })\urcorner)$ は Δ_1 集合である。ここで定理 13.1 を用いれば、

$$n \in X \iff A(\overline{n}) \text{ が真} \iff \vdash_T A(\overline{n}) \iff \mathsf{provable}_T(\ulcorner A(\overline{n})\urcorner)$$

が成り立つことがわかる。ゆえに任意の Σ_1 集合は Δ_1 集合であることになってしまう。しかしこのことは算術的階層の厳密性に反する。 ■

特に Q も PA も健全であるから、$\vdash_Q$ も $\vdash_{PA}$ も決定不能である。さらに Q が有限集合であることから、次のことが帰結する（Church [1]）。

系 13.3 (一階述語論理の決定不能性) 一階述語論理における証明可能性 $\vdash$ は再帰的（決定可能）ではない。

証明 Q の公理を全て連言により結んで得られる論理式を $\bigwedge Q$ と書く。すると、

$$\vdash_Q A \iff \vdash \bigwedge Q \to A$$

が成り立つ。ゆえに、もしも一階述語論理の証明可能性が決定可能ならば、Q における証明可能性も決定可能となってしまうが、これは上記の定理に反する。 ■

14　証明可能性の算術的階層における位置づけと算術の第一不完全性

前章では、適切な仮定の下では証明可能性述語 $\mathsf{provable}_T(x_0)$ は Δ_1 ではないということを証明した。本章では、その一方で再帰的理論における証明可能性述語は Σ_1 であるという事実を示す[4]。Gödel[5] によるこの洞察は、形式的理論一般の性質として決定的に重要である。特に、第一不完全性定理 [5] はこのことと算術の Σ_1 完全性から直接に帰結する。

メタ数学的概念である証明可能性述語が算術的階層の、しかも Σ_1 というごく低い層に位置づけられるという事実は、真理述語は算術的階層のうちに位置づけることはできない（定理 11.1）という事実と対照的である。

定理 14.1 (証明可能性 $\in \Sigma_1$) 理論 T が再帰的ならば、T における証明可能性 $\vdash_T$ は Σ_1 である。すなわち性質 $\mathsf{provable}_T(x)$ は Σ_1 集合である。

証明　ゲーデル符号化は証明図についても行うことができる。すなわち、各証明図 π に対してゲーデル数 $\ulcorner\pi\urcorner$ をシステマティックに割り当てることができる。このとき、「y（があらわす証明図）は x（があらわす論理式）の T における証明図である」ことをあらわす関係 $\mathsf{proof}_T(y, x)$ が再帰的であることは容易に確かめることができる。ゆえに定理 9.8 より、$\mathsf{proof}_T(y, x)$ はある Σ_1 論理式 $A(y, x)$ により定義することができる。このとき、性質 $\mathsf{provable}_T(x)$ は Σ_1 論理式 $\exists y.A(y, x)$ により定義することができる。 ■

定理 14.2 (Π_1 不完全性) 理論 T が Q の無矛盾な再帰的拡大ならば、真でありかつ T で証明不可能な閉 Π_1 論理式が存在する。

証明　T が無矛盾ならば、T は Π_1 健全である。なぜならば、もしもある Π_1 論理式 A が証明可能でありなおかつ偽であるとすると、$\neg A$ は真な Σ_1 論理式（と論理的に同値）となり、ゆえに Σ_1 完全性により証明可能なはずである。すなわち A も $\neg A$ も証明可能となり、T は矛盾することになるからである。

いま、さらに T が Π_1 完全であるとすると、任意の一項 Π_1 論理式 $A(x_0)$、任意の $n \in \mathbb{N}$ について

$$A(\overline{n}) \text{ が真} \iff \vdash_T A(\overline{n}) \iff \mathsf{provable}_T(\ulcorner A(\overline{n})\urcorner)$$

となる。ここで $\mathsf{provable}_T(\ulcorner A(\overline{-})\urcorner)$ は補題 9.12 により Σ_1 集合であるから、$\Pi_1 \subseteq \Sigma_1$ が帰結するが、このことは算術的階層の厳密性に反する。 ■

次の定理が一般にゲーデルの第一不完全性定理と呼ばれるものである。この定理は Σ_1 健全性（ω 無矛盾性を弱めたもの）という仮定に基づいているが、後に第 17 章で、この仮定を単なる無矛盾性に弱めても同じ性質が成り立つことを示す。

系 14.3 (第一不完全性) 理論 T が Q の再帰的拡大であり、かつ Σ_1 健全ならば、A も $\neg A$ も証明不可能であるような閉 Π_1 論理式 A が存在する。

[4] Craig [2] は全ての再帰的枚挙可能理論（Σ_1 理論）についてそれと同等な再帰的理論が存在するという定理を証明した。この結果により、以下の諸定理は「再帰的」を「再帰的枚挙可能」と読み替えても、全て成立する。

証明　Π_1 不完全性定理により、真でありかつ証明不可能な Π_1 論理式 A が存在する。このとき $\neg A$ は偽な Σ_1 論理式（と論理的に同値）であるから、Σ_1 健全性により $\neg A$ は T では証明不可能である。 ■

15　理論 Q の詳細

理論 Q とは、算術のうち非常に初等的な部分に相当する形式的理論であった。これについてはすでに第 12 章であらましを述べたが、ここではもう少し厳密な形で Q について考え、その性質について検証していくことにする。特に目標とするのは、Σ_1 完全性定理 12.4 に厳密な証明を与えることである。

まず最初に、一階述語論理の形式的体系を一つ固定する必要がある。それは自然演繹でも式計算でも構わないのだが、ここでは取り扱いの便宜上、ヒルベルト流の公理的体系を採用することにする。

