

ベッチ数が1の3次元多様体に対する LMO 不変量の精密化と摂動的な不変量

大槻 知忠 (京大 数理研)

3次元多様体の摂動的な不変量は、ホモロジー球面に対しては、量子不変量の(数論的な)摂動展開をもちいて定式化できることが知られている。さらに、すべての摂動的な不変量を統一する不変量としてLMO不変量という不変量が知られており、LMO不変量は、整ホモロジー球面を分類することが期待されるくらいに強力な不変量であることが知られている。一方、first Betti数が正の3次元多様体に対して、従来の手法では量子不変量を摂動展開することができなかった。また、first Betti数が正の3次元多様体のLMO不変量は、Alexander多項式等の「古典的な」不変量で表示されるような比較的弱い不変量であることが知られている。

この講演では、first Betti数が1の3次元多様体に対して、LMO不変量を精密化する方法を解説する。また、このクラスの3次元多様体に対して、摂動的な不変量を定式化する方法を解説し、量子 $SO(3)$ 不変量の(数論的な)摂動展開はその摂動的な不変量をもちいて記述されることを述べる。さらに、この精密化はこのクラスの3次元多様体に対して「古典的な」不変量よりもはるかに強い不変量であることを述べる。

記号について 以下では、 K は S^3 内の結び目とし、 M は K にそって S^3 を 0 surgery して得られる3次元多様体とし、 $\Delta(t)$ は K の Alexander 多項式 (M の Alexander 多項式に等しい) とする。一般に、first Betti 数が1の3次元多様体はそのような M であるとは限らないが、以下では簡単のため、そのような M について解説をする。

1 結び目の Kontsevich 不変量の loop 展開

次節でLMO不変量の精密化を定式化する準備として、この節ではKontsevich不変量のloop展開について述べる。

いくつかの頂点を辺でつないだ図形を**グラフ**といい、とくに、各頂点にはいる辺の本数が1本か3本のグラフを**1,3価グラフ**という。向きづけられた1次

元多様体 X について、1,3 価グラフで、1 価頂点は X 上にあり、各 3 価頂点のまわりの 3 つの辺に巡回順序が指定されているものを X 上の **Jacobi 図** という。 X 上の Jacobi 図がはるベクトル空間を次の 3 つの関係式 (**AS**, **IHX**, **STU 関係式**) でわってできる商ベクトル空間を $\mathcal{A}(X)$ とかく。

$$\text{loop} = - \text{cusp}, \quad \text{trivalent} = \text{Y-junction} - \text{X-junction}, \quad \text{edge} = \text{parallel} - \text{cross}.$$

図では X を太線で、1,3 価グラフを細線でかいている。 Jacobi 図の 1 価頂点と 3 価頂点の個数の和の $\frac{1}{2}$ 倍をその Jacobi 図の**次数**という。 1,3 価グラフで、各 3 価頂点のまわりの 3 つの辺に巡回順序が指定されているものを **open Jacobi 図** という。 open Jacobi 図がはるベクトル空間を AS, IHX 関係式でわってできる商ベクトル空間を \mathcal{B} とかく。 次で与えられる線型写像は同型写像になり、これを **Poincare-Birkhoff-Witt 同型 (PBW 同型)** とよぶ。

$$\chi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}(\downarrow) (\cong \mathcal{A}(S^1)), \quad \text{Diagram} \xrightarrow{\chi} \text{Diagram}$$

ここで、長方形は symmetrizer で、 n 本の線にかかる長方形は左の n 点と右の n 点をつなげる $n!$ 通りの平均を表す。

結び目の Kontsevich 不変量は次のように定義される。 \mathbb{R}^3 を $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ とみなし、結び目 K を高さに関する臨界点が有限個しかないようにその中におく (図 1)。 高さのパラメータ t_1, t_2, \dots, t_m をとり、各 t_i についてその高さにある K の点を 2 つえらび $z_i(t_i), z'_i(t_i)$ とおく。 このようなえらび方のことを**配置**という。 配置 P において各 t_i でえらんだ 2 点を K に対応する S^1 上で考えてこれを点線でむすぶと次数 m の S^1 上の chord 図 (3 価頂点を含まない Jacobi 図) がえられるが、それを D_P とかく。 このとき、反復積分をもちいて

$$Z(K) = (\text{正規化定数}) \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^m} \int_{t_1 \leq \dots \leq t_m} \sum_P (-1)^{\#P} D_P \prod_{i=1}^m \frac{dz_i - dz'_i}{z_i - z'_i}$$

により **Kontsevich 不変量** $Z(K) \in \mathcal{A}(S^1)$ が定義される ([Ko])。 定義より、 $Z(K)$ は chord 図の \mathbb{C} 係数無限線型和であるが、実際の値は \mathbb{Q} 係数になることが知られている。

