線形論理入門

∼ What's the USE? ∼

照井 一成

`terui@nii.ac.jp`

国立情報学研究所

線形論理とはどんな論理では**ない**か？

- 1987 年 J.-Y. Girard により Theoretical Computer Science に発表されなかった。
- その斬新性・重要性ゆえに通常の査読手続抜きで出版される、などということはなかった。
- 古典論理、直観主義論理に取って代わる第三の論理
    - そうではなく古典論理や直観主義論理の分析・分解である。
- 形式主義や直観主義に取って代わる新しいイデオロギー
    - 形式主義者や直観主義者はいても、線形主義者はいない。
- 日常言語や日常的推論の分析
    - 第一義的には論理におけるダイナミズム・計算論的側面の分析である。

トピックス

- 構成的証明がなぜ重要化か？
- 線形論理の構成性
- 線形論理の Resource-sensitivity
- 直観主義論理・古典論理の分解
- プルーフネット
- 様々な意味論の動機

二種類の数学的知識

- **定理**（命題的知識）：三平方の定理、フェルマーの定理
- **アルゴリズム**（手続的知識）：角の二等分線の作図法、連立方程式の解法
- **両者の関係は？**
  - 広い意味での数学基礎論の課題の一つ
  - **構成的証明**の理解がカギ

構成的証明

- 大雑把にいって、アルゴリズム的内容を含むような証明
- $A \vee B$ **の構成的証明**：A の証明か B の証明を含む、あるいは少なくともそれらを与える実効的な手続きを含むような証明
- $\exists x.A(x)$ **の構成的証明**：$A(m)$ を満たす具体的な m を含む、あるいは少なくともそのような m を与える実効的な手続を含むような証明
- $\forall x \exists y.A(x,y)$ **の構成的証明**：任意のインプット n に対して $A(n,m)$ を満たすアウトプット m を与える実効的な手続きを含むような証明

非構成的証明の例

- **定理**：$x^y = z$ を満たす無理数 x と y および有理数 z が存在する。
  $(\exists xyz.x^y = z \wedge \neg rational(x) \wedge \neg rational(y) \wedge rational(z))$
  - **証明**：$\sqrt{2}$ は無理数である。一方 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ は有理数であるか無理数であるかのいずれかである。もしも有理数ならば $x = y = \sqrt{2}$ とせよ。すると仮定により $z = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ は有理数となる。もしも無理数ならば $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$、$y = \sqrt{2}$ とせよ。すると $z = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$ より z は確かに有理数となる。
- **排中律**（$A \vee \neg A$）を本質的に用いていることに注意。

構成的証明の例

- **定理**（ユークリッド）：素数は無限に存在する。
  $(\forall x \exists y > x.prime(y))$
  - **自然数** x **が与えられたとき、** $y_0 = x! + 1$ **とせよ。もしも** y_0 **が素数ならば OK。さもなければ** y_0 **の約数のうち** 1 **以外で最小のものを** y_1 **とせよ。** すると y_1 は素数である。なぜならばどのような数についても 1 以外で最小の約数は常に素数だからである。また、y_1 が x 以下であることはありえない。なぜならば 2 以上 x 以下の数で $x! + 1$ を割ったならば必ず 1 余るはずだからである。
- **太字部分**は与えられた自然数よりも大きい素数を返す**アルゴリズム**を記述している。（ある数が素数かどうかは実際に判定できる性質であることに注意。）
- 残りの部分はアルゴリズムの正しさを**検証**している。

構成的証明とアルゴリズム

- **構成的証明** = **アルゴリズム** + **検証**
  - 理論面においては、定理（命題的知識）とアルゴリズム（手続的知識）を関連づける。
  - 応用面においては、プログラム自動抽出、プログラム検証などの手段を与える。
- **アルゴリズムの実行 = 証明の単純化**
- $ld(z) = z$ の約数のうち 1 以外で最小のもの
- 前述の証明の太字部分は以下のように書き直すことができる

$$y = if\ prime(x! + 1)\ then\ x! + 1\ else\ ld(x! + 1)$$

- いま、$x = 5$ を代入すると

$$y = if\ prime(5! + 1)\ then\ 5! + 1\ else\ ld(5! + 1)$$

証明の単純化＝アルゴリズムの実行

- この証明（の一部）は余剰を含む（任意の自然数に当てはまる一般的証明に特定の数を代入したのだから当然である）。この証明を単純化してみると以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
y &= if\ \ prime(5!+1)\ \ then\ \ 5!+1\ \ else\ \ ld(5!+1) \\
&= if\ \ prime(121)\ \ then\ \ 121\ \ else\ \ ld(121) \\
&= if\ \ false\ \ then\ \ 121\ \ else\ \ ld(121) \\
&= ld(121) \\
&= 11
\end{aligned}
$$

- 11 は確かに 5 よりも大きい素数である。このようにして証明を単純化することにより構成的証明に含まれるアルゴリズムを実行することができる。

形式的体系における証明の単純化

- 式計算においては**カット規則**が代入を可能にする。

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \forall x\exists y.A(x,y)\end{array} \qquad \dfrac{\overline{\exists y.A(n,y)\vdash\exists y.A(n,y)}}{\forall x\exists y.A(x,y)\vdash\exists y.A(n,y)}}{\vdash\exists y.A(n,y)}\ Cut$$