定義 15.1 (一階述語論理) 一階述語論理は次の公理と推論規則から成る。

- 公理（ここで A, B, C 等は任意の論理式を表す。また $A \to B$ は $\neg A \vee B$ の省略表現であることに注意する。）
  1. $A \to (B \to A)$
  2. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
  3. $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$
  4. $\forall x A \to A[t/x]$
- 推論規則
  1. A と $A \to B$ から B を導いてよい *(Modus Ponens)*。
  2. $A \to B$ から $A \to \forall x B$ を導いてよい（全称汎化）。ただし x は A の自由変項ではないものとする。

定義 15.2 (理論 Q) 理論 Q は一階述語論理に以下の論理式の全称閉包を公理として付け加えることにより得られる。

- 等号に関する公理
  1. $x = x$
  2. $x = z \to (y = z \to x = y)$
  3. $x = y \to S(x) = S(y)$
  4. $x_1 = y_1 \to (x_2 = y_2 \to x_1 + x_2 = y_1 + y_2)$
  5. $x_1 = y_1 \to (x_2 = y_2 \to x_1 \cdot x_2 = y_1 \cdot y_2)$
- 算術の公理
  1. $S(x) = S(y) \to x = y$
  2. $S(x) \neq 0$
  3. $x \neq 0 \to \exists y(x = S(y))$
  4. $x + 0 = x$

5. $x + S(y) = S(x + y)$
6. $x \cdot 0 = 0$
7. $x \cdot S(y) = (x \cdot y) + x$

定義 15.3 (証明) T を理論とする。論理式の列 $A_1, \ldots, A_n$ で次の性質を満たすものを論理式 A の T における**証明**という：

- 各 A_i は T の公理であるか、ある A_j と A_k（$j, k < i$）から *Modus Ponens* により得られるか、ある A_j から全称汎化により得られる。
- $A_n \equiv A$

このとき A は T において**証明可能**であるといい、$\vdash_T A$ と書く。

ゲーデルの完全性定理により、A が理論 T において証明可能ならば、A は T の公理の論理的帰結であり、逆に A が T の公理の論理的帰結ならば、A は T において証明可能である。ゆえに基本的な論理推論（背理法、場合分けなど）はすべて理論 T の中で自由に行うことができる。

以下では、論理と等号に関する基本的な推論は既知のものとして前提し、理論 Q における証明可能性について調べていく。

補題 15.4 任意の自然数 m, n について

1. $\vdash_Q \overline{m} + \overline{n} = \overline{m + n}$
2. $\vdash_Q \overline{m} \cdot \overline{n} = \overline{m \cdot n}$

証明 1. n に関する数学的帰納法による。$n = 0$ のときには、算術の公理 4 より。$n = k+1$ のときには、帰納法の仮定により $\vdash_Q \overline{m} + \overline{k} = \overline{m + k}$。よって算術の公理 5 より

$$\overline{m} + \overline{k+1} \equiv \overline{m} + S(\overline{k}) = S(\overline{m} + \overline{k}) = S(\overline{m+k}) \equiv \overline{m+k+1}$$

が Q で証明可能である。 ■

練習問題 15.5 上の補題の *2* を証明せよ。

補題 15.6

1. $m \neq n$ ならば $\vdash_Q \overline{m} \neq \overline{n}$
2. 任意の閉項 t について t の値が n ならば、$\vdash_Q t = \overline{n}$
3. 任意の閉項 t, u について t と u の値が等しければ $\vdash_Q t = u$。さもなくば $\vdash_Q t \neq u$

証明　1. $m > n$ とし（$n > m$ の場合も同様）、n に関する数学的帰納法により証明する。$n = 0$ のときには、算術の公理 2 より。$n = k+1$ のときには仮定より何らかの l について $m = l+1$ である。このとき $l > k$ なので、帰納法の仮定より $\vdash_Q \bar{l} \neq \bar{k}$。算術の公理 1 の対偶により $\vdash_Q S(\bar{l}) \neq S(\bar{k})$、すなわち $\vdash_Q \overline{l+1} \neq \overline{k+1}$。

2. t の構成に関する帰納法による。$t \equiv 0$ の場合には等号の公理より $\vdash_Q t = 0$。$t \equiv S(u)$ の場合には、u の値は $n-1$ であり、帰納法の仮定により $\vdash_Q u = \overline{n-1}$。よって等号の公理より $\vdash_Q S(u) = \overline{n}$。$t \equiv u+v$ のときには、u, v の値をそれぞれ m, k とすれば $n = m+k$ であり、帰納法の仮定より $\vdash_Q u = \overline{m}$、$\vdash_Q v = \overline{k}$。補題 15.4 の 1 により、$\vdash_Q \overline{m} + \overline{k} = \overline{m+k}$。よって $\vdash_Q u + v = \overline{n}$。$t \equiv u \cdot v$ の場合も同様である。

3. 1,2 より。 ■

補題 15.7

1. $\vdash_Q \forall x \forall y (x + y = 0 \rightarrow x = 0 \wedge y = 0)$

2. $\vdash_Q \forall x \forall y (x + S(y) = S(t) \rightarrow x + y = t)$

証明　1. （以下の方針で形式的な証明を与えることができる。）$x + y = 0$ を仮定し、また $y \neq 0$ とする。するとある z が存在し、$y = S(z)$ が成り立つ。すなわち $x + S(z) = 0$、よって $S(x+z) = 0$ となるが、これは算術の公理 2 と反する。ゆえに $y = 0$ である。よって算術の公理 4 により $x = 0$ も成り立つ。

2.（上と同様、以下の方針で形式的な証明を与える。）$x + S(y) = S(t)$ を仮定する。すると $S(x+y) = S(t)$ であり、ゆえに算術の公理 1 により $x + y = t$ が成り立つ。 ■

補題 15.8　任意の自然数 n について、

$$\vdash_Q \forall x \leq \overline{n} \rightarrow x = 0 \vee \cdots \vee x = n$$

証明　$x \leq \overline{n}$ とは $\exists y (x + y = \overline{n})$ の略記であったから、$\vdash x + y = \overline{n} \rightarrow x = \overline{0} \vee \cdots \vee x = \overline{n}$ を示せばよい。証明は n についての数学的帰納法による。

