

計算の世界へようこそ

照井一成 (国立情報学研究所, 論理学)

てるい かずしげ

計算はつまらない？

計算はつまらない。学校では、足し算、掛け算、三角形の面積の求め方、方程式の解法などを次から次へと教え込まれ、一つの計算手順ごとに分厚い計算ドリルを使って反復練習をさせられる。面倒くさいことこの上ない。ひとたび習得したあとでも、決まりきった手順を機械のように遂行するのは面白みを欠く作業だ。しかも人間の計算は間違しやすいし、遅い。どんなに鍛錬をつもうとも、コンピュータには到底かなわない。さらには、そんなにまでして習得した計算も、ひとたび社会に出れば実際に必要とされるのはごく一部、せいぜい四則演算に色がついた程度である。このような状況にあっては、いっそ計算はコンピュータや電卓に全部まかせて、学校で計算を教えるのはやめではどうか、などという考えが起こっても不思議はない。

しかし計算を手段として捉えるのをやめ、目的として捉えるならば、事情は異なってくる。個々の計算に専念するかわりに、計算一般について考察してみる。そもそも計算とは何か？ その可能性と限界はどこにあるのか？ そうすると見えてくるのは一つの世界、さまざまな計算たちが織り成す豊かな“計算の世界”である。そこには多様性があり、驚異があり、美しさがある。この見地に至って初めて、計算は面白い。しかしこの見地に至るには、まず冒頭に述べたような計算についてのさまざまな否定的要因を取り除いておかねばならない。それが本稿の目的である。

計算は実生活で役に立たないのか？

学校で習う高度な計算が必ずしも実生活で役に立つとは限らない、というのはその通りである。しかしだからといって計算そのものが実生活では不要だと言ったとしたら、それは行き過ぎだ。“計算”というと普通、数値計算(calculation)が思い浮かべられるが、計算とは決してそれに尽きるものではない。何らかの問題解決のために一定の手順に従って行う知的作業、それは全て広い意味での計算(computation)であると言える。そして、実生活はこの広い意味での計算に満ちているのである。たとえば:

- どっさりと届いた年賀状を五十音順に並べる(ソーティング)
- たくさんある観光スポットを一日で制覇するために、最も効率のよい行き方を調べる(最短経路問題)
- 夫婦で海外旅行に行くとき、二つのスーツケースの重さがぴったり同じになるように荷物をつめる(分割問題)

これらはみな一種の計算である。とくに最短経路問題や分割問題は、一般的な解法に従って解こうとすると実にやっかいな問題であり、ある意味で人はこの手の作業をするとき非常に高度な計算を行っていると言えなくもないのである。

しかし学校で習う数値計算が、実生活に必要な広義の計算のためにどのように役に立つというのか？ この問いに答えるために、まず地理や歴史

などの暗記科目と数学の最大の違いは何かについて考えてみよう。地理は教科書を丸暗記すればある程度点を取れるが、数学はそうはいかない。それは、数学が教え込もうとしているものが「 $83+95$ 」や「 $x^2-2x+1=0$ の解」など個々の計算結果にあるのではなく、数字や式の形が変わっても応用できるような計算手順、すなわちアルゴリズムにあるからである。アルゴリズムとは個々の計算結果よりも1ランク抽象度の高い概念であり、この抽象的なものを身に着けない限り、数学では点はとれない。しかもアルゴリズムは丸暗記すればよいというものではない。実際に駆使し、個々の事例に即して適用できるのでなければならない。

広義の計算も、アルゴリズムが本質的な役割を果たすという点ではまったく同様である。学校の数学は、アルゴリズムという抽象的な観念を理解し、それに従い計算する能力を鍛えるという点で、広義の計算の能力向上にも大いに寄与しているのである。

計算とコンピュータ

ところで「一定の手順に従って行う知的作業」とは、コンピュータにもできる作業ばかりである。ゆえに計算とはコンピュータにできるような作業のことだといっても過言ではない。実際、1930年代半ばに「計算とは何か」が一部の数学者の間で話題になったとき、そのような定義を与えたのが現代コンピュータの考案者アラン・チューリングである。より正確に言えば、彼が主張したのは、計算可能な関数とは“コンピュータ”により値が求められるような関数だということである。もちろん当時はハードウェアとしてのコンピュータなど存在しなかったから、“コンピュータ”とは何であるかを彼は具体的に提示しなければならなかった。彼は計算作業を行う“人間”を分析し、理想的計算者たる“コンピュータ”に到達した。それがやがて機械的なハードウェアとして実体化されるに至ったのである。このような歴史的経緯に