- 式計算においては、**証明の単純化＝カット消去手続き**
- ゆえに、**アルゴリズムの実行＝カット消去手続き**

古典・直観主義論理の論理式（1）

- **変項**：$x, y, z, \ldots$
- **項**：x, $f(t_1, \ldots, t_n), \ldots$
- **論理式**：$p(t_1, \ldots, t_n)$, $A \vee B$, $A \wedge B$, $A \rightarrow B$, $\neg A$, $\forall x.A$, $\exists x.A$
- **規約** α：束縛変項の名前のみが異なるような二つの論理式は同一視することにする。（例：$\forall x.p(x, y) \equiv \forall z.p(z, y)$）
- 規約 α により、すべての論理式は以下が満たされるような仕方で記述することができる。
  - 一つの論理式の中で、一つの変項が束縛され、かつ自由であることはない。

    例：$p(x) \wedge \forall x.q(x)$ と書くかわりに、$p(x) \wedge \forall y.q(y)$ と書く。
  - 一つの束縛変項の現れ (occurrence) が 2 つの量化子によって 2 度束縛されることはない。

    例：$\forall x(p(x) \wedge \exists x q(x))$ のかわりに、$\forall x(p(x) \wedge \exists y q(y))$ という曖昧性のない形で書く。

古典・直観主義論理の論理式（2）

- **代入**：t は項、A は論理式、x は A の自由変項であるとする。規約 α により、x は A に束縛変項として含まれない仮定してよい。また同様に、t の自由変項が A に束縛変項として含まれることはないと仮定してよい。このとき、A に含まれる変項 x へ t を代入してできる新たな論理式を $A[t/x]$ と書く。
- **古典論理の式**（sequent）：$A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_m$ ここで $n \geq 0, m \geq 0$。各 A_i, B_j は論理式。
- **直観主義論理の式**：$0 \leq m \leq 1$。つまり右辺には論理式が高々一個しか現れない。
- **式の直感的意味**：「前提 $A_1, \ldots, A_n$ の全てが成り立てば、結論 $B_1, \ldots, B_m$ のどれかが帰結する」。特に $m = 1$ のときは「前提 $A_1, \ldots, A_n$ から結論 B_1 が帰結する」ことを表し、$m = 0$ のときは、「前提 $A_1, \ldots, A_n$ は矛盾する」ことを表す。$m = n = 0$ となる式 $\vdash$ （空式）は矛盾を表す。

古典論理の式計算 (1)

- 論理式の有限列を $\Gamma, \Delta, \Pi, \ldots$ を用いて表す。

同一律とカット:

$$\frac{}{A \vdash A}\ Id \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, D \quad D, \Pi \vdash \Lambda}{\Gamma, \Pi \vdash \Delta, \Lambda}\ Cut$$

構造規則:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{D, \Gamma \vdash \Delta}\ W\text{左} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, D}\ W\text{右}$$

$$\frac{D, D, \Gamma \vdash \Delta}{D, \Gamma \vdash \Delta}\ C\text{左} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, D, D}{\Gamma \vdash \Delta, D}\ C\text{右}$$

$$\frac{\Gamma, C, D, \Pi \vdash \Delta}{\Gamma, D, C, \Pi \vdash \Delta}\ E\text{左} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, C, D, \Lambda}{\Gamma \vdash \Delta, D, C, \Lambda}\ E\text{右}$$

古典論理の式計算 (2)

命題論理規則:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, D}{\neg D, \Gamma \vdash \Delta}\ \neg\text{左} \qquad \frac{D, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg D}\ \neg\text{右}$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta}\ \wedge\text{左 (1)} \qquad \frac{B, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta}\ \wedge\text{左 (2)} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B}\ \wedge\text{右}$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \vee B, \Gamma \vdash \Delta}\ \vee\text{左} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}\ \vee\text{右 (1)} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}\ \vee\text{右 (2)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad B, \Pi \vdash \Lambda}{A \to B, \Gamma, \Pi \vdash \Delta, \Lambda} \to \text{左} \qquad \frac{A, \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \to B} \to \text{右}$$

古典論理の式計算 (3)

述語論理規則:

$$\frac{A[t/x], \Gamma \vdash \Delta}{\forall x A, \Gamma \vdash \Delta}\ \forall 左 \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x A}\ \forall 右^{*}$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\exists x A, \Gamma \vdash \Delta}\ \exists 左^{*} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A[t/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x A}\ \exists 右$$

(* ∀右規則、∃左規則において、x は下式において自由変項としてはあらわれない (*eigenvariable condition*)。)

直観主義論理の式計算 (1)

同一律とカット:

$$\frac{}{A \vdash A}\ Id \qquad \frac{\Gamma \vdash D \quad D, \Pi \vdash \Lambda}{\Gamma, \Pi \vdash \Lambda}\ Cut$$

構造規則:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{D, \Gamma \vdash \Delta}\ W\text{左} \qquad \frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash D}\ W\text{右}$$

$$\frac{D, D, \Gamma \vdash \Delta}{D, \Gamma \vdash \Delta}\ C\text{左}$$

$$\frac{\Gamma, C, D, \Pi \vdash \Delta}{\Gamma, D, C, \Pi \vdash \Delta}\ E\text{左}$$