$n = 0$ のときには、補題 15.7 の 1 により $x = 0$ が成り立つ。$n = m+1$ のときには、以下の方針で形式的な証明を与える。$x + y = \overline{m+1}$ を仮定する。$y = 0$ または $y \neq 0$ のいずれかである。もしも $y = 0$ ならば $x = \overline{m+1}$ である。ゆえに $x = \overline{0} \vee \cdots \vee x = \overline{m+1}$ が成り立つ。もしも $y \neq 0$ ならば、算術の公理 3 により、ある z について $y = S(z)$ である。すなわち $x + S(z) = \overline{m+1}$ であり、補題 15.7 の 2 により $x + z = \overline{m}$ が成り立つ。帰納法の仮定により、$x = \overline{0} \vee \cdots \vee x = \overline{m}$ である。ゆえに $x = \overline{0} \vee \cdots \vee x = \overline{m+1}$ が成り立つ。■

定理 15.9 (Q の Σ_1 完全性)

1. 任意の閉 Δ_0 論理式 A について A が真ならば $\vdash_Q A$、さもなくば $\vdash_Q \neg A$ である。

2. 任意の閉 Σ_1 論理式 A について A が真ならば $\vdash_Q A$ である。

証明　1. A の構成に関する帰納法による。

A が原子論理式 $t = u$ のとき。もしも $t = u$ が真ならば t の値と u の値が等しいので補題 15.6 より $\vdash_Q t = u$。さもなくば t の値と u の値が異なるので、やはり補題 15.6 より $\vdash_Q t \neq u$。

A が $\neg B$ の形のとき。もしも A が真ならば B は偽である。ゆえに帰納法の仮定により $\vdash_Q \neg B$。もしも A が偽ならば B は真である。ゆえに帰納法の仮定により $\vdash_Q B$。よって $\vdash_Q \neg\neg B$。

A が $B \vee C$ の形のとき。もしも A が真ならば、B か C のどちらかが真である。仮に B が真であるとすると（C が真の場合も同様）、帰納法の仮定により $\vdash_Q B$。よって $\vdash_Q B \vee C$。もしも A が偽ならば、B も C も偽である。ゆえに帰納法の仮定により $\vdash_Q \neg B$ かつ $\vdash_Q \neg C$。よって $\vdash_Q \neg B \wedge \neg C$。ドモルガンの法則により $\vdash_Q \neg(B \vee C)$。

A が $\forall x \leq t.B$ の形のとき。t の値を n とする。もしも A が真ならば、$0 \leq m \leq n$ となる任意の m について $B[\overline{m}/x]$ は真である。帰納法の仮定により、$\vdash_Q B[\overline{m}/x]$。等号に関する推論により $\vdash_Q x = \overline{m} \to B$。これが $0 \leq m \leq n$ となる任意の m についていえるから、$\vdash_Q (x = \overline{0} \vee \cdots \vee x = \overline{n}) \to B$。補題 15.8 と合わせて $\vdash_Q x \leq \overline{n} \to B$。すなわち $\vdash_Q \forall x \leq \overline{n}.B$。補題 15.6 により $\vdash_Q t = \overline{n}$ が言えるから、$\vdash_Q \forall x \leq t.B$。

同様に A が $\forall x \leq t.B$ の形であるとし、A が偽の場合を考える。このとき $0 \leq m \leq n$ となるある m について、$B[\overline{m}/x]$ が偽となる。帰納法の仮定により、$\vdash_Q \neg B[\overline{m}/x]$。補題 15.4 より $\vdash_Q \overline{m} \leq \overline{n}$、すなわち $\vdash_Q \overline{m} \leq t$ がいえるので、$\vdash_Q \overline{m} \leq t \wedge \neg B[\overline{m}/x]$、そこで $\vdash_Q \exists x \leq t.\neg B$。ドモルガンの法則により $\vdash_Q \neg\forall x \leq t.B$。

2. 話を簡単にするために A は $\exists x.B$ の形であり、B は Δ_0 論理式であるとする。A が真なので、ある $m \in \mathbb{N}$ について $B[\overline{m}/x]$ は真である。上記 1 により、$\vdash_Q B[\overline{m}/x]$、よって $\vdash_Q \exists x.B$。 ■

定理 15.10 任意の原始再帰的関数 $f(x)$ について、ある Σ_1 論理式 $\mathsf{fun}_f(x, y)$ が存在し、任意の $n \in \mathbb{N}$ について

$$\vdash_Q \forall y(\mathsf{fun}_f(\overline{n}, y) \leftrightarrow \overline{f(n)} = y)$$

が成り立つ。

証明 補題 9.11 により、$f(x)$ はある Σ_1 論理式 $A(x, y)$ により定義される。すなわち、任意の $n \in \mathbb{N}$ について、

$$f(\vec{n}) = m \iff A(\overline{n}, \overline{m}) \text{ は真である。}$$

話を簡単にするために $A(x, y)$ は $\exists z.B(x, y, z)$ の形であるとする（ここで $B(x, y, z)$ は Δ_0 論理式）。次の論理式が求める $\mathsf{fun}_f(x, y)$ である。

$$\exists z(B(x,y,z) \wedge \forall w_1 \leq y \forall w_2 \leq y(w_1 \neq y \to \neg B(x, w_1, w_2)) \wedge \forall w_1 \leq z \forall w_2 \leq z(w_1 \neq y \to \neg B(x, w_1, w_2)))$$

