On the 11/8-conjecture

Mikio FURUTA

Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo

概 要

A survey of some topics around the 11/8-conjecture is given.

1. The 11/8-conjecture for closed spin 4-manifolds and its partial solutions.
2. The 5/4-conjecture for closed even 4-manifolds and its partial solutions.
3. The cohomotopy refinement of the Seiberg-Witten invariant.
4. Floer homotopy types.
5. Floer K-groups.

1 11/8 予想

本講演は，4 次元スピン閉多様体の交叉形式をめぐる話題についてサーヴェイを行うことを目的とする．

単連結な 4 次元閉多様体の，唯一のホモトピー不変量は，コホモロジー環の積構造である．この場合，積構造の非自明な部分は交叉形式

$$q : H^2(X, \mathbf{Z}) \times H^2(X, \mathbf{Z}) \to \mathbf{Z}, \qquad q(a, b) := \langle a \cup b[X] \rangle$$

によって与えられる．Poincarè 双対性によると，q を表示する整数成分をもつ対称行列は可逆になる．

Freedman によって証明された著名な定理によって，位相多様体のカテゴリーにおいてはこのような全ての行列は単連結 4 次元閉多様体の範囲で実現されることが知られている．さらに，同定理によって，行列の対角成分がすべて偶数の場合 (even type) には 1 通り，対角成分に奇数が存在する場合 (odd type) には 2 通りの同相類の可能性があることが知られている．

しかし，可微分多様体のカテゴリーにおいては，このような行列であって，単連結 4 次元閉多様体の範囲では実現されないものが存在することが，古くから Rochlin の定理によって知られていた．すなわち，even type の行列が単連結な 4 次元有向閉

多様体の交叉形式として実現されるためには，その行列の符号数が 16 によって整除されることが必要である．

以下すべて，可微分多様体のカテゴリーでのみ考える．

Donaldson によって 単連結な 4 次元有向閉多様体の交叉形式として実現される odd type 行列は，可能な行列は適当に座標を選ぶとき，対角成分に ± 1 をもつ対角行列となるものに限ることが示された [5]．逆に，そのような行列は CP^2 とその向きを変えたもののいくつかの連結和によって実現される．

また，Donaldson によって， 単連結な 4 次元有向閉多様体の交叉形式として実現される even type 行列は適当に座標を選ぶとき,（必要なら向きを変えて符号数を 0 以下としておけば）

$$2pE_8 \oplus qH$$

の形に書くことができ，$q = 0, 1, 2$ であれば不等式 $3p \leq q$ が成立することが示された．ここで E_8 は (1) 階数 8 (2) 負定値 (3) even type (4) 行列式 1 の対称行列である．このような E_8 は座標変換の自由度を除いて一意に存在することが知られている．また，H は (1) 階数 2 (2) 符号数 0 (3) even type (4) 行列式 -1 の対称行列である．このような H もは座標変換の自由度を除いて一意に存在する．

しかし，そのような行列が単連結な 4 次元有向閉多様体の交叉形式として実現されるかどうかは明らかではない．

実は，Donaldson の定理は，単連結ではなくとも，$H_1(X, \mathbf{Z}$ が 2-torsion を持たなければ成立する．この条件のもとでは,「even type」 は 「スピン」と同値である．また，Rochlin の定理は，単連結ではなくとも，スピンであれば成立する．

一方,（単連結な）4 次元閉多様体をダイナミックに切り貼りを通じて理解しようとするとき，ホモロジー 3 球面を境界とする 4 次元コンパクト多様体の可能性を考察することは基本的であろうと思われる．

交叉形式の可能性とダイナミックな切り貼りの両者を結びつけて考察したのが松本幸夫氏 [24] であった．その考察から浮かび上がったのが次の予想であった．

X の 2 次 Betti 数を $b_2(X)$ とおき，X の符号数を $\sigma(X)$ とおく..