直観主義論理の式計算(2)

命題論理規則:

$$\frac{\Gamma \vdash D}{\neg D, \Gamma \vdash} \neg\text{左} \qquad \frac{D, \Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \neg D} \neg\text{右}$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta} \wedge\text{左 (1)} \qquad \frac{B, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta} \wedge\text{左 (2)} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \wedge\text{右}$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \vee B, \Gamma \vdash \Delta} \vee\text{左} \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee\text{右 (1)} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee\text{右 (2)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad B, \Pi \vdash \Lambda}{A \to B, \Gamma, \Pi \vdash \Lambda} \to\text{左} \qquad \frac{A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \to\text{右}$$

直観主義論理の式計算 (3)

述語論理規則:

$$\frac{A[t/x], \Gamma \vdash \Delta}{\forall x A, \Gamma \vdash \Delta}\ \forall 左 \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall x A}\ \forall 右^*$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\exists x A, \Gamma \vdash \Delta}\ \exists 左^* \qquad \frac{\Gamma \vdash A[t/x]}{\Gamma \vdash \exists x A}\ \exists 右$$

(* ∀右規則、∃左規則において x は下式に自由変項としてあらわれない (*eigenvariable condition*)。)

基本定理

- **カット消去定理**（Gentzen）：$\Gamma \vdash \Delta$ が古典論理において証明可能ならば $\Gamma \vdash \Delta$ はカット規則を用いずに証明可能である。直観主義論理についても同様の性質が成り立つ。
  - **証明の方針**：（1）与えられた証明からカットを除去するための具体的な手続き（**カット消去手続き**）を与える。（2）カット消去手続きはどのような証明に適用されても常に停止することを示す。

直観主義論理の構成性

- **選言文特性**（disjunction property）：直観主義論理で $A \vee B$ が証明可能ならば A か B のどちらかが証明可能である。
- **存在文特性**（existential property）：直観主義論理で $\exists x.A(x)$ が証明可能ならば何らかの t について $A(t)$ が証明可能である。
  - **証明**：$\vdash \exists x.A(x)$ が証明可能であるとすると、$\vdash \exists x.A(x)$ はカットを用いずに証明可能である。直観主義式計算の各規則を吟味してみれば、そのような証明の最後の部分は必ず
  $$\frac{\vdash A(t)}{\vdash \exists x.A(x)}$$
  という形をしていることがわかる。
- 今、$\forall x \exists y.A(x, y)$ が直観主義論理で証明可能であるとする。すると、与えられた項 n に対して $\exists y.A(n, y)$ が証明可能である。ゆえに存在文特性により $A(n, m)$ を満たす m を得ることができる。

古典論理の非構成性

- 選言文特性は一般には成り立たない：任意の論理式 A について排中律 $A \vee \neg A$ が証明可能であるため。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A}{A \vdash A \vee \neg A}}{\vdash A \vee \neg A, \neg A}}{\vdash A \vee \neg A, A \vee \neg A}}{\vdash A \vee \neg A}\ C\text{右}$$

- 存在文特性は一般には成り立たない：任意の論理式 A について $\exists x.(\exists y.A(y)) \to A(x)$ が証明可能であり、かつ（A として原子論理式を取れば）どのような項 t についても $(\exists y.A(y)) \to A(t)$ は証明可能ではない。
- いずれの場合もコントラクション右の使用が本質的である。

古典論理 vs 直観主義論理

- 古典論理は右辺に現れる論理式の数を制限しないためコントラクション右を自由に用いることができる。それが原因で構成性を失っている。
- 直観主義論理は右辺に現れる論理式の数を高々一個に制限することによりコントラクション右をブロックし、それによって構成性を維持している。
- 右辺に関する制限はどの程度本質的か？他に構成性を維持する手段はないのか？

BCK 論理・二重否定律

- **BCK 論理**（FL_{ew}）：直観主義論理からコントラクション左を除いたもの
- **二重否定律** $\neg\neg A \to A$：右辺に複数個の論理式が現れてもよいことに相当。これがないと式計算の左右対称性、ドモルガン双対性、否定の involutivity 等の性質が失われる。
  - 右辺に複数個論理式が現れてもよいならば $\cdots$

$$\dfrac{\dfrac{A \vdash A}{\vdash A, \neg A}}{\neg\neg A \vdash A}$$

  - 二重否定律があれば、$\Gamma \vdash \Delta$ を $\Gamma, \neg\Delta \vdash$ により模倣できる

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, \neg A \vdash}{\Gamma \vdash \neg\neg A} \quad \neg\neg A \vdash A}{\Gamma \vdash A}}{\Gamma \vdash A'}}{\Gamma, \neg A' \vdash}$$