この論理式が補題の性質を満たすことを確かめよう。まず $f(n) = m$ とする。すると $\exists z.B(\overline{n}, \overline{m}, z)$ が真なので、ある $k \in \mathbb{N}$ が存在し、$B(\overline{n}, \overline{m}, \overline{k})$ が真となる。また $\forall w_1 \leq \overline{m} \forall w_2 \leq \overline{m}(w_1 \neq \overline{m} \to \neg B(\overline{n}, w_1, w_2))$ も $\forall w_1 \leq \overline{k} \forall w_2 \leq \overline{k}(w_1 \neq \overline{m} \to \neg B(\overline{n}, w_1, w_2))$ も真である。ゆえに $\mathsf{fun}_f(\overline{n}, \overline{m})$ も真であり、Σ_1 完全性により、$\vdash_Q \mathsf{fun}_f(\overline{n}, \overline{m})$ が成り立つ。よって $\vdash_Q \overline{f(n)} = y \to \mathsf{fun}_f(\overline{n}, y)$。

逆方向は次の方針で示すことができる。仮に $y \neq \overline{f(n)}$、すなわち $y \neq \overline{m}$ かつ $\mathsf{fun}_f(\overline{n}, y)$ として矛盾を導く。$\mathsf{fun}_f(\overline{n}, y)$ が成り立つと仮定しているので、ある z について

$$B(\overline{n}, y, z) \wedge \forall w_1 \leq y \forall w_2 \leq y(w_1 \neq y \rightarrow \neg B(\overline{n}, w_1, w_2)) \wedge \forall w_1 \leq z \forall w_2 \leq z(w_1 \neq y \rightarrow \neg B(\overline{n}, w_1, w_2))$$

である。$l = max(m, k)$ とおくと、次の二通りのどちらかである。

1. $\bar{l} \leq y$ または $\bar{l} \leq z$ のとき。たとえば前者の場合、$\overline{m} \leq y, \overline{k} \leq y$ であり、$y \neq \overline{m}$ なので $\neg B(\overline{n}, \overline{m}, \overline{k}))$。しかし上の議論により $\vdash_Q B(\overline{n}, \overline{m}, \overline{k})$ のはずなので、これは矛盾である。$\bar{l} \leq z$ の場合も同様。
2. $y < \bar{l}$ かつ $z < \bar{l}$ のとき。

$$B(\overline{n}, \overline{m}, \overline{k}) \wedge \forall w_1 \leq \overline{m} \forall w_2 \leq \overline{m}(w_1 \neq \overline{m} \rightarrow \neg B(\overline{n}, w_1, w_2)) \wedge \forall w_1 \leq \overline{k} \forall w_2 \leq \overline{k}(w_1 \neq \overline{m} \rightarrow \neg B(\overline{n}, w_1, w_2))$$

であり、$l = max(m, k)$ だから $\forall w_1 \leq \bar{l} \forall w_2 \leq \bar{l}(w_1 \neq \overline{m} \rightarrow \neg B(\overline{n}, w_1, w_2))$ が成り立つ。$y < \bar{l}$、$z < \bar{l}$、$y \neq \overline{m}$ より $\neg B(\overline{n}, y, z))$ となる。しかしこれは $B(\overline{n}, y, z))$ と矛盾。 ■

16　形式化された対角線論法

本稿のこれまでの流れを振り返ってみると、まず我々は対角線論法を用いて算術的階層の厳密性を示し、そのことに基づいて、真理述語の定義不能性、一階述語論理の決定不能性、算術の第一不完全性などを証明してきた。特に算術的階層の厳密性が確立されたあとでは、対角線論法を用いる必要は一切なかった。

しかし Σ_1 表現可能性定理（定理 13.1）や第一不完全性定理における Σ_1 無矛盾性の仮定を単なる無矛盾性に弱めようとすると、どうしても**形式的体系の内部で**対角線論法を用いることが必要になってくる。その理由は、単なる無矛盾性の仮定だけでは、Σ_1 論理式の成立・不成立が標準モデルにおける真偽と必ずしも一致しなくなるため、標準モデルの内部にあるところの算術的階層の厳密性を形式的体系に反映させることができなくなるからである。また、第二不完全性定理を証明するためには、Π_1 不完全性定理の議論を形式的体系の内部で行う必要がある。そのためにも、対角線論法を形式的体系の内部で行うことが必要になってくる。ここでは形式的体系の内部における対角線論法の一般的な帰結として、対角化定理（任意の論理式に対してその**不動点**が存在する）を紹介する。

インフォーマルには、対角化定理（不動点定理）は以下のように示すことができる。

まず、ゲーデル数 n の一変項論理式を $A_n(x)$ により表すことにする（n が一変項論理式に対応しないときは未定義とする）。次に、関数 $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ を次のように定義する：

$$f(n) = \ulcorner A_n(\overline{n}) \urcorner$$

f は明らかに原始再帰的関数である。

さて、X を算術の論理式により定義可能な集合とすると、X と f の合成、すなわち

$$n \in X_f \iff f(n) \in X$$

を満たす集合 X_f もやはり算術の論理式により定義可能である（補題 9.7、補題 9.12 より）。X_f を定義する論理式（のゲーデル数）を k とする。すなわち、$A_k(x)$ が X_f を定義するものとする。すると、

$$A_k(\overline{k}) \text{ が真} \iff k \in X_f \iff f(k) \in X \iff \ulcorner A_k(\overline{k}) \urcorner \in X.$$

ゆえに算術の論理式により定義可能などんな集合 X についても、ある閉論理式 A が存在し、

$$A \text{ が真} \iff A \in X$$

が成立する。これが対角化定理の内容である[5]。

以上の論証を体系 Q において形式化すると、次のことが成立する。

定理 16.1 (対角化定理)

1. 任意の一変項論理式 $B(x)$ に対して、ある閉論理式 A が存在し、

$$\vdash_Q A \longleftrightarrow B(\overline{\ulcorner A \urcorner}).$$

[5] A は X の**不動点**（fixed point）と呼ばれる。

2. 任意の二項論理式 $B(x,y)$ に対して、ある一変項論理式 $A(y)$ が存在し、任意の $n \in \mathbb{N}$ について

$$\vdash_Q A(\overline{n}) \longleftrightarrow B(\overline{\ulcorner A(\overline{n}) \urcorner}, \overline{n}).$$