Conjecture 1. （11/8 予想）X が 4 次元スピン閉多様体であるならば

$$\frac{b_2(X)}{|\sigma(X)|} \geq \frac{11}{8}$$

が成立する．

すでに使われた $2pE_8 \oplus qH$ に現れる記号 p, q を用いるなら，上の予想の不等式は $3p \leq q$ と同値である．これは Donaldson が特別な場合に示した不等式であった．

非自明な 4 次元多様体を系統的に数多く構成し，しかもそれらの性質をつぶさに調べることは，今なおそう簡単なことではない．

この予想は，スピン多様体の符号数と $b_2(X)$ についてなにか予想を立てろといわれて，単に，手持ちの 4 次元多様体のリストを眺めて，とりあえず述べることであったら難しくはない．その意味で，ほぼ同時期に同様のことを脳裏に巡らせた研究者は他にも当然いたであろう．しかし,「この不等式の成立と不成立とのせめぎあう限界点

が，ホモロジー 3 球面に対する諸考察と構成上の困難を，集約的に理解するための鍵になっている」という視点を提示するのは，それとは別のことである．松本幸夫氏が行ったのはまさにそのような考察であった．

Remark 2. 11/8 不等式は，4 次元多様体が代数曲面である場合は Miyaoka-Yau 不等式と関連する．シンプレクティック多様体の場合の geography については [28] 参照．Einstein 計量を許す多様体の場合の geography については [16], [18] 参照．

11/8 予想の部分的解決としては，次の評価を示すことができる．

Theorem 3. [10] (10/8 定理) X が 4 次元スピン閉多様体であるならば

$$\frac{b_2(X)}{|\sigma(X)|} \geq \frac{10}{8} \left(= \frac{5}{4}\right).$$

が成立する．

証明の方針は 4 次元スピン閉多様体の不変量を Seiberg-Witten 方程式を用いて定義することである．この不変量は，あるホモトピー集合の要素となる．その集合は，上の不等式が充たされないとき，空集合になることが示される．よって，上の不等式が充たされないと矛盾が生じる．

この議論は，群作用，とくに 2 ベキ位数巡回群の作用がある場合についても平行して拡張することが可能である．先駆的には徳井秀光氏の修士論文 [32] において，この手の考察がなされ，応用として characteristic surface の種数の下からの評価が与えられた．Bryan [4] ではこの考察が拡張されている．群作用のある場合への拡張については，ほぼ同様の方法によるほぼ同様の結果が Kim [17],Lee-Li[21],Fang [8] によって得られている．

2　5/4 予想

4 次元有向閉多様体 X がスピンであるためのひとつの必要条件は，交叉形式が even になることである．すでに述べたように，この条件は $H_1(X, \mathbf{Z})$ が 2-torsion を持たないとき（特に X が単連結であるとき）十分条件でもある．しかし，$H_1(X, \mathbf{Z})$ が 2-torsion を持つときは,「スピンではないが，交叉形式は偶」となる可能性がある．

実際，スピンではないが交叉形式は $E_8 \oplus H$ であり，even である 4 次元閉多様体が存在する．この例では，

$$\frac{b_2(X)}{|\sigma(X)|} = \frac{5}{4}$$

となっている．次の予想は「5/4 予想」とよばれている．

Conjecture 4. （5/4 予想）4 次元有向閉多様体 X の交叉形式が *even* であるとき，不等式

$$\frac{b_2(X)}{|\sigma(X)|} \geq \frac{5}{4}$$

が成立する．

この予想は未解決である．Lee-Li [21] 及び Bohr [3] による部分的結果が知られている．それらは「不等式を弱めれば成立する」といった類の部分的結果ではなく，「ある付帯条件のもとに予想された不等式が成立する」という類のものである．基本的に，議論の筋道は1通りである：このような X は適当な（2ベキ指数の）ガロア被覆をとるとスピンになる．したがって，前節の最後に述べたような，群作用がある場合の 10/8 定理の同変版を考察することによって，アプローチが（ある程度）可能となるのである．良い性質をもった被覆が存在するための条件が「付帯条件」となる．そのため，いくつかある部分的結果を一律に要約はできないが，ここでは Bohr の結果を紹介する．