構成性維持のための様々な手段

- **定理**：BCK 論理において以下の関係が成り立つ

$$\text{排中律} = \text{二重否定律} + \text{コントラクション}$$

  - **証明**：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A}{A, \neg\neg A \vdash A} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg A \vdash \neg A}}{\neg A, \neg\neg A \vdash}}{\neg A, \neg\neg A \vdash A}}{A \vee \neg A, \neg\neg A \vdash A}}{A \vee \neg A \vdash \neg\neg A \to A} \qquad \dfrac{A, A, \Gamma \vdash C \qquad \dfrac{\dfrac{A \vdash A}{\neg A, A \vdash}}{\neg A, A, \Gamma \vdash C}}{A \vee \neg A, A, \Gamma \vdash C}$$

- 構成性を全般的に維持するためには排中律を拒否する必要がある

二重否定律の拒否	$\Longrightarrow$	**直観主義論理**
コントラクションの拒否	$\Longrightarrow$	**グリシンの論理**
コントラクションの**制御**	$\Longrightarrow$	**線形論理**

ウィークニングについて

- ウィークニングは選言文特性や存在文特性を妨げない。
- カット消去手続の非決定性を引き起こす。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi_1\\ \vdash A\end{array}}{\vdash A, A}\ W\text{右} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi_2\\ \vdash A\end{array}}{A \vdash A}\ W\text{左}}{\vdash A, A}}{\vdash A} \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi_1\\ \vdash A\end{array}}{\vdash A, A}}{\vdash A} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c}\vdots\ \pi_1\\ \vdash A\end{array}$$

$$\Longrightarrow \quad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi_2\\ \vdash A\end{array}}{\vdash A, A}}{\vdash A} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c}\vdots\ \pi_2\\ \vdash A\end{array}$$

- 証明に表示的意味論を与えることを困難にする。

線形論理の導入（1）

- 4 段階に分けて導入する。
- **ステップ 0**：古典論理を一辺（one-sided）式計算を用いて再定式化する。
  - 二辺（two-sided）式計算には無駄がある。例えば $\wedge$ 右と $\vee$ 左、$\vee$ 右と $\wedge$ 左はそれぞれ形としては同タイプの規則であり、左右が逆転しているにすぎない。式 $\Gamma \vdash \Delta$ の左右を重ね合わせて $\vdash \neg\Gamma, \Delta$ と一辺化することにより、より経済的な体系を得ることができる。
  - 論理式は $p, \neg p$ の形のリテラルから $\vee$, $\wedge$, $\forall$, $\exists$ を用いて構成される。
  - 否定は primitive な結合子ではなく、ドモルガン双対性を用いて定義される。例えば

$$\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B) \qquad \neg(\forall x.A) \equiv \exists.(\neg A)$$

線形論理の導入（2）

- **ステップ 1**：コントラクション、ウィークニングを取り除く。
- **ステップ 2**：二種類の（乗法的、加法的）連言、選言の区別をする。
  - 例えば連言については

乗法的連言 $\dfrac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Delta, B}{\vdash \Gamma, \Delta, A \wedge B}$ **加法的連言** $\dfrac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \wedge B}$

  - 乗法的連言と加法的連言はコントラクション、ウィークニングを仮定すれば同等であるが、両者が取り除かれている現在のセッティングでは別々の推論規則である。ゆえに連言と選言はそれぞれ二つの論理結合子に別れることになる。
- **ステップ 3**：指数関数演算子（S4 様相）を用いてコントラクションとウィークニングを再導入する。

線形論理の論理式 (1)

- **リテラル**：$p, p^{\perp}, q(\vec{t}), q^{\perp}(\vec{t}), \ldots$
- **加法／乗法的結合子**：

	連言	選言	真	偽	全称	存在
乗法的	$A \otimes B$	$A \parr B$	**1**	$\perp$		
加法的	$A \mathbin{\&} B$	$A \oplus B$	$\top$	**0**	$\forall x.A$	$\exists x.A$

- **指数関数的結合子**：$!A$, $?A$

線形論理の論理式 (2)

- **否定**はドモルガン双対性に基づいて定義される

$$(A \otimes B)^\perp \equiv A^\perp \parr B^\perp \qquad (A \parr B)^\perp \equiv A^\perp \otimes B^\perp$$

$$\mathbf{1}^\perp \equiv \perp \qquad \perp^\perp \equiv \mathbf{1}$$

$$(A \,\&\, B)^\perp \equiv A^\perp \oplus B^\perp \qquad (A \oplus B)^\perp \equiv A^\perp \,\&\, B^\perp$$

$$\top^\perp \equiv \mathbf{0} \qquad \mathbf{0}^\perp \equiv \top$$

$$(\forall x.A)^\perp \equiv \exists x.A^\perp \qquad (\exists x.A)^\perp \equiv \forall x.A^\perp$$

$$(!A)^\perp \equiv ?A^\perp \qquad (?A)^\perp \equiv !A^\perp$$

- **線形含意**：$A \multimap B \equiv A^\perp \parr B$, $A \multimapboth B \equiv (A \multimap B) \,\&\, (B \multimap A)$
- **極性**（polarity）による分類
  - **正の結合子**（positive）：$\otimes$, $\oplus$, **1**, **0**
  - **負の結合子**（negative）：$\&$, $\parr$, $\top$, $\perp$