鑑みて言えば、計算とは“コンピュータ”にできること、と言い切ってしまうのもあながち不当なことではないのである。

さて、先ほど広義の計算は数値計算に尽きるものではないといったが、別の観点からすれば、計算とは数値計算に尽きるのだとも言える。なぜなら、計算とはコンピュータにできるような作業のことである。そしてコンピュータは0と1の二種類の信号を操作することにより計算を進める。ゆえにコンピュータの行っていることは2進数の数値演算の連続であるとも言える。つまり計算とは数値演算である！

このように言うとは何か騙されたように思われるかもしれないので、補助的な事実として、次のことを挙げておこう。 $3x^4y^3+5x^2z-9xyz=0$ のように整数の係数をもつ多変数方程式のことをディオファントス方程式という。すると、コンピュータで実行できるような計算課題(正確には、その中でも答がイエス・ノーであるようなもの)はすべてディオファントス方程式に整数解が存在するかどうかの判定問題に帰着することが知られている。

たとえば分割問題を考えよう。分割問題は次のようなイエス・ノー問題として定式化することができる。

- 荷物の集まりが与えられたとき、重さがちょうどぴったりになるように二分割することはできるか？

分割問題の具体例(つまり荷物の重さを表す正の整数の列 $n_1, \dots, n_k$)が与えられると、それに対応してディオファントス方程式 $P(x_1, \dots, x_n)=0$ を立てることができる。そして二分割が可能なのはこの方程式に整数解が存在するときに限る。

さて、 $P(x_1, \dots, x_n)=0$ に整数解が存在するかどうかは、各変数に $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ を順番に代入してゆけば確かめられるだろう。これは小学校の算数を学んだ人なら誰でもできる作業である。(この方法では解の非存在を示すことはできないが、大丈夫。分割問題の場合、その逆問題についても



方程式を立てることができるからである。)つまり、整数の四則演算ができるあなた、あなたはそれだけで立派な“コンピュータ”だ。ある意味でコンピュータと同等の問題解決能力をもっていると言える。もちろん正確さや速さを度外視しての話ではあるが。

このような意味で計算とは数値演算に尽きるという見方もできるのである。

さまざまなコンピュータ

もっとも、別に数値計算が計算の中で特別な地位を占めているわけではない。たとえば河原で積み石する子どもたち、彼らも次のような条件下では立派な“コンピュータ”である：

- (i) 二つ以上の塔を同時に積み上げることができる、
- (ii) 塔は無限に高く積み上げることができる、
- (iii) 一定の規則に従って石を一つずつ積んだり取り除いたりできる、
- (iv) 塔に石が一つも積まれていない状態を判別できる(カウンターマシン)。

この他にも、やや毛並みは異なるが、次のような能力をもつタイル貼りの職人さんも、非常に強力な計算能力をもっていると言える。



(i) ジグソーパズルのピースのようにさまざまな凹凸をもつ何種類かのタイルが無制限に与えられている、

(ii) それらを隙間なく敷き詰めていくことができる、

(iii) もしもそのようにして無限に広い床(二次元平面)を覆い尽くすことができないときには、できないと判断できる(タイリング問題)。

数値計算に積み石にタイル貼り。このように計算にはさまざまな形態がある。先ほど計算とはコンピュータにできるものだといったが、だからといって特定の“コンピュータ”のハードウェアに捉われるべきではない。計算について論じるには、もっと抽象的なレベル、すなわちアルゴリズムのレベルで論じなければならない。

計算に限界はあるのか？

一昔前の SF に必ずといってよいほど登場していたお決まりの設定の一つに、「万能コンピュータ」というのがある。万能コンピュータは入力された質問に対して必ず正しい答を出してくれる。ゆえにひとたび万能コンピュータを完成させた人類は、あらゆる意思決定を彼女にゆだね、自らは怠惰と享楽にのみ生きるようになる。だがそのような世界には必ず破綻が訪れる、というのが SF ストーリーの王道であろう。

だがそれ以前に、そもそも「どのような質問にも正確に答えてくれる万能コンピュータ」などというものは果たして存在しうるのだろうか？ 誰でも予想できるように、もちろんそんなものは存在しない。しかし大事なはその理由である。それが存在しないのは、決して物理的限界のためでもなければ、感性やら創造性やらという人間特有の能力をコンピュータがもちえないからでもない。端的に言って、万能コンピュータという概念は論理的に矛盾しているからである。そのことを見るためには、仮にそのようなコンピュータが存在したとして、彼女(コンピュータ)に「あなたはこの質問に NO と答えますか？」と尋ねるところを想像してみればよい。彼女は YES と答えても NO と答えても自家撞着に陥ってしまう。