Theorem 5. （Bohr）[3] X が4次元有向閉多様体であり，交叉形式が *even* であるとする．さらに，X の基本群が *amenable* であれば不等式

$$\frac{b_2(X)}{|\sigma(X)|} \geq \frac{5}{4}$$

が成立する．

たとえば，X の基本群が有限群，あるいはアーベル群であれば上の定理の仮定（の後半）を充たしている．この定理の証明において，Bohr は，良い性質をもつ有限ガロア被覆の存在を示すために，Gromov の結果を援用している．他に Bohr は，$b_2(X)$ のかわりに $\dim_{\mathbf{Z}/2} H^2(X, \mathbf{Z}/2)$ や L^2-Betti 数を用いた評価を得ている．

ナイーヴに考えるなら，X の普遍被覆に対して，$\pi_1(X)$ 同変な方程式として Seiberg-Witten 方程式を考察することが最も一般的に思われる．しかし，無限被覆に対して 10/8 タイプの不等式を導く議論を拡張することは，そもそも枠組みの定式化からして困難である．線型の楕円型方程式については，Atiyah の Γ 指数定理が知られている．しかし，それに相当する議論が非線型偏微分方程式である Seiberg-Witten 方程式に対してそもそも可能であるのかどうかは現在全く知られていない．

Remark 6. Kronheimer [19] では，3次元多様体 Y に対して，$Y \times S^1$ 上の Seiberg-Witten 方程式の解が存在するかどうか直接にはわからない状況においても，$Y \times \mathbf{R}$ 上の Seiberg-Witten 方程式の解が存在することを示すことができる状況が考察されている．これは非常に興味深い事態でありなんらかのヒントになるかもしれない．(さらに憶測を述べさせていただくなら，Kronheimer のこの議論は，あるいは Fan-Jost [6] で考察されているサイクルと関連するかもしれない．このあたりを明瞭にすることは興味深いと思われる.)

3　$b_1 > 0$ の場合

亀谷幸生，松江広文氏と筆者は，10/8 定理が特別な場合に改良されることを見た [13]. B. Schmidt はより一般的な形で 10/8 定理の不等式を若干改良した（[31] 参照．また南範彦氏の [25] にも同様の，より包括的考察がある.）また，亀谷幸生氏と筆者は一連の共同研究によって，10/8 定理の証明のテクニックをさらに改良した（[12] 等）．

実は，これらの改良は，係数 10/8 を 11/8 に近づけるものではなく，数値としての改良は瑣末なものともいえる．しかし，亀谷氏と筆者にとって，その改良のひとつの目的は，$b_1 > 0$ である 4 次元スピン多様体の交叉形式の考察にあった．

単連結な 4 次元閉多様体においてはホモトピー型は交叉形式によって決定される．しかし，単連結でないときには，もちろんそうではない．問題を次のように一般化してみる．

Problem 7. 4 次元スピン閉多様体のコホモロジー環として実現される環の可能性を枚挙せよ．

この問題は「コホモロジー環の同型類をどのように記述するか」という定式化のレベルにおける難しさを持つ．

より簡略化した問題として，次の問いを考えてみる．カップ積は，線型写像 $q_1 : \wedge^4 H^1(X,\mathbf{Z}) \to H^4(X,\mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$ を誘導する．ここで $H^1(X,\mathbf{Z})$ は加群として $\mathbf{Z}^{b_1(X)}$ と同型であることに注意する．よって，この同型と双対をとる操作を経由するなら，q_1 は $\wedge^4\mathbf{Z}^{b_1(X)}$ の要素とみなすことができる．

Problem 8. $q_1 \in \wedge^4\mathbf{Z}^{b_1(X)}$ が与えられたとき，これを実現するような 4 次元スピン閉多様体 X 全体に対して $b_2(X)/|\sigma(X)|$ の下限を求めよ．

11/8 予想が意味しているのは，どのような q_1 に対しても，少なくとも 11/8 はひとつの下限であろう，という予想である．上の予想は，さらに精密に，q_1 に応じて，よりよい下限が存在するのではないか，と問うものである．