べき級数 $f(\hbar) = c_0 + c_1\hbar + c_2\hbar^2 + c_3\hbar^3 + \dots$ に対して、 $f(\hbar)$ が edge につけられた Jacobi 図は次の線型和を意味する。

$$\left. \right)^{f(\hbar) = c_0} + c_1 \left. \right)^{\hbar} + c_2 \left. \right)^{\hbar} + c_3 \left. \right)^{\hbar} + \dots$$

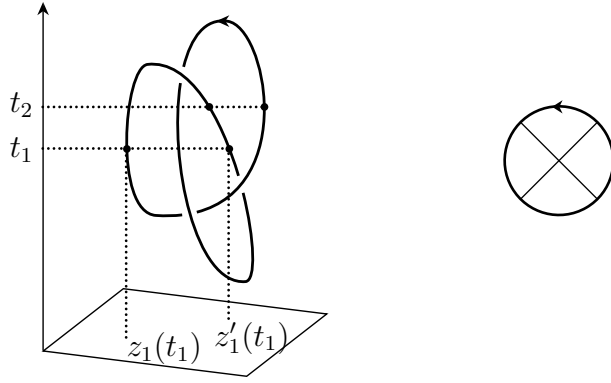


図 1: 配置の例とこれに対応する chord 図

first Betti 数が l である 1,3 価グラフからなる open Jacobi 図を l -loop であるという。結び目 K の Kontsevich 不変量 $Z(K)$ は多項式 $p_{i,j}(t) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ (ただし、 $t = e^h$) を用いて \mathcal{B} の元として次のように展開され、これを Kontsevich 不変量の **loop 展開** という [Ro2, Kr, GK]。

$$\log \left(\frac{\chi^{-1} Z(K)}{\chi^{-1} Z(O)} \right) = \underbrace{\left(\text{loop diagram} \right)}_{-\frac{1}{2} \log \Delta(t)} + \sum_{i \text{ 有限個}} \left(\frac{p_{i,1}(t)/\Delta(t)}{p_{i,3}(t)/\Delta(t)} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{同様に表示される} \\ \text{3-loop 以上の項} \end{array} \right)$$

ただし、 \mathcal{B} の積構造を Jacobi 図の排反和により定め、 \log はその積に関する \log である。

2 LMO 不変量の精密化

この節では、LMO 不変量の精密化 $Z(M)$ とその \log である $z(M)$ を定式化する。さらに、 M の Alexander 多項式が定数のとき、 $z(M)$ の l -loop の部分 ($l \leq 5$) から l 変数多項式不変量が導かれることを述べる。

t の有理式が edge につけられた marking つきの Jacobi 図を次のように定義する。まず、簡単な場合として、 t の単項式が edge につけられた Jacobi 図の場合は、marking の端点を各 t の右側につけて得られる Jacobi 図の和として marking つきの Jacobi 図を定義する。

$$\begin{array}{c} t \quad t^2 \\ \text{---} \end{array}^* = \begin{array}{c} t \quad t^2 \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} t \quad t \quad t \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} t \quad t^2 \\ \text{---} \end{array}$$

一般に、 t の有理式が edge につけられた Jacobi 図の場合は、各有理式に marking をつけて得られる Jacobi 図の和として定義する。

$$\begin{array}{c} \varphi \quad \psi \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \text{---} \quad \text{---} \end{array}^* = \begin{array}{c} \varphi \quad \psi \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \text{---} \quad \text{---} \end{array}^* + \begin{array}{c} \varphi \quad \psi \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \text{---} \quad \text{---} \end{array}^*$$

ここで、有理式につけられた marking の定義は、その有理式が t の単項式の場合は前述のように定義し、それ以外の場合は次式をみたすように前述の定義を自然に拡張することにより定義する。

$$\underbrace{fg}^* = \underbrace{f \quad g}^* + \underbrace{f \quad g}^*$$

定理 2.1 ([O8]). 次の $Z(M)$ は first Betti 数が 1 の 3次元多様体 M の位相不変量である。

$$Z(M) = \frac{\chi^{-1}Z(K)}{\chi^{-1}Z(O)} \sqcup \exp \left(\begin{array}{c} \frac{1}{2} \log \Delta(t) \\ \text{---} \end{array} \right) \\ \in \frac{\text{span} \left\{ \frac{1}{\Delta(t)} \mathbb{Q}[t^{\pm 1}] \text{ の元が edge につけられた 3 価グラフの Jacobi 図} \right\}}{\text{span} \left\{ -\frac{1}{2} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array}^* \right\}}$$

ここで、空間の分母は、 $\frac{1}{\Delta(t)} \mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ の元が edge につけられた 3 価グラフで marking をもつ Jacobi 図 D に対して表記の式で span される。