証明　上の原始再帰的関数

$$f(n) = \ulcorner A_n(\overline{n}) \urcorner$$

に定理 15.10 を適用することにより、Σ_1 論理式 $\mathsf{fun}_f(x,y)$ が得られ、任意の $n \in \mathbb{N}$ について

$$(*) \quad \vdash_Q \forall y(\mathsf{fun}_f(\overline{n}, y) \leftrightarrow \overline{f(n)} = y)$$

が成り立つ。ここで論理式 $\exists y(\mathsf{fun}_f(x,y) \wedge B(y))$ を考えれば、これは一変項論理式なので、ある自然数 k が存在し、

$$A_k(x) \equiv \exists y(\mathsf{fun}_f(x,y) \wedge B(y))$$

である。そこでこの k を使って

$$A \equiv A_k(\overline{k}) \equiv \exists y(\mathsf{fun}_f(\overline{k}, y) \wedge B(y))$$

と定義する。以下の二つのことを示せば証明は終わる。

1. $\vdash_Q B(\overline{\ulcorner A \urcorner}) \to A$

2. $\vdash_Q A \to B(\overline{\ulcorner A \urcorner})$

1. まず $f(k) = \ulcorner A_k(\overline{k}) \urcorner = \ulcorner A \urcorner$ であるから、(*) により $\vdash_Q \mathsf{fun}_f(\overline{k}, \overline{\ulcorner A \urcorner})$ が成り立つ。すなわち $\vdash_Q B(\overline{\ulcorner A \urcorner}) \to \mathsf{fun}_f(\overline{k}, \overline{\ulcorner A \urcorner}) \wedge B(\overline{\ulcorner A \urcorner})$ であり、よって $\vdash_Q B(\ulcorner A \urcorner) \to \exists y(\mathsf{fun}_f(\overline{k}, y) \wedge B(y)$。これは 1. に他ならない。

2. は次の方針で示すことができる。A を仮定せよ。するとある y について $\mathsf{fun}_f(\overline{k}, y) \wedge B(y)$ が成り立つ。(*) により $\overline{f(k)} = y \wedge B(y)$、すなわち $B(\overline{f(k)})$ であるが、$f(k) = \ulcorner A \urcorner$ であるから、結局 $B(\overline{\ulcorner A \urcorner})$ がいえたことになる。 ■

対角化定理を用いれば、第一不完全性定理に対してより直接的な証明を与えることができる。

理論 T が Q の再帰的拡大であり、かつ無矛盾であるとする。すると、定理 14.1 により証明可能性 $\vdash_T$ は Σ_1 である。即ち、

$$\mathsf{provable}_T(\overline{\ulcorner A \urcorner}) \text{ が真} \Longleftrightarrow \vdash_T A$$

となる。いま、論理式 $\neg Prov_T(x)$ に対して対角化定理を適用すると、

$$\vdash_T G \longleftrightarrow \neg Prov_T(\overline{G})$$

を満たす論理式 G を得ることができる。論理式 G は一般に**ゲーデル文**と呼ばれる。その直感的意味は「私は証明できない」といったものである。

定理 16.2 (第一不完全性)

1. 理論 T が Q の再帰的拡大であり、無矛盾ならば、$\nvdash_T G$。

2. さらに T が Σ_1 健全ならば、$\nvdash_T \neg G$。

証明

1. もしも $\vdash_T G$ であるとすると、$\vdash_T \neg\mathsf{provable}_T(\overline{\ulcorner G \urcorner})$ となり、T の無矛盾性により $\nvdash_T \mathsf{provable}_T(\overline{\ulcorner G \urcorner})$ である。ゆえに Σ_1 完全性定理により $\mathsf{provable}_T(\overline{\ulcorner G \urcorner})$ は偽である。よって $\nvdash_T G$ となり、矛盾する。

2. もしも $\vdash_T \neg G$ であるとすると、$\vdash_T \mathsf{provable}_T(\overline{\ulcorner G \urcorner})$ となり、T の Σ_1 健全性により $\mathsf{provable}_T(\overline{\ulcorner G \urcorner})$ は真である。ゆえに $\vdash_T G$ となる。これは T の無矛盾性に反する。

■

17　一般 Σ_1 表現可能性

第 13 章では、Σ_1 健全な Q の再帰的拡大においては、全ての Σ_1 集合が表現可能であること（定理 13.1）を証明した。ここでは Σ_1 健全性の仮定を無矛盾性の仮定で置き換えても同様のことが成立することを証明する（Ehrenfeucht-Feferman [3]）。また、その帰結として、Q の本質的決定不能性（定理 13.2 の一般化）、ゲーデル=ロッサーの不完全性定理（系 14.3 の一般化）を示す。

定理 17.1 (一般 Σ_1 表現可能性) 理論 T が Q の再帰的拡大であり、かつ無矛盾であるとすると、任意の Σ_1 集合 X に対してある一変項論理式 $B(x)$ が存在し、

$$n \in X \Longleftrightarrow \vdash_T B(\overline{n})$$

定理 13.1 の場合とは異なり、ここで論理式 $B(x)$ は X を定義する論理式であるとは限らないことに注意。

証明　X は Σ_1 論理式 $\exists y.A(x,y)$（ここで A は Δ_0）により定義され、T における証明可能性 $\vdash_T$ は Σ_1 論理式 $\exists y.\mathsf{proof}_T(x,y)$ により定義されるものとする。すなわち、どんな論理式 A についても、

$$\exists y.\mathsf{proof}_T(\overline{\ulcorner A \urcorner}, y) \text{ が真 } \Longleftrightarrow \vdash_T A$$