ひとつの自明な注意をしておく．もし $q_1 \neq 0$ であれば，

$$\wedge^2 H^1(X,\mathbf{Z}) \to H^2(X,\mathbf{Z})/\mathrm{torsion}$$

の像は $\{0\}$ ではあり得ない．これはとくに，$b_2(X) > 0$ を意味する．これは $H^1(X,\mathbf{Z})$ 上のカップ積が $H^2(X,\mathbf{Z})$ の構造に影響を，代数的に必然的に，及ぼす例である．

代数的条件だけからは判定できないような例に次がある．

Theorem 9. [14]（—， 亀谷, 松江，南）X_0 をホモロジー $S^2 \times S^2$ とする．$T^4 \# K3$ は，どんな X_1 に対しても，決して $X_0 \# X_1$ とは可微分同相ではない．

$X = T^4 \# K3$ の交叉形式は $2E_8 \oplus 6H$ に等しい．交叉形式の構造だけ見るなら，交叉形式 H および $2E_8 \oplus 5H$ をもつふたつの 4 次元有向閉多様体 X_0, X_1 の連結和であったとしても特に矛盾はない．ここでさらに $b_1(X_0) = 0, b_1(X_1) = 4$ となるカップ積構造を想定することも可能である．Rochlin の定理とも矛盾しないし，また 11/8 予想とも矛盾しない．

しかし，X_1 上で Seiberg-Witten 方程式を考察すると，この想定から矛盾が導かれることが示される．

理論的には，$b_1(X) > 0$ の場合の Seiberg-Witten 方程式の考察は，4 次元多様体の族の考察と平行する．というのは，$b_1(X) > 0$ の場合には，トーラス $H^1(X,\mathbf{R})/H^1(X,\mathbf{Z}) \cong T^{b_1(X)}$ によってパラメータ付けられた非線型微分作用素の族を考察する必要が生じるからである．

上の定理の証明の方法は，当初，ある種のボルディズム不変量を構成し，それをモジュライ空間の特異点のリンクに対して計算することによって，示された．このボルディズム不変量のために，[14] では Pin ボルディズムの拡張等，多様体の位相幾何における準備を行い，そのちょっと大掛かりな道具をモジュライ空間に対して適用した．しかし，道具立てが大掛かりな割りには，その適用範囲は狭い．具体例としては，2 個以下の T^4 と，いくつかの $K3$ との連結環に対して拡張されるくらいである．

一方，スピンボルディズムによる情報は，次元が低い場合には KO 群による情報を等価であることがよく知られている．ならば，KO 群を計算することによって，より包括的な考察が可能であってもおかしくない．

これが最終的に亀谷氏のアイディアによって遂行されるまでには，テクニックの積み重ねと紆余曲折が必要であった．亀谷氏の定式化は Problem 8 に直接答える形でなされている．しかし，ここでは，その簡単な場合だけを紹介することにする．

Theorem 10. （亀谷）次の仮定をおく．

1. $b_1(X) = 4m$
2. X の q_1 が T^4 を m 個連結和したものの q_1 と「同型」である．
3. $\sigma(X) \leq 0$
4. $$\frac{b_2(X)}{2} + \frac{\sigma(X)}{4} - 4m \equiv 2, 6 \bmod 8$$

以上の仮定のもとで，不等式

$$\frac{b_2(X)}{4} + \frac{3\sigma(X)}{16} \geq m + 2$$

が成立する．

なお，Seiberg-Witten 方程式の族の考察については Ruberman の [29]，中村信裕氏の [26] がある．

4　不変量

既に述べたように，10/8 定理は，4 次元スピン多様体の不変量のある種の不変量の構成の系と理解することができる．その際，不変量の住処はある種のホモトピー集合であり，このホモトピー集合は自然な群構造をもたない．とりあえずは単に，集合である．