定理 2.2 ([O8]). 次の $z(M)$ は first Betti 数が 1 の 3次元多様体 M の位相不変量である。

$$z(M) = \log Z(M) \in \text{span} \left\{ \frac{1}{\Delta(t)} \mathbb{Q}[t^{\pm 1}] \text{ の元が edge につけられた } \right\} / \approx$$

連結な 3 価グラフの Jacobi 図

ここで、 \approx は

$$\alpha \approx \alpha + \frac{1}{2} \begin{array}{c} \frac{t+1}{t-1} - \frac{t\Delta'(t)}{\Delta(t)} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} D + \frac{1}{2} \begin{array}{c} \frac{t+1}{t-1} - \frac{t\Delta'(t)}{\Delta(t)} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} D^{(1)} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} D + \frac{1}{4} \begin{array}{c} t \frac{d}{dt} \left(\frac{t+1}{t-1} - \frac{t\Delta'(t)}{\Delta(t)} \right) \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} D \\ D \end{array} \\ + \begin{array}{c} \alpha^{(1)} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} D + \begin{array}{c} \alpha^{(1)} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} D^{(1)} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} D + \frac{1}{2} \begin{array}{c} \alpha^{(2)} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} D \\ D \end{array} + \dots$$

のような式で生成される同値関係である ($D^{(n)}, \alpha^{(n)}$ は D, α の「 n 階微分」で定義される。定義の詳細は [O8] 参照)。

2-loop の部分について 2-loop の部分空間は次の写像により多項式がはるベクトル空間に帰着される。

$$I : \text{span} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\Delta(t)} \mathbb{Q}[t^{\pm 1}] \text{ の元が edge につけられた} \\ \text{2-loop の 3 個グラフの Jacobi 図} \end{array} \right\} \longrightarrow \left(\frac{\mathbb{Q}[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}, t_3^{\pm 1}]}{(t_1 t_2 t_3 - 1)} \right)^{\mathfrak{S}_3 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})}$$

$$I \left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right) = \sum_{\substack{\varepsilon = \pm 1 \\ \{i,j,k\} = \{1,2,3\}}} p_1(t_i^\varepsilon) p_2(t_j^\varepsilon) p_3(t_k^\varepsilon)$$

ここで、対称群 \mathfrak{S}_3 は $\{t_1, t_2, t_3\}$ に置換で作用し、 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の非自明な元は (t_1, t_2, t_3) を $(t_1^{-1}, t_2^{-1}, t_3^{-1})$ にうつすことで作用し、 $(\dots)^{\mathfrak{S}_3 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})}$ はこの作用による不変部分空間を表す。とくに、

$$S_n = I \left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \right) = -2 \sum_{\{i,j,k\} = \{1,2,3\}} \left(\frac{t_i + 1}{t_i - 1} \Delta(t_i) - t_i \Delta'(t_i) \right) (t_j^n - t_j^{-n}) \Delta(t_k)$$

とおき、また、 $t_3 = t_1^{-1} t_2^{-1}$ において t_3 を消去する。すると、 $z(M)$ の 2-loop の部分は

$$L_2(M) = I(z(M) \text{ の 2-loop の部分}) \in \frac{\mathbb{Q}[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_3 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})}}{\text{span}\{S_n \mid n = 1, 2, \dots\}}$$

のように多項式で表示され、これを M の **2-loop 多項式** ということにする。

とくに、 M の Alexander 多項式が定数のとき、この商空間の表示は以下のようにしてさらに簡明になる。 $\hat{S}_n = (t_1 - 1)(t_2 - 1)(t_3 - 1)S_n$ において、

$$\hat{L}_2(M) = (t_1 - 1)(t_2 - 1)(t_3 - 1)L_2(M) \in \frac{\mathbb{Q}[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_3 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})}}{\text{span}\{\hat{S}_n \mid n = 1, 2, \dots\}}$$

とおく。射影

$$p_{\mathcal{R}} : \mathbb{Q}[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}] \longrightarrow \mathcal{R} = \text{span}\{t_1^n t_2^m \mid 0 \leq 2m \leq n\}$$

は、ベクトル空間の同型 $\mathbb{Q}[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_3 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})} \cong \mathcal{R}$ を与える。さらに、 \mathcal{R} は

$$\mathcal{R}_1 = \text{span}\{t_1^n t_2^m \mid 0 < 2m \leq n\}, \quad \mathcal{R}_2 = \text{span}\{t_1^n \mid n > 0\}$$