が成り立つものとする。このとき、二項論理式

$$\forall y(\mathsf{proof}_T(x,y) \to \exists z \leq y.A(w,z))$$

を考えると、対角化定理により、ある一変項論理式 $B(x)$ が存在して、任意の n について

$$\vdash_T B(\overline{n}) \longleftrightarrow \forall y(\mathsf{proof}_T(\overline{\ulcorner B(\overline{n}) \urcorner}, y) \to \exists z \leq y.A(\overline{n}, z))$$

を満たす。これが求める論理式であることを示すには、次の 2 点を証明すればよい。

1. $n \in X \Longrightarrow \vdash_T B(\overline{n})$。
2. $\vdash_T B(\overline{n}) \Longrightarrow n \in X$。

1. $n \in X$ かつ $\nvdash_T B(\overline{n})$ と仮定して矛盾を導く。前者よりある $k \in \mathbb{N}$ について $A(\overline{n}, \overline{k})$ が真である。Σ_1 完全性により、$\vdash_T A(\overline{n}, \overline{k})$ (a)。また後者より、どんな $m \in \mathbb{N}$ についても $\mathsf{proof}_T(\overline{\ulcorner B(\overline{n}) \urcorner}, \overline{m})$ は偽。よって $\forall y < \overline{k}.\neg\mathsf{proof}_T(\overline{\ulcorner B(\overline{n}) \urcorner}, y)$ は真。Σ_1 完全性により、$\vdash_T \forall y < \overline{k}.\neg\mathsf{proof}_T(\overline{\ulcorner B(\overline{n}) \urcorner}, y)$ (b)。以上二つの事実に基づいて、次のように（体系 T 内において）論証を進めることができる。まず (b) より、$y < \overline{k} \to \neg\mathsf{proof}_T(\overline{\ulcorner B(\overline{n}) \urcorner}, y)$。対偶をとって、$\mathsf{proof}_T(\overline{\ulcorner B(\overline{n}) \urcorner}, y) \to \overline{k} \leq y$。また (a) より、$\overline{k} \leq y \to (\overline{k} \leq y \wedge A(\overline{n}, \overline{k}))$、すなわち $\overline{k} \leq y \to \exists z \leq y. \wedge A(\overline{n}, z)$。よって $\mathsf{proof}_T(\overline{\ulcorner B(\overline{n}) \urcorner}, y) \to \exists z \leq y. \wedge A(\overline{n}, z)$。これにより $\vdash_T \forall y(\mathsf{proof}_T(\overline{\ulcorner B(\overline{n}) \urcorner}, y) \to \exists z \leq y. \wedge A(\overline{n}, z))$、つまり $\vdash_T B(\overline{n})$ が成り立つが、これは $\nvdash_T B(\overline{n})$ という仮定と矛盾する。

2. $\vdash_T B(\overline{n})$ かつ $n \notin X$ と仮定して矛盾を導く。前者よりある $m \in \mathbb{N}$ について $\mathsf{proof}_T(\overline{\ulcorner B(\overline{n}) \urcorner}, \overline{m})$ は真。これは Σ_1 完全性により、$\vdash_T \mathsf{proof}_T(\overline{\ulcorner B(\overline{n}) \urcorner}, \overline{m})$。また後者よ

り、どんな $k \in \mathbb{N}$ についても $A(\overline{n}, \overline{k})$ は偽、つまり $\neg A(\overline{n}, \overline{k})$ は真。特に $\forall z \leq \overline{m}.\neg A(\overline{n}, z)$ は真。Σ_1 完全性により、$\vdash_T \forall z \leq \overline{m}.\neg A(\overline{n}, z)$、すなわち $\vdash_T \neg\exists z \leq \overline{m}.A(\overline{n}, z)$。以上により、$\vdash_T \mathsf{proof}_T(\overline{\ulcorner B(\overline{n}) \urcorner}, \overline{m}) \wedge \neg\exists z \leq \overline{m}.A(\overline{n}, z)$。ここから $\vdash_T \neg B(\overline{n})$ が導かれる。ゆえに T は矛盾することになるが、これは T の無矛盾性の仮定に反する。 ■

次の系は定理 13.2 と同様にして証明できる。

定理 17.2 (Q の本質的決定不能性) 理論 T が Q の無矛盾な再帰的拡大であるとすると、T における証明可能性 $\vdash_T$ は決定可能ではない。

最後に第一不完全性定理の改良版であるゲーデル=ロッサーの定理を証明する（Rosser [9]）。

定理 17.3 (ゲーデル=ロッサー不完全性) 理論 T が Q の無矛盾な再帰的拡大であるとすると、A も $\neg A$ も証明不可能であるような閉 Π_1 論理式 A が存在する。

証明 仮に T が完全であるとする。すなわち、どんな論理式 A についても、$\vdash_T A$ か $\vdash_T \neg A$ のどちらかが成り立つとする。いま、Π_1 集合 X が与えられたとき、その補集合 X^C は Σ_1 集合であり、ゆえに定理 17.1 によりある一変項論理式 $B(x)$ が存在し、

$$n \in X^C \Longleftrightarrow \vdash_T B(\overline{n}).$$

一方、T の無矛盾性および完全性の仮定により

$$\not\vdash_T B(\overline{n}) \iff \vdash_T \neg B(\overline{n}).$$

以上のことから、

$$n \in X \Longleftrightarrow n \notin X^C \Longleftrightarrow \not\vdash_T B(\overline{n}) \iff \vdash_T \neg B(\overline{n})$$

よって $\Pi_1 \subseteq \Sigma_1$ が帰結するが、これは算術的階層の厳密性に反する。 ■

第一不完全性定理同様、ゲーデル=ロッサーの不完全性定理にも直接的な証明方法がある。$\mathsf{disproof}_T(x, y)$ を「y は T における $\neg(x)$ の証明である」を意味する論理式とし、一変項論理式

$$\forall y(\mathsf{proof}_T(x, y) \to \exists z \leq y.\mathsf{disproof}_T(x, z))$$