この不変量の定義に，スピンの仮定は必ずしも必要ではない．$Spin^c$ 構造のみあれば十分である．しかも $Spin^c$ 構造に対する不変量が住むホモトピー集合は，($b_2^+ \geq 2$ のとき）自然に加群の構造をもつ．この加群から $\mathbf{Z}$ への自然な準同型（本質的に Hurewitz 準同型）が存在し，不変量の像は，その $Spin^c$ 構造に対する通常の Seiberg-Witten 不変量と一致している．

ホモトピー集合に住む不変量は，Seiberg-Witten 方程式から，いわば「無限次元のホモトピー論」ともいえる考察によって引き出せるもっとも普遍的な不変量ではあるが，取り合えず定義できるだけであって，このままでは絵に描いた餅のようなものである．

不変量の定義は，要するに，Seiberg-Witten 方程式を無限次元空間の間の同変写像だとみなし，それを有限次元近似することによって，その同変写像の「ホモトピー類」を定義するものである．

Bauer は，筆者と独立に，この不変量を考察し，さらに，次の連結和公式を得た．X を 4 次元 $Spin^c$ 閉多様体であるとき，この不変量を $SW(X)$ と書くことにする．

Theorem 11. ([1] S. Bauer) $SW(X_0 \# X_1) = SW(X_0) * SW(X_1)$

上に書いた公式は模式的なものである．まず，不変量の住処を同定しなくてはこの公式は意味を持たないが，ここでは詳細は省かせていただく．ただ，右辺の $*$ 記号は,「ジョイン」を表すことのみ記す．

この公式によって，特別な場合にこの不変量が計算される．特別な場合ではあるが，通常の Seiberg-Witten 不変量より強力である例を与えるには十分であった．($b_2^+ > 0$ であるふたつの多様体の連結和の形をしていると，そもそも通常の Seiberg-Witten 不変量は 0 になる.)

この不変量の直接計算は，上記の連結和公式が適用可能である場合以外は，難しい．というのは，そもそも，不変量の住処の記述が簡単ではないからである．

笹平裕史氏は [30] において，この普遍的な不変量から，スピンボルディズム群の要素として，より簡明な不変量を定義し, $b_1(X) > 0$ である場合にも有効であるひとつの方法を提示した．ラフにいうなら，モジュライ空間が自然なスピン構造を持つとき，モジュライ空間から $T^{b_1(X)}$ への射影が与える，$T^{b_1(X)}$ のスピンボルディズム群の要素である．

5 Floer ホモトピー型

11/8 予想は，松本幸夫氏の考察が示すように，境界のある 4 次元多様体の考察を経ることによって，その含意が十全に明かにされると想像される．

現在，境界のある多様体に対しては，この立場からは十分理論は展開されていない．ある限られた状況で得られた結果がいくつかあるのみである（上正明氏の講演参照）．

その本質的な理由は，境界として現れる 3 次元閉多様体を一般的に扱う枠組みがまだ完成していないからといえよう．

4 次元閉多様体の通常の Seiberg-Witten 不変量に対応するものとして，3 次元閉多様体に対しては Seiberg-Witten 方程式を利用して Floer ホモロジーが定義されている．(以下，SW Floer ホモロジーと書くことにする.)

SW Floer ホモロジーの定義以前[1]に，4 次元閉多様体の Donaldson 不変量に対応

[1] これに関しては現在 Kronheimer-Mrowka による本が執筆されているときく．

するものとして，3 次元閉多様体に対しては $SU(2)$ASD 方程式を利用して Floer ホモロジー（インスタントン ホモロジー）が定義されていた．両者は，基本的には平行した議論によって定義される．

しかし，11/8 予想の部分的解決に使われたのは，通常の Seiberg-Witten 不変量ではなく，それを改良したホモトピー論的不変量，あるいは少なくとも K 理論的不変量であった．

すると，3 次元閉多様体の不変量として必要となるものも，通常の Floer ホモロジーではなく，それを改良したホモトピー論的不変量，あるいは少なくとも K 理論的不変量であると思われる．

このような「SW Floer ホモトピー型」は，Manolescu [22] によって $b_1 = 0$ の場合に，そして Kronheimer-Manolescu[20] によって $b_1 > 0$ の場合にもある制約条件のもとで定義された．この制約条件については次節で説明する．

また，Manolescu は，SW Floer ホモトピー型を用いることによって，Bauer の連結和公式を 4 次元 $Spin^c$ 閉多様体が（S^3 に限らず）ホモロジー 3 球面によって 2 つにカットされる場合に拡張した [23].