の直和に分解し、 $p_{\mathcal{R}}(\hat{S}_n) \in \mathcal{R}_2$ となることに注意して若干の計算をすると、次の同型が得られる。

$$\psi : \frac{\mathbb{Q}[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_3 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})}}{\text{span}\{\hat{S}_n\}} \xrightarrow{\cong} \mathcal{R}_1 \oplus \frac{\mathcal{R}_2}{\text{span}\{p_{\mathcal{R}}(\hat{S}_n)\}} \xrightarrow{\cong} \mathcal{R}_1 \oplus \mathbb{Q}$$

命題 2.3 ([O8]). $\psi(\hat{L}_2(M)) \in \mathcal{R}_1 \oplus \mathbb{Q}$ は、first Betti 数が 1 で Alexander 多項式が定数であるような 3 次元多様体 M の位相不変量である。

l -loop の部分 ($l \leq 5$) について 上の命題は、 $z(M)$ の l -loop の部分 ($l \leq 5$) に対して、次のように拡張される。Jacobi 図の空間の l -loop 部分空間から

$$\mathcal{R}^{(l)} = \text{span}\{s_0^{n_0} \cdots s_\ell^{n_\ell} \mid n_0 + \cdots + n_\ell = \ell(\ell+1)/2, n_0 > \cdots > n_\ell\} / \sim$$

(\sim は、 $s_0^{n_0} \cdots s_\ell^{n_\ell} \sim (-1)^{\ell(\ell+1)/2} s_0^{\ell-n_\ell} \cdots s_\ell^{\ell-n_0}$ で定められる)

に写像を適切に定義することができ、さらに、その部分空間を

$$\mathcal{R}_1^{(l)} = \text{span}\{s_0^{n_0} \cdots s_\ell^{n_\ell} \in \mathcal{R}^{(l)} \mid (n_i \leq 0 \text{ or } \ell \leq n_i) \text{ for all } i\}$$

のように定める。

命題 2.4 ([O8]). first Betti 数が 1 で Alexander 多項式が定数であるような 3 次元多様体 M に対して、 $z(M)$ の l -loop の部分 ($l \leq 5$) から、 $\mathcal{R}_1^{(l)} \oplus \mathbb{Q}$ に値をもつ M の位相不変量 (l 変数多項式不変量) を定義することができる。

予想として、「 $l \leq 5$ 」という仮定は不要かもしれない。この l 変数多項式不変量の各係数の値は M を適切に clasper surgery することにより任意に変えることができる。よって、「古典的な」不変量に比べて $z(M)$ ははるかに強力な不変量であることがわかる。

3 摂動的不変量

この節では、LMO 不変量の精密化 $Z(M)$ から weight system により導出される摂動的な不変量を colored Jones 多項式から定式化し、量子 $SO(3)$ 不変量の数論的な摂動展開はこの摂動的な不変量をもちいて記述されることを述べる。

結び目 K の colored Jones 多項式 $J_n(K; q) \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ は Kontsevich 不変量 $Z(K)$ から (\mathfrak{sl}_2, V_n) weight system により導出される (図 2)。ここで、 V_n は Lie 環 \mathfrak{sl}_2 の n 次元既約表現で、 (\mathfrak{sl}_2, V_n) を Jacobi 図に「代入」することにより Jacobi 図に数を対応させる写像を (\mathfrak{sl}_2, V_n) **weight system** という。

Kontsevich 不変量の loop 展開に (\mathfrak{sl}_2, V_n) weight system を適用することにより、結び目 K の colored Jones 多項式は、多項式 $P_\ell(t) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ を用いて次

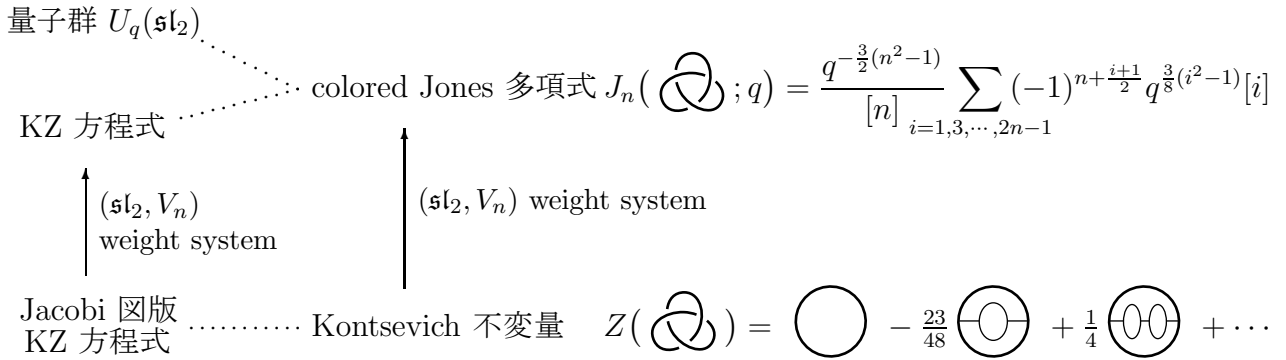


図 2: colored Jones 多項式 と Kontsevich 不変量

のように展開されることがわかり¹、この展開を colored Jones 多項式の **loop 展開** という [Ro1]。

$$J_n(K; q) = \frac{1}{\Delta(q^n)} + \frac{P_1(q^n)}{\Delta(q^n)^3}(q-1) + \frac{P_2(q^n)}{\Delta(q^n)^5}(q-1)^2 + \cdots$$