線形論理の推論規則

$$\frac{}{\vdash A, A^{\perp}}\ \mathit{Identity} \qquad \frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Delta, A^{\perp}}{\vdash \Gamma, \Delta}\ \mathit{Cut}$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Delta, B}{\vdash \Gamma, \Delta, A \otimes B}\ \otimes \qquad \frac{\vdash \Gamma, A, B}{\vdash \Gamma, A \parr B}\ \parr \qquad \frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, \perp}\ \perp \qquad \frac{}{\vdash \mathbf{1}}\ \mathbf{1}$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \,\&\, B}\ \& \qquad \frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, A \oplus B}\ \oplus 1 \qquad \frac{\vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \oplus B}\ \oplus 2 \qquad \frac{}{\vdash \Gamma, \top}\ \top$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, \forall x.A}\ \forall \qquad \frac{\vdash \Gamma, A[t/x]}{\vdash \Gamma, \exists x.A}\ \exists$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, ?A}\ ?D \qquad \frac{\vdash \Gamma, ?A, ?A}{\vdash \Gamma, ?A}\ ?C \qquad \frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, ?A}\ ?W \qquad \frac{\vdash ?\Gamma, A}{\vdash ?\Gamma, !A}\ !$$

論理結合子の基本的性質

- 正の論理結合子は以下の代数的性質を満たす。
- **可換性**：$A \otimes B \multimap\!\!\circ\, B \otimes A$, $A \oplus B \multimap\!\!\circ\, B \oplus A$.
- **結合性**：$(A \otimes B) \otimes C \multimap\!\!\circ\, A \otimes (B \otimes C)$, $(A \oplus B) \oplus C \multimap\!\!\circ\, A \oplus (B \oplus C)$.
- **単位元**：$\mathbf{1} \otimes A \multimap\!\!\circ\, A$, $\mathbf{0} \oplus A \multimap\!\!\circ\, A$.
- **分配性**：$A \otimes (B \oplus C) \multimap\!\!\circ\, (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$, $A \otimes \mathbf{0} \multimap\!\!\circ\, \mathbf{0}$.
- 負の結合子に関する同様の性質はドモルガン法則により得られる。
- **アジョイントネス**：$(A \otimes B \multimap C) \multimap\!\!\circ\, (A \multimap (B \multimap C))$.
- 乗法的結合子と加法的結合子の間には**指数関数的同型対応**（exponential isomorphism）が存在する（$2^A \cdot 2^B = 2^{A+B}$）

$$!A \otimes !B \multimap\!\!\circ\, !(A \,\&\, B), \qquad \mathbf{1} \multimap\!\!\circ\, !\top$$

指数関数的同型対応の証明

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$\vdash A^{\perp}, A$}
\UnaryInfC{$\vdash ?A^{\perp}, A$}
\UnaryInfC{$\vdash ?A^{\perp}, ?B^{\perp}, A$}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$\vdash B^{\perp}, B$}
\UnaryInfC{$\vdash ?B^{\perp}, B$}
\UnaryInfC{$\vdash ?A^{\perp}, ?B^{\perp}, B$}
\BinaryInfC{$\vdash ?A^{\perp}, ?B^{\perp}, A \,\&\, B$}
\UnaryInfC{$\vdash ?A^{\perp}, ?B^{\perp}, !(A \,\&\, B)$}
\UnaryInfC{$\vdash ?A^{\perp} \parr ?B^{\perp}, !(A \,\&\, B)$}
\UnaryInfC{$\vdash (?A^{\perp} \parr ?B^{\perp}) \parr !(A \,\&\, B)$}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$\vdash A^{\perp}, A$}
\UnaryInfC{$\vdash A^{\perp} \oplus B^{\perp}, A$}
\UnaryInfC{$\vdash ?(A^{\perp} \oplus B^{\perp}), A$}
\UnaryInfC{$\vdash ?(A^{\perp} \oplus B^{\perp}), !A$}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$\vdash B^{\perp}, B$}
\UnaryInfC{$\vdash A^{\perp} \oplus B^{\perp}, B$}
\UnaryInfC{$\vdash ?(A^{\perp} \oplus B^{\perp}), B$}
\UnaryInfC{$\vdash ?(A^{\perp} \oplus B^{\perp}), !B$}
\BinaryInfC{$\vdash ?(A^{\perp} \oplus B^{\perp}), ?(A^{\perp} \oplus B^{\perp}), !A \otimes !B$}
\UnaryInfC{$\vdash ?(A^{\perp} \oplus B^{\perp}), !A \otimes !B$}
\UnaryInfC{$\vdash ?(A^{\perp} \oplus B^{\perp}) \parr !A \otimes !B$}
\BinaryInfC{$\vdash !A \otimes !B \mathrel{\circ\!\!-\!\!\circ} !(A \,\&\, B)$}
\end{prooftree}
$$

Resource-sensitivity

- 化学反応式 $2H_2 + O_2 = 2H_2O$ はどのようにして論理的に表現することができるか？
- 古典論理では量的側面を表すのは困難。
- 線形論理では簡単：$H_2 \otimes H_2 \otimes O_2 \multimap H_2O \otimes H_2O$
- 上の論理式を L とおくと、例えば

  $$!L, H_2, H_2, H_2, H_2, O_2, O_2, O_2 \vdash H_2O \otimes H_2O \otimes H_2O \otimes H_2O \otimes O_2$$

  など正しい化学反応は全て証明でき、かつ誤った化学反応は証明できない。
- **Quantity**：線形論理では A と $A \otimes A$ は異なる。
- **Consumption**：線形論理では一度仮定を使うとその仮定は消費される。

証明探索＝並行プロセス計算（1）

- Parallel Action ($\otimes$)

  $$\frac{A, B, \Gamma \vdash}{A \otimes B, \Gamma \vdash} \otimes$$

  (Parallel action $A \otimes B$ invokes processes A and B in parallel.)