なんだか嘘くさい頓知話のようだが、このことは重要な帰結をもたらす。なぜならば、先の質問は厳密な数学の言葉で記述できるタイプの事柄だからである。コンピュータは一定のアルゴリズムに従って動作する。ゆえに「あなたはこの質問に NO と答えますか？」という問いは、「アルゴリズム A は質問 B が入力されたとき NO を出力するか」という形の問いと等しくなる。ここで質問 B とはこの質問自体のことである。これはイエスかノーかのどちらか一方に答が定まる厳密な問いであり、さまざまな数学的形式において表現することができる。

たとえば、ディオファントス方程式としても表現できるし、タイルを使っても表現できる。ということはつまり、万能コンピュータどころか、ディオファントス方程式に整数解があるかどうかを常に判定できるコンピュータも存在しなければ、タイル貼りの可能性について常に判定できるコンピュータも存在しないということになる。(ディオファントス方程式について言えば、解が存在することを確かめるためには $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ を逐次代入していけばよいのだが、これでは計算が無限に続いてしまう可能性がある。そして解が存在しないということを有限時間で見極めるのが難しいのである。)

ディオファントス方程式の整数解の存在、タイル貼り可能性、これらの事柄は計算によって常にイエス・ノーの答を出すことができるとは限らないのである。計算の限界は、意外と遠くないところにある。

人間はコンピュータに勝てないのか？

コンピュータの無謬性、高速性は圧倒的である。とうてい人間には勝ち目がありそうにない。しかしそれはコンピュータが最適なアルゴリズムに従って動いているときの話であり、コンピュータが己の高速性を過信してアルゴリズム的な精進を怠っている間は、人間にもついている隙がある。

たとえば、パズル雑誌によく出てくる一筆書き問題(図 1 参照)がある。何らかの線画が与えられたとき、それが一筆書きできるかどうかを判定せよ。いま、頂点の数が n 個ある線画が与えられたとする。すると辺の数は最悪の場合 ${}_nC_2 = n(n-1)/2$ 本である。これが一筆書きできるかどうかを何の工夫もなく力まかせに判定しようとすれば、最悪の場合 $({}_nC_2)!$ 通りある辺の並べ方をひとつひとつ調べて、一筆書きになっているかどうかを確かめることになる。たとえ辺の並べ方の一つについてチェックするのにほんの一瞬、たとえば 1 ナノ秒しかかからなかったとしても、すべての可能性を調べ尽くすには $({}_nC_2)!$ ナノ秒もかかってしまう。これは頂点の数が 8 を超えるときには 1 兆年以上となり、とうてい地球が滅亡するまでにはなしえないほどの計算量となる。たとえヒューリスティクスを駆使しても、頂点の数が 3 桁ともなればもうお手上げであろう。どんなに速いコンピュータを用いたとしても、このような素朴な方法を用いたのでは一筆書きの判定すら満足に行えないのである。

一方、かつてオイラーという賢い人間がいた。彼は与えられた線画が一筆書き可能かどうかを判定するためには別にしらみつぶ的な作業は必要ないことを発見した。代わりに各頂点に集まる辺の数を調べればよい。もしもすべての頂点につい

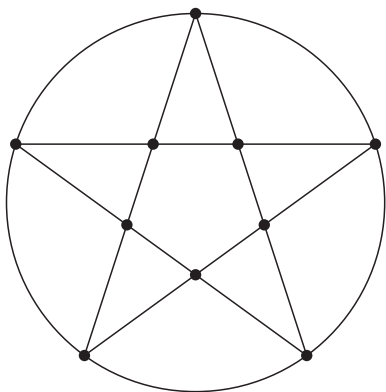


図1 ——一筆書き問題の例.

て、そこに集まる辺の数が偶数本ならば、線画は一筆書きができて、しかも元の頂点に戻ることができる。また、二つの頂点を除いて辺の数が偶数ならば、そのような線画もやはり一筆書きすることができる(その場合には元の頂点に戻ってくることはできない)。そうでない場合には、線画は決して一筆書きすることはできない。

頂点の数が n 個ある線画についてこの判定基準を適用すれば、たとえ一つの頂点について辺の数を数えるのに n 秒かかったとしても、全体でたかだか n^2 秒しかかからない。仮に頂点の数が 1000 個であっても、300 時間程度しかかからない。すなわち人間であっても十分に効率的に一筆書きの判定ができるのである。