p を奇素数として、 $\zeta = \exp(2\pi\sqrt{-1}/p)$ 、 $[n] = (\zeta^{n/2} - \zeta^{-n/2})/(\zeta^{1/2} - \zeta^{-1/2})$ とおく。 M の量子不変量 $\tau_p^{SO(3)}(M)$ の値は $(\zeta - 1)$ のべき級数に次のように展開される。

$$\begin{aligned} \tau_p^{SO(3)}(M) &= (\text{正規化定数}) \cdot \sum_{\substack{1 \leq n < p \\ n \text{ は奇数}}} [n]^2 J_n(K; \zeta) \\ &\equiv (\text{定数}) \cdot \sum_{\substack{1 \leq n < p \\ n \text{ は奇数}}} (\zeta^n + \zeta^{-n} - 2) \left(\frac{1}{\Delta(\zeta^n)} + \frac{P_1(\zeta^n)}{\Delta(\zeta^n)^3}(\zeta-1) + \frac{P_2(\zeta^n)}{\Delta(\zeta^n)^5}(\zeta-1)^2 + \cdots \right) \\ &\equiv (\text{定数}) \cdot \sum_{\ell} \left(\frac{1}{p} \sum_{n \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \frac{(\zeta^n + \zeta^{-n} - 2) P_{\ell}(\zeta^n)}{\Delta(\zeta^n)^{2\ell+1}} \right) (\zeta - 1)^{\ell} \\ &\equiv (\text{定数}) \cdot \sum_{\ell} \left(\sum_{c=0, c_1, \dots, c_n} \left(\frac{1+c}{1-c} \right)^p \text{Res}_{t=c} \frac{(t+t^{-1}-2) P_{\ell}(t)}{t \cdot \Delta(t)^{2\ell+1}} \right) (\zeta - 1)^{\ell} \end{aligned}$$

ここで、 $c_1, c_1^{-1}, \dots, c_n, c_n^{-1}$ は $\Delta(t)$ の零点で、合同式は $(\zeta - 1)^{p-1}$ を modulo とする合同で、最後の合同式は次のことから導かれる（有限個を除く素数について成立する）。有理式 $\varphi(t) = f(t)/\Delta(t)^m$ ($f(t)$ は $f(t) = f(t^{-1})$ をみたす $t^{\pm 1}$

¹歴史的には、colored Jones 多項式の loop 展開 ([Ro1]) が先で、これをふまえて、Rozansky は Kontsevich 不変量の loop 展開を定式化した ([Ro2])。

の多項式) と素数 $p > \deg f(t) - m \deg \Delta(t)$ について、

$$\frac{1}{p} \sum_{n \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \varphi(\zeta^n) \equiv \sum_{c=0, c_1, \dots, c_n} \left(\frac{1+c}{1-c} \right)^p \operatorname{Res}_{t=c} \frac{\varphi(t)}{t} \pmod{(\zeta-1)^{p-1}}.$$

上の展開の係数部分の形をふまえて、 c における M の摂動的不変量 (c は 0 または $\Delta(t)$ の零点) を

$$\tau(M; c) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1+c}{1-c} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\operatorname{Res}_{t=c} \frac{(t+t^{-1}-2) P_{\ell}(t)}{t \cdot \Delta(t)^{2\ell+1}} \right) (q-1)^{\ell} \in \mathbb{C}[[q-1]]$$

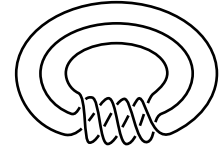
で定め、その係数を $\lambda_{\ell}(M; c)$ とおく。すなわち $\tau(M; c) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \lambda_{\ell}(M; c) (q-1)^{\ell}$.