に対角化定理を適用して得られる論理式を R とする。すると $\not\vdash_T R$ かつ $\not\vdash \neg R$ であることが直接的に証明できる（R は一般に**ロッサー文**と呼ばれる）。定理 17.1 における論理式 $B(x)$ の構成法はこのロッサー文の構成法を一般化したものになっている。

18　第二不完全性

理論 T を Q の再帰的拡大とする。このとき、Π_1 不完全性定理は次の性質をもつ論理式 A が存在することを主張する：

1. T が無矛盾ならば A が成り立つ。

2. T が無矛盾ならば $\nvdash_T A$。

Π_1 不完全性定理に至るまでの証明を注意深く検討すれば、この A は具体的に構成することが可能である（あるいは定理 16.2 における G をとればよい）。そして、そのような具体的な A に話を制限すれば、算術を超え出るような超越的な論法は一切用いずに Π_1 不完全性定理は証明可能である[6]。ゆえに理論 T として十分強力な算術の体系（例えば PA）をとれば、Π_1 不完全性の議論は全て T **の内部で**遂行することができる。特に上記の 1 を形式化することで、次のことが証明できる：

1' $\vdash_T \mathsf{consistent}_T \to A$

ここで $\mathsf{consistent}_T$ は T の無矛盾性を表す論理式 $\neg\mathsf{provable}_T(\overline{\ulcorner 0=1 \urcorner})$ である。上記 1',2 の論理的帰結として、もしも $\vdash_T \mathsf{consistent}_T$ ならば T は矛盾することになる。言い換えれば、

- T が無矛盾ならば、$\nvdash_T \mathsf{consistent}_T$。

すなわち、十分強力かつ無矛盾な理論は、自分自身の無矛盾性を証明することができない。これがゲーデルの第二不完全性定理の主張の骨子である。以下、第二不完全性定理の証明のあらましを見ていくことにする。

次の定理は定理 14.1 の改良版である。

定理 18.1 理論 T が PA の再帰的拡大ならば、$\vdash_T$ を表し、かつ次の性質を満たす Σ_1 論理式 $\mathsf{provable}_T(x)$ が存在する：

1. **形式化された Modus Ponens：** 任意の論理式 A について、

$$\vdash_T \mathsf{provable}_T(\overline{\ulcorner A \urcorner}) \land \mathsf{provable}_T(\overline{\ulcorner A \to B \urcorner}) \to \mathsf{provable}_T(\overline{\ulcorner B \urcorner}).$$

2. **形式化された Σ_1 完全性：** 任意の Σ_1 論理式 A について、

$$\vdash_T A \to \mathsf{provable}_T(\overline{\ulcorner A \urcorner}).$$

実際、$\mathsf{provable}_T(x)$ を “自然に”（証明の長さに関する帰納法を使って）定義すれば、上記の性質 1 は、自ずと満たされる（ただし注意深い論証が必要である）。性質 2 は、PA が Σ_1 完全性定理の証明を遂行するのに十分な証明能力を持っているという事実に基づいている[7]。

以下、上の定理の性質を満たす $\mathsf{provable}_T(x)$ を一つ固定し、$\mathsf{consistent}_T \equiv \neg\mathsf{provable}_T(\overline{\ulcorner 0=1 \urcorner})$ と定義する。

[6] これまでに用いた論法の全てが算術において形式化可能なわけではない。例えば、PA の健全性（定理 12.5）を示すためには、**任意の**論理式に関する真理述語が必要であるが、そのような述語が算術的には定義不能であることは、定理 11.1 で見た通りである。

[7] 実際には、PA ほど強力な証明能力は必要ではなく、高々Σ_1 論理式に関する帰納法が使用できれば十分である。

補題 18.2

1. $\vdash_T A$ ならば $\vdash_T \mathsf{provable}_T(\overline{\ulcorner A \urcorner})$。
2. $\vdash_T \mathsf{provable}_T(\overline{\ulcorner A \urcorner}) \to \mathsf{provable}_T(\overline{\ulcorner \mathsf{provable}_T(\overline{\ulcorner A \urcorner}) \urcorner})$。[8]
3. $\vdash_T \mathsf{provable}_T(\overline{\ulcorner A \urcorner}) \to B$ ならば $\vdash_T \mathsf{provable}_T(\overline{\ulcorner A \urcorner}) \to \mathsf{provable}_T(\overline{\ulcorner B \urcorner})$。

証明

1. $\vdash_T A$ ならば $\mathsf{provable}_T(\overline{\ulcorner A \urcorner})$ が真。ゆえに Σ_1 完全性定理により $\vdash_T \mathsf{provable}_T(\overline{\ulcorner A \urcorner})$。
2. 定理 18.1 の 2 で、A として Σ_1 論理式 $\mathsf{provable}_T(\overline{\ulcorner A \urcorner})$ をとればよい。
3. まず、形式化された Modus Ponens により、次の FMP が成り立つことに注意する：

$$\dfrac{\vdash_T \mathsf{provable}_T(\overline{\ulcorner A \to B \urcorner})}{\vdash_T \mathsf{provable}_T(\overline{\ulcorner A \urcorner}) \to \mathsf{provable}_T(\overline{\ulcorner B \urcorner})}\ FMP$$

これと上記の 1,2 を用いて、

$$\dfrac{\dfrac{}{\vdash_T \mathsf{provable}_T(\overline{\ulcorner A \urcorner}) \to \mathsf{provable}_T(\overline{\mathsf{provable}_T(\overline{\ulcorner A \urcorner})})}\ 2 \qquad \dfrac{\dfrac{\vdash_T \mathsf{provable}_T(\overline{\ulcorner A \urcorner}) \to B}{\vdash_T \mathsf{provable}_T(\overline{\ulcorner \mathsf{provable}_T(\overline{\ulcorner A \urcorner}) \to B \urcorner})}\ 1}{\vdash_T \mathsf{provable}_T(\overline{\ulcorner \mathsf{provable}_T(\overline{\ulcorner A \urcorner}) \urcorner}) \to \mathsf{provable}_T(\overline{\ulcorner B \urcorner})}\ FMP}{\vdash_T \mathsf{provable}_T(\overline{\ulcorner A \urcorner}) \to \mathsf{provable}_T(\overline{\ulcorner B \urcorner})}$$

