A functor on the category of bottom tangles in homology handlebodies*

Kazuo Habiro†

Dedicated to Professor Yukio Matsumoto for his 60th birthday

Abstract. We explain the definition of a category $\bar{\mathcal{B}}$ of *bottom tangles in homology handlebodies*. We give a set of generators of $\bar{\mathcal{B}}$ as a monoidal category. We will give a very rough description of a functor defined on $\bar{\mathcal{B}}$ associated to the quantized enveloping algebra $U_h(sl_2)$.

1 はじめに

各 1 の巾根 ζ に対して, 有向閉 3 次元多様体 M の sl_2 Witten-Reshetikhin-Turaev 不変量 $\tau_\zeta(M) \in \mathbb{C}$ が定義されている [13, 11]. 与えられた多様体 M に対して, $\tau_\zeta(M)$ たちがどのような値を取るうるか, ζ を動かしたときにどのような振る舞いを示すか, というような問いは自然である.

以下, M は整係数ホモロジー球面であるとする. (簡単のため, 以下の記述においては, 整係数ホモロジー球面以外の閉 3 次元多様体や sl_2 以外の Lie 代数への一般化については省略する.) H. Murakami[9] は, ζ の位数が奇素数ならば, $\tau_\zeta(M) \in \mathbb{Z}[\zeta]$ となることを示した. T. Ohtsuki[10] は, 奇素数位数の ζ に対する $\tau_\zeta(M)$ たちから, 巾級数に値を持つ不変量 $\tau(M)$ (Ohtsuki series と呼ばれている) を抽出した. R. Lawrence[7] の予想 (L. Rozansky[12] により証明された) により, $\tau(M) \in \mathbb{Z}[[q-1]]$ である. ここで q は不定元であり, q に奇素数巾位数の ζ を代入することにより, $\tau_\zeta(M)$ が得られる. この意味で, $\tau(M)$ は奇素数巾位数の ζ に対する $\tau_\zeta(M)$ を統一したものであると考えることができる.

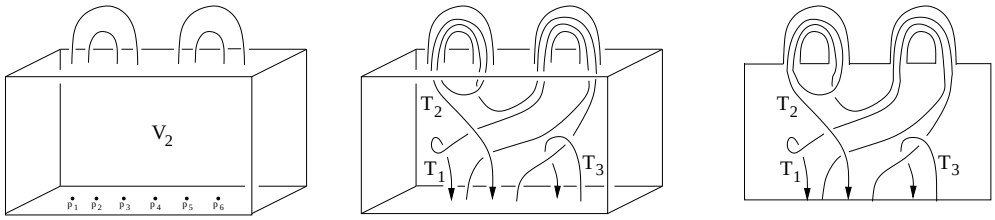
筆者 [3, 5] は, 多項式環 $\mathbb{Z}[q]$ の完備化

$$\widehat{\mathbb{Z}[q]} = \varprojlim_n \mathbb{Z}[q]/((1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n))$$

に値を持つ, 整係数ホモロジー球面の不変量 J_M を定義した. J_M に任意の 1 の巾根 ζ を代入することにより, $\tau_\zeta(M)$ が得られるという意味で, J_M はすべての ζ に対する $\tau_\zeta(M)$ を

*Talk that will be delivered at the workshop "多様体のトポロジーの未来へ" (Towards the Future of the Topology of Manifolds) at Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo on November 11, 2004.

†Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University



(a) (b) (c)

図 1: (a) V_m と $p_1, \ldots, p_{2n}$ $(m=2, n=3)$. (b) V_2 内の 3 成分タングル $T = T_1 \cup T_2 \cup T_3$. (3) T の射影.

統一したものであると考えることができる. [1] この結果からの帰結については, [3] を参照されたい.

この講演では, 曲面のある種のコボルディズムに対する, 上記の不変量 J_M の一般化について説明する.

2 ホモロジーハンドルボディ内の底タングルのなす圏 $\bar{\mathcal{B}}$

このセクションでは圏 $\bar{\mathcal{B}}$ [2] を定義する.