  A special case of this action is the Sending Action

  $$\frac{\alpha, B, \Gamma \vdash}{\alpha \otimes B, \Gamma \vdash} \otimes$$

  (Sending action $\alpha \otimes B$ sends a token α and invokes B.)

- Receiving Action ($\multimap$)

  $$\frac{\alpha \vdash \alpha \quad A, \Gamma \vdash}{\alpha, \alpha \multimap A, \Gamma \vdash} \multimap$$

  (Receiving action $\alpha \multimap A$ receives a token α from the environment and invokes A.)

証明探索＝並行プロセス計算（2）

- Receiving Action 2 ($\forall, \multimap$)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\alpha(t) \vdash \alpha(t)} \quad A(t), \Gamma \vdash}{\alpha(t), \alpha(t) \multimap A(t), \Gamma \vdash} \multimap}{\alpha(t), \forall x(\alpha(x) \multimap A(x)), \Gamma \vdash} \forall$$

- Identifier Creation ($\exists$)

$$\dfrac{A(a), \Gamma \vdash}{\exists x. A(x), \Gamma \vdash} \exists$$

where a is a fresh variable which does not occur in Γ.

- Suicide (**1**)

$$\dfrac{\Gamma \vdash}{\mathbf{1}, \Gamma \vdash} \mathbf{1}$$

- Copying (!)

$$\dfrac{!A, A, \Gamma \vdash}{!A, \Gamma \vdash}\,!$$

並行プロセスの例

- 客 $\equiv Yen \otimes \forall x(ID(x) \multimap H(x) \multimap \mathbf{1})$
- レジ係 $\equiv !(Yen \multimap \exists y(ID(y) \otimes Req(y)))$
- 作る人 $\equiv !\forall z(Req(z) \multimap H(z))$
- ハンバーガー売買の成功 $\Longleftrightarrow$ 客, レジ係, 作る人 $\vdash \mathbf{1}$ の証明探索の成功（証明可能）

線形論理の構成性

- **カット消去定理**：$\vdash \Gamma$ が線形論理において証明可能ならば $\vdash \Gamma$ はカット規則を用いずに証明可能である。
- **選言文特性**：線形論理において $A \oplus B$ が証明可能ならば A か B のどちらかが証明可能である。
- **存在文特性**：線形論理において $\exists x.A(x)$ が証明可能ならば何らかの t について $A(t)$ が証明可能である。
- 線形論理は構成的である。では、線形論理の証明はどんなアルゴリズムに相当するのか？ また直観主義論理の証明が表すアルゴリズムとの関係はどうなっているのか？

直観主義論理の解釈(1)

- 直観主義論理式から線形論理式への二つの写像 * （Girardian)、$^\bullet$ （Gödelian）を次のように定義する

$$
\begin{array}{rclcrcl}
(p(\vec{t}))^* & \equiv & p(\vec{t}) & \qquad & (p(\vec{t}))^\bullet & \equiv & !p(\vec{t}) \\
(A \to B)^* & \equiv & !A^* \multimap B^* & & (A \to B)^\bullet & \equiv & !(A^\bullet \multimap B^\bullet) \\
(\neg A)^* & \equiv & !A^* \multimap \mathbf{0} & & (\neg A)^\bullet & \equiv & !(A^\bullet \multimap \mathbf{0}) \\
(A \wedge B)^* & \equiv & A^* \mathbin{\&} B^* & & (A \wedge B)^\bullet & \equiv & A^\bullet \otimes B^\bullet \\
(A \vee B)^* & \equiv & !A^* \oplus !B^* & & (A \vee B)^\bullet & \equiv & A^\bullet \oplus B^\bullet \\
(\forall x.A)^* & \equiv & \forall x.A^* & & (\forall x.A)^\bullet & \equiv & !\forall x.A^\bullet \\
(\exists x.A)^* & \equiv & \exists x.!A^* & & (\exists x.A)^* & \equiv & \exists x.A^\bullet
\end{array}
$$

- **定理**：直観主義論理の任意の論理式 A について、$!A^* \circ\!\!-\!\!\circ A^\bullet$ が線形論理において証明可能である。

直観主義論理の解釈(2)

- 線形論理から様相論理 S4 への写像 $^-$ を次のように定義する

$$(p(\vec{t}))^- \equiv p(\vec{t}) \qquad (p^\perp(\vec{t}))^- \equiv \neg p(\vec{t})$$

$$(A \otimes B)^- \equiv (A \mathbin{\&} B)^- \equiv A^- \wedge B^- \qquad (A \parr B)^- \equiv (A \oplus B)^- \equiv A^- \vee B^-$$

$$(!A)^- \equiv \Box A^- \qquad (?A)^- \equiv \Diamond A^-$$

$$(\forall x.A)^- \equiv \forall x.A^- \qquad (\exists x.A)^- \equiv \exists x.A^-$$