一方，3, 4 次元多様体に対する理論として，現在，特に応用上，極めて強力な理論として知られているのが Ozsvath-Szabò による Heegaard ホモロジー群等の理論である．[27] 現在のところ，いわば現象論的に，SW Floer ホモロジーと同等であろうと予測されている．この理論と Seiberg-Witten 理論との原理的な関係が明らかになることは望ましい．

単に，一般論として望ましいのみならず，もし原理的関係が明らかになれば，SW 不変量の（コ）ホモトピー版が，Ozsvath-Szabò の文脈ではどのように理解できるかが興味あるからである．あるいは Ozsvath-Szabò の方法において 11/8 予想にアプローチすることが可能になるはずである．

Ozsvath-Szabò 理論においては，シンプレクティック Floer ホモロジーの変種が用いられている．この変種の Floer ホモトピー型に相当するものが現れるであろうことが予期されよう．

なお，一方，U. Frauenfelder によって，シンプレクティック Floer ホモロジーと密接にかかわるモーメント Floer ホモロジー」(symplectic vortex 方程式と関連して定義される）に対して，ある条件のもとで Floer ホモトピー型が構成されている [9]. これがいかなる情報を担っているのかは，まだ明らかにされていない．

一般のシンプレクティック Floer ホモロジーを Floer ホモトピー型へ「格上げ」しようと試みるとき，困難はバブルの存在である．これについては，次の注で簡単に述べるに留める．

Remark 12. 1. 無限次元の Morse 理論が次数 「$1/2\infty+$ 有限」においてあらわれる幾何学的例としては，対応する不変量の名前でいえば，Donaldson 不変量，Seiberg-Witten 不変量，Gromov-Witten 不変量の 3 種がある．これまで言及されていないのは，Donaldson 不変量にかかわるインスタントン Floer ホモロジーである．

2. Donaldson 理論においては，バブルをいかに扱うか，という問題が，立ちはだかっている．Donaldson 不変量の（コ）ホモトピー版を構成する試みにおいて

も同様である．Pontrjagin-Thom 構成を経由すると，ここでは，モジュライ空間の（Uhlenbeck コンパクト化よりも）精密なコンパクト化の構成が鍵になると思われる．一般的には，シンプレクティックの場合のほうが，コンパクト化の構成はよりよく理解されている．しかし，バブルの扱いに対する決定的な解決法はいまだ開発されていない．

6 Floer K 群

前節では，Kronheimer-Manolescu による Floer ホモトピー型の構成のためには，与えられた 3 次元 $Spin^c$ 閉多様体には制約条件が必要である，と述べた．

この制約条件は,「有限次元近似をあるパラメータを伴う族として行うとき，すべてのパラメータにおいて一斉に両立するように有限次元近似することが可能であるか？」というナイーヴな問いの答えが必ずしも YES ではないことから生じる．

4 次元においては，有限次元近似の対象となるのは，空間の間の写像であった．3 次元においては，有限次元近似の対象となるのは，空間自身である．実際には，有限次元近似として得られるのは，空間ではなく，代数トポロジーでいう「懸垂スペクトラム」となる．スペクトラムは,「座標のないスペクトラム」として定義するのが自然であるが,「座標のないスペクトラム」の定義には，あらかじめ universe と呼ばれる可算次元ベクトル空間を固定する必要がある．この universe が今の場合，パラメータとともに変化し，それが「ねじれる」現象があらわれる．この「ねじれ」が Floer ホモトピー型の構成の障害となるのである [11].