だがコンピュータの性能は日を追うごとに向上している。いずれは力まかせの計算が人間の知的計算に追いつく日が来るのではないか、と思われるかもしれない。しかし、コンピュータの性能はたかだか線形的にしか向上しない。今年 n 時間で解けた問題が来年には $n/2$ 時間で解けるようになる、せいぜいその程度である。決して 2^n 時間かかったものが n 時間で解けるようになったりはしない。コンピュータの性能向上がそのような性格のものである限り、ある種の大規模な問題において力まかせの計算が知的計算を凌駕することは決してないと言える。

もちろんオイラーの知的アルゴリズムをコンピュータ上で実行すれば、もはや人間はかなわない。しかしこれを人間の敗北として捉えるべきではな

い。人間とコンピュータの協力の成果として捉えるべきである。人間がアルゴリズムを考案し、コンピュータがそれにもとづいて計算する。この協力関係こそが計算の自然なあり方なのである。もっとも、アルゴリズム考案の部分もコンピュータに自動的にやらせようという試みは当然あるだろう。しかし現時点ではその方面での研究成果は限定的であるし、その背後には根本的な困難もある。

高速化に限界はあるのか？

一筆書きの例から得られる教訓、それはコンピュータの性能向上は線形的にしか計算速度を上げないが、知的なアルゴリズムの発見は時に指数関数的な高速化につながる可能性があるということである。これは大いなる知性の勝利であると言ってよい。では、後者のような高速化は常に、どんな問題についても可能なのであろうか？ もし不可能なのだとしたらその限界は一体どこにあるのだろうか？

一筆書き問題を少し変えて次の問題を考えてみる。線画が与えられたとき、すべての辺を通らなくてもいいので、すべての頂点をちょうど一回ずつ通るような通り方があるかどうかを知りたい(ハミルトン路問題)。この問題も、力まかせに解こうとすれば天文学的な計算時間がかかる。そこで、これは一筆書き問題に非常に似た問題であるから、似たような知的アルゴリズムが存在するのではないかと期待したくなる。実際、多くの数学者がそのような期待をもって研究を行ってきた。だが、今のところそのような解法は見つかっていない。

先ほど挙げた分割問題についても、状況は同じである。いくつかの荷物が与えられたとき、それらを重さがちょうど同じになるように二つのスーツケースに詰めることはできるか？ これは人間にとって困難であるばかりでなく、コンピュータにとってもやっかいな問題であり、荷物の数が 3 桁になると、どんなに高速なコンピュータを用いても天文学的な時間を要するようになる。この問

題についても知的アルゴリズムはどうやら存在しそうでないのである。

そればかりか、ハミルトン路問題や分割問題をはじめとする数多くの問題がいわば一蓮托生であり、どれか一つにでも高速アルゴリズムが見つければ、その他全部についても高速アルゴリズムが存在するということがわかっている。このことが示唆するのは、これらの問題に高速解法がなかなか見つからないのは、個々の問題に特有の事情のせいではなく、すべての問題に共通する、もっと根本的な事情のせいだということである。現在、数学や計算機科学で話題を集めている未解決問題の一つに P v.s. NP 問題というものがある(本特集の野崎氏の解説参照)。これは大雑把に言えば、「これらの一蓮托生な問題群に対する高速アルゴリズムは存在するか」を問うものである。現在、大部分の研究者がそのような高速アルゴリズムは存在しないと信じている。技術による計算の高速化のみならず、知性による高速化にも限界がありそうだというのだ。しかし、そのことを数学的に厳密に証明しようとすると、なかなか難しいのである。ちなみにこの問いには現在 100 万ドルの懸賞金

がかけられている(http://www.claymath.org/millennium/P_vs_NP)。

* *

計算とは決して学校で習う数値計算(calculation)に尽きるものではない。一度実生活の場に出れば、そこでは実に幅広いタイプの計算(computation)が待っている。ある種のもはコンピュータにより高速に遂行することができるが、ある種のもはそうではない。コンピュータの性能向上による技術的高速化には限界があり、またどうやらアルゴリズムの改良による知性的高速化にも限界がありそうだ。

このような状況を打破するために、量子コンピュータのような新たなアイデアが登場し、実用化にむけて盛んに研究が進められている(本特集の根本氏の解説参照)。アルゴリズム論者やプログラマたちも、より知的で高速なアルゴリズムの考案・開発に余念がない。一方で計算量の専門家たちは高速化の限界を画定すべく努力している。

計算の世界の探究には、尽きるところがない。

イラスト 飯簀 薫