定理 3.1 ([O7]). $\tau(M; c)$ は、first Betti 数が 1 の 3 次元多様体 M の位相不変量である。

例 3.2. (a, b) トーラス結び目にそって S^3 を 0 surgery して得られる 3 次元多様体 M について、

$$\tau(M; 0) = \begin{cases} -\frac{1}{2}q & \text{if } (a, b) = (2, 3), \\ 0 & \text{その他,} \end{cases}$$

$$\tau(M; c) = -\frac{(1-c^{-1})^2}{2\Delta'(c)} q^{(a-a^{-1})(b-b^{-1})/4}.$$



(5, 3) トーラス結び目

ここで、 c は $\Delta(t) = \frac{(t^{ab/2} - t^{-ab/2})(t^{1/2} - t^{-1/2})}{(t^{a/2} - t^{-a/2})(t^{b/2} - t^{-b/2})}$ の零点である。

注意 3.3. M の Alexander 多項式が 1 のとき、葉廣和夫氏と Thang Le 氏は、筆者と独立に、異なる方法で、 M の摂動的不変量を構成している。

摂動的不変量 $\tau(M; c)$ の性質

命題 3.4. $\Delta(t)$ の零点 c について、 $\tau(M; c) = \tau(M; c^{-1})$.

命題 3.5. 有理ホモロジー球面 N について

$$\tau(M \# N; c) = \tau(M; c) \tau(N) |H_1(N; \mathbb{Z})|.$$

ここで、 $\tau(N) \in \mathbb{Q}[[q-1]]$ は N の摂動的 $SO(3)$ 不変量 ([O1]) である。

命題 3.6.

$$\lambda_0(M; 0) = \begin{cases} 1 & \text{if } \deg \Delta(t) = 0, \\ -\frac{\Delta(1)}{\Delta''(1)} & \text{if } \deg \Delta(t) = 1, \\ 0 & \text{if } \deg \Delta(t) > 1. \end{cases}$$

c が $\Delta(t) = 0$ の重複度 $m (\leq 2)$ の根であるとき、

$$\lambda_0(M; c) = \begin{cases} \frac{(1-c^{-2})\Delta(1)}{2\Delta'(c)} & \text{if } m = 1, \\ \left(\frac{2(c+1)}{c^3} + \frac{(c^{-2}-1)\Delta'''(c)}{3\Delta''(c)} \right) \frac{\Delta(1)}{\Delta''(c)} & \text{if } m = 2. \end{cases}$$

命題 3.7 (clasper surgery formula). 結び目 K にそって S^3 を 0 surgery してできる 3次元多様体を M とし、 M をある種の graph clasper C にそって surgery してできる 3次元多様体を M_C とするとき、

$$\lambda_\ell(M_C; c) - \lambda_\ell(M; c) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1+c}{1-c} \operatorname{Res}_{t=c} \frac{2^{\ell+2}(t^{1/2}-t^{-1/2})^3}{t \Delta(t)} e_x^T (t^{1/2}V - t^{-1/2}V^T)^{-1} e_y,$$

$$\lambda_k(M_C; c) = \lambda_k(M; c) \quad \text{for any } k < \ell.$$

ここで、 V は K の Seifert matrix で、 e_x, e_y は K の Seifert surface と C からきまるベクトルである。

とくに、命題 3.5, 3.7 より、 $\tau(M; c)$ は「古典的な」不変量よりはるかに強力な不変量であることがわかる。

量子 $SO(3)$ 不変量の (数論的な) 摂動展開

まず、有理ホモロジー球面 N に対する量子 $SO(3)$ 不変量 $\tau_p^{SO(3)}(N)$ の数論的な摂動展開 ([O1]) について復習する。 p を奇素数とし、 $\zeta = \exp(2\pi\sqrt{-1}/p)$ とおく。 $\tau_p^{SO(3)}(N) \in \mathbb{Z}[\zeta]$ であること ([M]) が知られており、

$$\tau_p^{SO(3)}(N) = a_{p,0}(N) + a_{p,1}(N)(\zeta - 1) + a_{p,2}(N)(\zeta - 1)^2 + \cdots$$

のように整数 $a_{p,\ell}(N)$ を用いて $\tau_p^{SO(3)}(N)$ の値を展開することができる。この展開は unique ではないが、

$$T(q) = \frac{q^p - 1}{q - 1} = \binom{p}{1} + \binom{p}{2}(q - 1) + \binom{p}{3}(q - 1)^2 + \cdots + \binom{p}{p}(q - 1)^{p-1}$$

とおくと $\mathbb{Z}[\zeta]$ は $\mathbb{Z}[q]/T(q)$ と同型であることより、 $(a_{p,\ell}(N) \bmod p) \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ は $\tau_p^{SO(3)}(N)$ の値から unique に定まる。任意の素数 $p \geq \max\{2\ell+3, |H_1(N; \mathbb{Z})|\}$ について

$$a_{p,\ell}(N) \equiv \left(\frac{|H_1(N; \mathbb{Z})|}{p} \right) \lambda_\ell(N) \pmod{p}$$