現在，このねじれをこめて Floer ホモトピー型を定義する定式化は完成していない．

2003 年に筆者は Manolescu から次の質問を受け，即答できなかった．

- Ozsvath-Szabò の Heegaard Floer homology は SW Floer homology と同型であると信じられている．しかし，前者は，任意の 3 次元多様体に対して定義される．一方，後者は，$b_1 > 0$ のときには，すぐには定義できないように思われる．
- というのは，Floer ホモトピー型の定義を行うのに必要な universe が（前節で述べたように）ねじれているからである．
- より詳しくいうと，次のようになる．空間のホモロジー群とは，その空間に付随する suspension spectrum から Eilenberg-Maclane spectrum への射（のホモトピー類）の全体と一致する．しかし，ことなるねじれ方をした universe に付随する spectrum 間の射は，そもそも定義の仕様がないように思われる．
- たとえば，T^3 がその例であるがこれに対する Heegaard Floer homology は，Seiberg-Witten 理論の何に相当するものであろうか？

なお，そもそも T^3 の例は筆者が与えたものであった．

今は，この質問に次のように答えることができると思う．

- ねじれた universe に対して「向き」の概念を定義することが可能である．ordinary homology の意味での向き，あるいは K 理論における向き，である．（一般化も可能であるが，ここではこの 2 種に限定しよう）

- Ordinary homology の意味で「向き付けられた」universe に対しては，その universe に付随する Eilenberg-Maclane spectrum を定義することが可能である．
- K 理論の意味で「向き付けられた」universe に対しては，その universe に付随する K-spectrum を定義することが可能である．
- Seiberg-Witten 理論においてあらわれるねじれた universe は，ordinary homology の意味においても，また，K 理論の意味においても「向き付け可能」である．
- したがって,「SW Floer ホモロジー」,「SW K 群」は常に「定義」可能である．
- しかし，他の一般コホモロジーに対しては，そうはいえない．たとえば,「SW KO 群」はいつでも「定義」されるわけではない．

(改めて強調しておくと，ねじれた universe を用いて SW Floer ホモトピー型を定義することはまだ理論的に整備されていない．したがって，上の observation も，現在は，ある種の見とおしに留まっているにすぎない.)

また，Frauenfelder による考察によって，Seiberg-Witten 理論以外の無限次元 Morse 理論に対して，Floer ホモトピー型の定義が可能であることが示されたが，そのような場合に universe の向き付け可能性もこめて考察することはおそらくは基本的な問題である．

Symplectic 幾何において Floer K 群を厳密に定義することは，Givental のある考察に厳密な基礎付けを与えようとする牛腸徹氏の試み [15] を支持することになると思われる．

一方，初めの 4 次元トポロジーへの応用に立ちかえると，10/8 定理の証明には K 理論が有効であったこと．したがって，SW K 群の定義可能性は，境界のある 4 次元スピン多様体に対してその議論を拡張できる可能を示唆するものである．

松本幸夫氏が考察した，境界のある 4 次元多様体の交叉形式の可能性は，決して単に，どこからか降ってきた微分方程式の理論を適用して考察される一問題ではなく，おそらくは，このような代数的トポロジーの基本的概念の整備までをも要求する基本的な問題として，今後もひとつの里程標の役割を果たすかと，筆者には思われる．

参考文献

[1] S. Bauer *A stable cohomotopy refinement of Seiberg-Witten invari- ants: II*, Inv. Math. to appear.

[2] S. Bauer and M. Furuta, *A stable cohomotopy refinement of Seiberg- Witten invariants: I*, Inv. Math. to appear.

[3] C. Bohr, *On the signatures of even* 4*-manifolds*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 132, 453–469 (2002)

[4] J. Bryan, *Seiberg-Witten theory and* $Z/2^p$ *actions on spin* 4*-manifolds* . Math. Res. Lett. 5, 165–183 (1998)

[5] S. K. Donaldson *An application of gauge theory to four dimensional topology*, J. Diff. Geom. 18, 279–315 (1983)

[6] H. Fan and J. Jost *Conley Index Theory and Novikov-Morse Theory* math.GT/0312018.