直観主義論理の解釈(3)

- **定理**：直観主義論理の任意の式 $\Gamma \vdash A$ について、以下の４つは同値である
  (1) $\Gamma \vdash A$ が直観主義論理で証明可能
  (2) $\vdash ?(\Gamma^*)^\perp, A^*$ が線形論理で証明可能
  (3) $\vdash (\Gamma^\bullet)^\perp, A^\bullet$ が線形論理で証明可能
  (4) $\vdash (\Gamma^{\bullet -})^\perp, (A^\bullet)^-$ が S4 で証明可能
  - 証明：$(2 \Rightarrow 3)$ は前述の定理による。$(3 \Rightarrow 4)$ は明らか。$(4 \Rightarrow 1)$ は様相論理と直観主義論理に関する古典的な結果である。最後に $(1 \Rightarrow 2)$ を証明の長さに関する帰納法により証明する。

直観主義論理の解釈(4)

$$\dfrac{}{A \vdash A} \quad\Longrightarrow\quad \dfrac{\overline{A^* \vdash A^*}}{!A^* \vdash A^*}$$

$$\dfrac{A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \quad\Longrightarrow\quad \dfrac{!A^*, \Gamma^* \vdash B^*}{\Gamma^* \vdash !A^* \multimap B^*}$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash A \quad B, \Delta \vdash C}{\Gamma, A \to B, \Delta \vdash C} \quad\Longrightarrow\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{!\Gamma^* \vdash A^*}{!\Gamma^* \vdash !A^*} \quad !B^*, !\Delta^* \vdash C^*}{!\Gamma^*, !A^* \multimap !B^*, !\Delta^* \vdash C^*}}{!\Gamma^*, !(!A^* \multimap B^*), !\Delta^* \vdash C^*}$$

- 最後の翻訳では $!(!A \multimap B) \vdash !A \multimap !B$ が証明可能であることを用いている。
- 以下同様。
- この解釈は直観主義論理のカット消去手続（β 簡約）を保存する。

$\Longrightarrow$ 直観主義的アルゴリズムを線形論理において分析する可能性

古典論理の解釈

- 古典論理式から線形論理式への写像 $^+$

$$p(\vec{t})^+ \equiv ?!p(\vec{t}) \qquad (\neg A)^+ \equiv ?(A^{+\perp})$$

$$(A \vee B)^+ \equiv A^+ \parr B^+ \qquad (\forall x.A)^+ \equiv ?!\forall x.A^+$$

- **定理**：A が古典論理で証明可能 $\Longleftrightarrow$ A^+ が線形論理で証明可能
- 古典論理の証明からアルゴリズム的内容を抽出する可能性
  $\Longrightarrow$ **構成的古典論理** LC へ（Girard 92）

プルーフネット

- 自然演繹の線形論理版、グラフ論的シンタックス
- ここでは**乗法的線形論理**（$\otimes$, $\parr$ だけの部分体系）のプルーフネットのみについて解説する。
- 構成要素：**ワイヤー**、$\otimes$ **セル**、$\parr$ **セル**。各セルは１つの**主ポート**と２つの**従ポート**を持つ。
- **ネット**：０個以上のセルのポートをワイヤーを使って結んだもの。他のポートに結ばれていないポート（フリーポート）があってもよい。

Wf ネット

- **Wf ネット**：以下のようなネットのこと
  - 一本のワイヤー。この wf ネットは 2 つのフリーポートを持つ
  - 二つの wf ネットから一つずつフリーポートをとり、それらをワイヤーで結んだもの
  - 二つの wf ネットから 1 つずつフリーポートをとり、それらを $\otimes$ セルの従ポートを通してつなぎ合わせたもの
  - 一つの wf ネットから 2 つのフリーポートをとり、それらを $⅋$ セルの従ポートを通してつなぎ合わせたもの
- **スイッチング**：各 $⅋$ セルの従ポートに結ばれている 2 本のワイヤーのうち、どちらか一方を切断すること
- **定理**（Danos-Regnier 条件）：ネット π が Wf ネットである $\Longleftrightarrow$ π をスイッチングして得られるグラフはどれも連結かつ無循環である

ネットの簡約(1)

- **リデックス**：主ポート同士が結ばれた $\otimes$ セルと $\parr$ セルの対
- **簡約** $\pi_1 \longrightarrow \pi_2$：ネット π_1 のリデックスを一つ消去すること
- 式計算ではカット消去の以下のステップに相当する

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\ \pi_1\\ \vdash \Gamma, A\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots\ \pi_2\\ \vdash \Delta, B\end{matrix}}{\vdash \Gamma, \Delta, A \otimes B} \quad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\ \pi_3\\ \vdash \Pi, A^\perp, B^\perp\end{matrix}}{\vdash \Pi, A^\perp \parr B^\perp}}{\vdash \Gamma, \Delta, \Pi}
\quad \Longrightarrow \quad
\dfrac{\begin{matrix}\vdots\ \pi_1\\ \vdash \Gamma, A\end{matrix} \quad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\ \pi_2\\ \vdash \Delta, B\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots\ \pi_3\\ \vdash \Pi, A^\perp, B^\perp\end{matrix}}{\vdash \Delta, \Pi, A^\perp}}{\vdash \Gamma, \Delta, \Pi}
$$