をみたすような $\lambda_\ell(N) \in \mathbb{Z}[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{m}]$ (ここで $m = \max\{2\ell+1, |H_1(N; \mathbb{Z})|\}$) が存在することを以前に筆者 [O1] は示し、 N の摂動的不変量を

$$\tau(N) = \lambda_0(N) + \lambda_1(N)(q-1) + \lambda_2(N)(q-1)^2 + \dots \in \mathbb{Q}[[q-1]]$$

で定義した。とくに、その最初の2つの係数は

$$\lambda_0(N) = \frac{1}{|H_1(N; \mathbb{Z})|}, \quad \lambda_1(N) = \frac{6\lambda(N)}{|H_1(N; \mathbb{Z})|} \quad (\lambda(N) \text{ は Casson-Walker 不変量})$$

のように表示されることが、[M] の結果を用いることにより、わかる。量子不変量 $\tau_p^{SO(3)}(N)$ の値を $(\zeta-1)$ で展開したときの係数 $(\bmod p)$ を p によらない不変量でかくことができる、ということがポイントである。

first Betti 数が 1 の 3次元多様体 M に対する量子 $SO(3)$ 不変量の値について、同様の展開を考えてみよう。技術的な理由により、次の仮定をおく。

仮定 (1) M は S^3 から結び目 K にそった 0 surgery で得られる。²

(2) M の Alexander 多項式 $\Delta(t)$ は多重零点をもたない。

先と同様に $\tau_p^{SO(3)}(M)$ の値を $(\zeta-1)$ で展開しその係数を $a_{p,\ell}(M)$ とおくと、 $(a_{p,\ell}(M) \bmod p)$ は $\tau_p^{SO(3)}(M)$ の値から unique にきまるので、 $a_{p,\ell}(M) \in \mathbb{F}_p$ とみなすことにする (\mathbb{F}_p は位数 p の体)。さらに、数列 $(a_{p,\ell}(M))_{p: \text{素数}}$ を

$$\mathbb{F} = \prod_{\text{素数 } p} \mathbb{F}_p / \bigoplus_{\text{素数 } p} \mathbb{F}_p$$

の元とみなす。すなわち、有限個を除く素数 p について $b_p = b'_p$ であるとき $(b_p) \sim (b'_p)$ であるとする同値関係のもとで、数列 $(a_{p,\ell}(M))_{p: \text{素数}} \in \prod_{\text{素数 } p} \mathbb{F}_p$ の同値類を考える。 \mathbb{F} は \mathbb{Q} 上のベクトル空間になることに注意する。定理 3.1 の前に $\tau_p^{SO(3)}(M)$ を計算した式により

$$a_{p,\ell}(M) \equiv (\text{定数}) \cdot \sum_{c=0, c_1, \dots, c_n} \left(\frac{1+c}{1-c} \right)^p \text{Res}_{t=c} \frac{(t+t^{-1}-2) P_\ell(t)}{t \cdot \Delta(t)^{2\ell+1}} \pmod{p}$$

²そもそもこの原稿では「説明を簡単にするために」この仮定をおいていたが、とくにここ以下の部分では「技術的な理由により」この仮定が必要である。その「理由」とは、 $P_\ell(t)$ が整数係数であることが現時点ではこの場合にしか示されていないことによる。

とかくことができるが、 $\Delta(t) = \prod_i (1 - \alpha_i z)$ (where $z = t + t^{-1} - 2$) とおいて $\text{Res} \dots$ の部分を展開すると、

$$a_{p,\ell}(M) \equiv (\text{定数}) + \sum_i \left(\frac{1+c_i}{1-c_i} \right)^{p-1} (\alpha_i \text{の多項式}) \pmod{p}$$

となることがわかる。さらに、 $\epsilon_i = \frac{1+c_i}{1-c_i}$ とおくと (このとき $4\alpha_i + 1 = \epsilon_i^2$)、数列 $(a_{p,\ell}(M))_{p:\text{素数}} \in \mathbb{F}$ は

$$1, \quad \left(\sum_{i=1}^n \epsilon_i^{p+1} \right)_{p:\text{素数}}, \quad \left(\sum_{i=1}^n \epsilon_i^{p+3} \right)_{p:\text{素数}}, \quad \dots, \quad \left(\sum_{i=1}^n \epsilon_i^{p+2n-1} \right)_{p:\text{素数}}$$

の線型和になっていることがわかる。

この形の数列 ($\in \mathbb{F}$) は次の “Tamagawa map”

$$\left(\sum_{i=1}^n \epsilon_i^{ap+b} \right)_{p:\text{素数}} \longmapsto \sum_{i=1}^n \epsilon_i^a \otimes \epsilon_i^b \in \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$$