■

定理 18.3 (第二不完全性) 理論 T が PA の再帰的拡大であり、かつ無矛盾ならば、$\nvdash_T \mathsf{consistent}_T$。

証明 論理式 $\neg\mathsf{provable}_T(x)$ に対角化定理を適用することにより、

$$\vdash G \leftrightarrow \neg\mathsf{provable}_T(\overline{\ulcorner G \urcorner})$$

を満たす論理式 G（ゲーデル文）を得ることができる。$\vdash_T \neg G \leftrightarrow (G \to 0 = 1)$ に注意すれば、以下のように $\vdash_T \mathsf{consistent}_T \to G$ を導出することができる：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash_T \mathsf{provable}_T(\overline{\ulcorner G \urcorner}) \to \neg G}}{\vdash_T \mathsf{provable}_T(\overline{\ulcorner G \urcorner}) \to (G \to 0 = 1)}}{\vdash_T \mathsf{provable}_T(\overline{\ulcorner G \urcorner}) \to \mathsf{provable}_T(\overline{\ulcorner G \to 0 = 1 \urcorner})}\ \text{補題 18.2 の 3}}{\vdash_T \mathsf{provable}_T(\overline{\ulcorner G \urcorner}) \to \mathsf{provable}_T(\overline{\ulcorner G \urcorner}) \land \mathsf{provable}_T(\overline{\ulcorner G \to 0 = 1 \urcorner})}}{\vdash_T \mathsf{provable}_T(\overline{\ulcorner G \urcorner}) \to \mathsf{provable}_T(\overline{\ulcorner 0 = 1 \urcorner})}\ \text{定理 18.1 の 1}}{\dfrac{\vdash_T \mathsf{consistent}_T \to \neg\mathsf{provable}_T(\overline{\ulcorner G \urcorner})}{\vdash_T \mathsf{consistent}_T \to G}}$$

[8] 定理 18.1 の 1 および補題 18.2 の 1,2 を合わせて**可導性条件** (derivability conditions) と呼ぶ。第二不完全性定理はこれら 3 つの条件および対角化定理から帰結する。

一方、T は無矛盾なので、定理 16.2 により $\nvdash_T G$。よって、$\nvdash_T \mathsf{consistent}_T$。 ■

しかし一方で、PA の無矛盾性に関しては、いくつかの部分的な肯定的結果が知られている（cf. [6]）。いま、理論 T が**有限公理化可能**（finitely axiomatizable）であるとは、ある有限集合 T' が存在して、$\vdash_T A \Longleftrightarrow \vdash_{T'} A$ が成り立つこととする。

定理 18.4 (局所的な無矛盾性の証明可能性) 理論 $T \subseteq PA$ が有限公理化可能ならば、$\vdash_{PA} \mathsf{consistent}_T$。

特に、T としてどのように大きな公理の集合を取ったとしても、それが有限である限り、PA はその無矛盾性を証明することができる。系として、次のことが帰結する。

系 18.5 (PA の本質的無限性) PA は有限公理化不可能である。

次に、任意の $n \geq 1$ について、**理論** $I\Sigma_n$ とは、Q に Σ_n 論理式に関する数学的帰納法の公理を全て付け加えることにより得られる理論のことであるとする。当然、$I\Sigma_n \subseteq PA$ である。これらの PA の部分理論については、次のことが知られている。

定理 18.6 (各層ごとの有限公理化可能性) 任意の $n \geq 1$ について、Σ_n は有限公理化可能である。

よって、次のことが成り立つ。

系 18.7 (各層ごとの無矛盾性の証明可能性) 任意の $n \geq 1$ について、$\vdash_{PA} \mathsf{consistent}_{I\Sigma_n}$.

どのように大きな n をとったとしても、このことは成立する。特に、通常の数学において用いられる数学的帰納法を全て包含するほどに大きな n を取ったとしても、PA は、その無矛盾性を証明することができるのである。

参考文献

[1] A. Church. A note on the Entscheidungsproblem, *Journal of Symbolic Logic*, Vol. 1, 1936, pp. 40–41.

[2] W. Craig. Bases for first order theories and subtheories, *Journal of Symbolic Logic*, Vol. 25, 1960, pp. 97–142.

[3] A. Ehrenfeucht and S. Feferman. Representability of recursively enumerable sets in formal theories, Arch. Math. Log., Vol. 5, 1959, pp. 37–41.

[4] S. Feferman. Arithmetization of metamathematics in a general setting, *Fundamenta Mathematicae*, Vol. 49, 1960, pp. 35–92.

[5] K. Gödel. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia mathematica und verwandter Systeme I, *Monatshefte für Mathematik und Physik*, Vol. 38, pp. 173–198.

[6] P. Hájek and P. Pudlák, *Metamathematics of First-Order Arithmetic*, Perspectives in Mathematical Logic, Springer, 1994.

[7] S. C. Kleene. Recursive functions and predicates, *Trans. Amer. Math.*, Vol. 53, 1943, pp. 41–73.

[8] P. G. Odifreddi, *Classical Recursion Theory*, Elsevier, 1989.

[9] J. B. Rosser, Extensions of some theorems of Gödel and Church's theorem, *Journal of Symbolic Logic*, Vol. 4, 1939, pp. 53–60.

[10] J. R. Shoenfield, *Mathematical Logic*, Addison-Wesley, 1967.

[11] R. M. Smullyan. *Gödel's Incomplete Theorems*. Oxford University Press, 1992.（邦訳：『ゲーデルの不完全性定理』、丸善株式会社、1996.）

[12] 田中一之（編・著）、『数学基礎論講義』、日本評論社、1997.