[7] S. K. Donaldson, *Connections, cohomology and the intersection forms of* 4-*manifolds*, J. Diff. Geom. 24 , 275–341 (1986)

[8] F. Fang, *Smooth group actions on* 4-*manifolds and Seiberg-Witten theory*, Differential Geom. Appl. 14 (2001), no. 1, 1–14.

[9] U. Frauenfelder, *Finite dimensional approximation for the symplectic vortex equations*, preprint 2004.

[10] M. Furuta, *Monopole equation and the* $\frac{11}{8}$*-conjecture*. Math. Res. Lett. 8, 279–291 (2001)

[11] M. Furuta Fredholm universes 「Hodge 理論, 退化, 複素曲面の代数幾何とトポロジー 」(2004 年 3 月 東北学院大学) 報告集，準備中

[12] M. Furuta, Y. Kametani, *The Seiberg-Witten equations and equivariant e-invariants*, preprint, 2001,

[13] M. Furuta, Y. Kametani, H. Matsue, *Spin* 4-*manifolds with signature=—32*, Math. Res. Lett. 8, 293–301 (2001)

[14] M. Furuta, M, Y. Kametani, H. Matsue, and N. Minami,*Stable-homotopy Seiberg-Witten invariats and Pin bordisms*, preprint, 2001

[15] T. Gocho, *Loop space and equivariant cohomology*, preprint (Japanese, written by K. Yamasaki based on Gocho's lectures)

[16] M. Ishida and C. LeBrun, *Spin manifolds, Einstein metrics and differential topology*, Mathematical Research Letters, 9 (2002) 229-241.

[17] J.-H.Kim, *On spin* $Z/2^p$*-actions on spin* 4-*manifolds*, Topology Appl. 108, 197–215 (2000)

[18] D. Kotschick *Monopole classes and Einstein metrics*, International Mathematics Research Notices, 2004:12 (2004) 593-609.

[19] P. B. Kronheimer *Minimal genus in* $S^1 \times M^3$, Invent. Math. 135 (1999), 45–61.

[20] P. B. Kronheimer and C. Manolescu, *Periodic Floer pro-spectra from the Seiberg-Witten equations*, preprint, math.GT/0203243.

[21] R. Lee and T.-J. Li, *Intersection forms of non-spin four manifolds*, Math. Ann. 319, 311–318 (2001)

[22] C. Manolescu, *Seiberg-Witten-Floer stable homotopy type of three-manifolds with* $b_1 = 0$, preprint, math.DG/0104024.

[23] C. Manolescu, *A gluing theorem for the relative Bauer-Furuta invariants*, math.GT/0311342.

[24] Y. Matsumoto, *On the bounding genus of homology* 3*-spheres*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 29 (1982), no. 2, 287–318.

[25] N. Minami, *The G-join theorem - an unbased G-Freudenthal theorem*, preprint.

[26] N. Nakamura, *The Seiberg-Witten equations for families and diffeomorphisms of* 4*-manifolds*, Asian J. Math. 7 (2003), no. 1, 133–138.

[27] P. Ozsvath and Z. Szabò *Holomorphic disks and topological invariants for closed three-manifolds*, Ann. of Math., to appear.

[28] J .Park, *The geography of Spin symplectic* 4*-manifolds*, Math. Z. 240 (2002), no. 2, 405–421.

[29] D. Ruberman, *Positive scalar curvature, diffeomorphisms and the Seiberg-Witten invariants*, Geom. Topol. 5 (2001), 895–924 (electronic).

[30] H. Sasahira, *spin structures on the Seiberg-Witten moduli spaces*, preprint 2004.

[31] B. Schmidt Ph.D thesis, 2003 Bielefeld University.

[32] H. Tokui, *The genus of characteristic surfaces in four-manifolds and the compactness of a moduli space of the Seiberg-Witten equation*, M.Sc Thesis, 1997 January, University of Tokyo.

Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo, Tokyo 153-8914, Japan (furuta@ms.u-tokyo.ac.jp)