を用いて identify することができ、とくに、この map は次のベクトル空間の同型を与える (この map の構成と同型は玉川安騎男氏による)。

$$\text{span}_{\mathbb{Q}} \left\{ \left(\sum_{i=1}^n \epsilon_i^{ap+b} \right)_p \mid a+b \text{ は偶数} \right\} \Big|_{\mathbb{F}} \xrightarrow{\cong} \text{span}_{\mathbb{Q}} \left\{ \sum_{i=1}^n \epsilon_i^a \otimes \epsilon_i^b \mid a+b \text{ は偶数} \right\} \Big|_{\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}}$$

よって、数列 $(a_{p,\ell}(M))_{p:\text{素数}}$ は Tamagawa map により

$$-\frac{1}{2} \sum_{c=0,c_1,\dots,c_n} \frac{1+c}{1-c} \otimes \text{Res}_{t=c} \frac{(t+t^{-1}-2)P_{\ell}(t)}{t \cdot \Delta(t)^{2\ell+1}} \in \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$$

にうつされる。すなわち、Tamagawa map を経由して、

$$\tau(M) = \sum_{c=0,c_1,\dots,c_n} \frac{1+c}{1-c} \otimes \frac{1-c}{1+c} \tau(M; c) \in (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C})[[q-1]]$$

が量子不変量 $\tau_p^{SO(3)}(M)$ の数論的な摂動展開を記述しているとみなすことができる。(とくに、 $\tau(M)$ が M の位相不変量であることは $\tau_p^{SO(3)}(M)$ の位相不変性より (定理 3.1 を使わなくても) わかる。)

参考文献

- [GK] Garoufalidis, S., Kricker, A., *A rational noncommutative invariant of boundary links*, *Geom. Topol.* **8** (2004) 115–204.
- [Ko] Kontsevich, M., *Vassiliev’s knot invariants*, *Adv. in Sov. Math* **16(2)** (1993) 137–150.
- [Kr] Kricker, A., *The lines of the Kontsevich integral and Rozansky’s rationality conjecture*, math.GT/0005284.
- [LMO] Le, T.T.Q., Murakami, J., Ohtsuki, T., *On a universal perturbative invariant of 3-manifolds*, *Topology* **37** (1998) 539–574.
- [Les] Lescop, C., *Global surgery formula for the Casson-Walker invariant*, *Annals of Math. Studies* **140**, Princeton University Press, 1996.
- [M] Murakami, H., *Quantum $SO(3)$ -invariants dominate the $SU(2)$ -invariant of Casson and Walker*, *Math. Proc Camb. Phil. Soc.* **117** (1995) 237–249.
- [O1] Ohtsuki, T., *A polynomial invariant of rational homology 3-spheres*, *Invent. Math.* **123** (1996) 241–257.
- [O2] ———, *The perturbative $SO(3)$ invariant of rational homology 3-spheres recovers from the universal perturbative invariant*, *Topology* **39** (2000) 1103–1135.
- [O3] ———, *Quantum invariants, — A study of knots, 3-manifolds, and their sets*, *Series on Knots and Everything* **29**. World Scientific Publishing Co., Inc., 2002.
- [O4] ———, *Equivariant quantum invariants of the infinite cyclic covers of knot complements*, “Intelligence of Low Dimensional Topology 2006”, *Series on Knots and Everything* **40**, World Scientific Publishing Co., Inc.
- [O5] ———, *Invariants of knots derived from equivariant linking matrices of their surgery presentations*, preprint, 2006.
- [O6] ———, *On the 2-loop polynomial of knots*, *Geometry and Topology* **11** (2007) 1357–1475.
- [O7] ———, *Perturbative invariants of 3-manifolds with the first Betti number 1*, preprint, 2007. RIMS-1630, <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~tomotada/papers.html>
- [O8] ———, *A refinement of the LMO invariant for 3-manifolds with the first Betti number 1*, in preparation.
- [O+] T. Ohtsuki (ed.), *Problems on invariants of knots and 3-manifolds*, *Invariants of knots and 3-manifolds (Kyoto 2001)*, 377–572, *Geom. Topol. Monogr.* **4**, *Geom. Topol. Publ.*, Coventry, 2004.
- [Ro1] Rozansky, L., *The universal R -matrix, Burau representation, and the Melvin-Morton expansion of the colored Jones polynomial*, *Adv. Math.* **134** (1998) 1–31.
- [Ro2] ———, *A rational structure of generating functions for Vassiliev invariants*, Notes accompanying lectures at the summer school on quantum invariants of knots and three-manifolds, Joseph Fourier Institute, University of Grenoble, org. C. Lescop, June, 1999.

〒 606-8502 京都市左京区北白川追分町 京都大学数理解析研究所
E-mail: tomotada@kurims.kyoto-u.ac.jp