- では Id の場合は？

$$
\dfrac{\dfrac{}{\vdash A, A^\perp} \quad \begin{matrix}\vdots\ \pi\\ \vdash A, \Gamma\end{matrix}}{\vdash A, \Gamma}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{matrix}\vdots\ \pi\\ \vdash A, \Gamma\end{matrix}
$$

ネットの簡約(2)

- **正規なネット**：リデックスを含まないネットのこと
- **強正規化定理**：簡約手続はどのような順序で適用しようとも常に停止する。
- **Church-Rosser 定理**：$\pi_1 \longleftarrow \pi_0 \longrightarrow \pi_2$ かつ $\pi_1 \neq \pi_2$ ならば、ある π_3 が存在し、$\pi_1 \longrightarrow \pi_3 \longleftarrow \pi_2$。
- **定理**：$\pi_1 \longrightarrow \pi_2$ で π_1 が wf ネットならば、π_2 も wf ネットである。

ネットの型付け

- **型付け**：各ワイヤー（および各方向性）に対してある制約にのっとって乗法的線形論理の論理式が割り当てること
- **定理**：全ての wf ネットは型付け可能である。
- よってネットの構造だけに関心があるのならば、型（論理式）のことは忘れてしまってよい。

プルーフネットの特徴（1）

- 式計算
    - 冗長（コンテクストを繰り返し書かねばならない）
    - 証明の妥当性は局所的に判定可能
    - カット消去は大域的、逐次的
- プルーフネット
    - 簡潔
    - 証明の妥当性にはグラフ論的、大域的な基準（Danos-Regnier 条件) がある。
    - カット消去は局所的、並行的

プルーフネットの特徴（2）

- ラムダ計算
  - 計算＝インプットの関数への代入
  - インプット/アウトプットの非対象性
- プルーフネット
  - 計算＝インタラクション
  - インプット/アウトプットの区別はない

相意味論（Phase Semantics）(1)

- 線形論理の**証明可能性**を特徴付けるタルスキー流意味論
- **相空間** $(M, \perp)$：M は可換モノイド、$\perp \subseteq M$。
- 相空間 $(M, \perp)$ が与えられたとき、各論理式 A は**ファクト**と呼ばれる M の部分集合 $A^\bullet$ により解釈される。
- **健全性定理**：A が証明可能 $\Longrightarrow$ 任意の相空間 $(M, \perp)$ において $1 \in A^\bullet$ （ここで 1 はモノイド M の単位元）
- 様々な相空間を考えることにより、線形論理の様々な性質を示すことができる。

相意味論（Phase Semantics）(2)

- (Girard 87,94) の相空間：$1 \in A^\bullet \Longrightarrow A$ は証明可能。
  $\Rightarrow$ 完全性定理
- (Okada 9?) の相空間：$1 \in A^\bullet \Longrightarrow A$ はカットを用いずに証明可能。
  $\Rightarrow$ カット消去定理
- (Lafont 96) の相空間：A を 2 カウンター機械 $\mathcal{M}$（及びインプット n）をあらわす論理式とすると、
  $1 \in A^\bullet \Longrightarrow < \mathcal{M}, n >$ は停止する。
  $\Rightarrow$ 線形論理の決定不能性
- その他、有限モデル性を介して決定可能性を示すのにも用いられる。例：線形論理＋ウィークニングの有限モデル性 (Lafont 97)、線形論理＋コントラクションの有限モデル性 (Okada-Terui 01)。
- 相意味論は果たして“*abstract nonsense*”(Lafont, Girard) に過ぎないのか？

Coherent Semantics（１）

- **証明（プログラム）**に対する表示的意味論
- （PCF、ラムダ計算に対する）Scott domain の単純化
- もともとはシステム F（二階直観主義論理）の意味論として考案されたが、ある日ジラールは直観主義含意 $A \to B$ が coherent semantics においては $!A \multimap B$ と分解でき、かつ coherent space 上では involutive な否定を定義できることに気づいた。$\Longrightarrow$ **線形論理の誕生**

Coherent Semantics（２）

- **Coherent space** $X = (|X|, \frown\!\!\!\!\smile)$：無向反射的グラフ
  $\forall x, y \in |X|. x \frown\!\!\!\!\smile y \longrightarrow y \frown\!\!\!\!\smile x$, $\forall x \in |X|. x \frown\!\!\!\!\smile x$
- **クリーク** $a \sqsubset X$：$\forall x, y \in a. x \frown\!\!\!\!\smile y$
- 論理式 A は coherent spaceA^* により、A の証明 π はクリーク $\pi^* \sqsubset A^*$ により解釈される。
- **表示的意味論の基本的性質**：π_1 がカット消去手続により π_2 へ変換されるならば、$\pi_1^* = \pi_2^*$。
  （構成的論理においては証明＝プログラム、カット消去＝プログラム実行という対応があることを念頭においてほしい。）