図 1(a) のように立方体 $[0,1]^3$ に m 本のハンドルをつけて得られる種数 m のハンドルボディを V_m で表す. $i\colon \partial V_m \hookrightarrow V_m$ を包含写像とする. 種数 m のホモロジーハンドルボディとは, 3 次元多様体 M と向きを保つ同相写像 $j\colon \partial V_m \cong \partial M$ の組 (M, j) で, 同型 $h\colon H_1(V_m;\mathbb{Z}) \cong H_1(M;\mathbb{Z})$ で, 次の図式を可換にするものが存在するようなものとする:

$$\begin{array}{ccc} H_1(\partial V_m;\mathbb{Z}) & \xrightarrow{j_*} & H_1(\partial M;\mathbb{Z}) \\ {\scriptstyle \mathrm{incl}_*}\downarrow & & {\scriptstyle \mathrm{incl}_*}\downarrow \\ H_1(V_m;\mathbb{Z}) & \xrightarrow{h} & H_1(M;\mathbb{Z}). \end{array}$$

$m, n \geq 0$ とする. V_m の「底面」に点 $p_1, p_2, \ldots, p_{2m}$ を図 1(a) のようにとる. 以下では, 種数 m のホモロジーハンドルボディ (M, j) のなかの n 成分の底タングルとは, M の中の向きづけられ順序付けられた n 成分のフレーミング付きタングル $T = T_1 \cup \cdots \cup T_n$ で, 各 $i = 1, \ldots, n$ に対して, 成分 T_i が $j(p_{2i})$ を出発し, $j(p_{2i-1})$ で終わっているようなものである. たとえば, 図 1(b) を見よ. 簡単のため, このようなタングルを図 1(c) のように射影を描くことにより表す. 以下では, いわゆる blackboard framing convention に従う.

種数 m のホモロジーハンドルボディと n 成分の底タングルの二つの組 $((M, j), T)$ と $((M', j'), T')$ が同値であるとは, 同相写像 $f\colon M \cong M'$ が存在して, $j' = (f|_{\partial M})j$ が成り

[1] 自然な準同型 $\widehat{\mathbb{Z}[q]} \to \mathbb{Z}[[q-1]]$ は単射であり, これは J_M を $\tau(M)$ に移す. よって, $\tau(M)$ はすべての 1 の巾根 ζ に対する $\tau_\zeta(M)$ の情報を含んでいることがわかる.

[2] この圏 $\bar{\mathcal{B}}$ は, [4] において簡単な定義を与える予定.

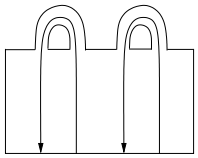


図 2: 恒等射 1_m $(m=2)$

立ち, さらに $T'=f(T)$ がフレーミングも込めて成り立つことである. 以下では, このような組とその同値類をしばしば言葉の上で混同する. $m,n\geq 0$ に対して, $\bar{\mathcal{B}}(m,n)$ を, 種数 m のホモロジーハンドルボディと n 成分の底タングルの組の同値類からなる集合とする.

$((M,j),T)\in\bar{\mathcal{B}}(l,m)$ と $((M',j'),T')\in\bar{\mathcal{B}}(m,n)$ の合成 $((M',j'),T')((M,j),T)=(M'',j'',T'')\in\bar{\mathcal{B}}(l,n)$ を次のように定義する. $N_T\subset M$ を T の管状近傍とし, $E_T\subset M$ を $M\setminus N_T$ の閉包とする. M'' は, N_T の「底面」(種数 m の穴空き曲面) と M' の「上面」を張り合わせることによって得られる. (この張り合わせにおいて, T のフレーミングが使われる.) $j''\colon \partial V_l\to M''$ は, $j\colon \partial V_l\to M$ と $M\subset M''$ の合成である. T'' は T' を包含 $T'\subset T''$ により, T'' 内の底タングルと見なしたものである.

$m\geq 0$ に対し, 恒等射 $1_m\in\bar{\mathcal{B}}(m,m)$ を図 2で定義する.

以上により, $\bar{\mathcal{B}}(m,n)$ たちが, 対象の集合を $\{0,1,2,\dots\}$ とする圏 $\bar{\mathcal{B}}$ をなす. $\bar{\mathcal{B}}$ は braided category の構造を持つが, ここでは省略する. [3]

注 1 $\bar{\mathcal{B}}$ から, 一つ穴空き曲面とそのあいだのコボルディズムのなす圏 $\mathcal{C}$ への自然な忠実関手がある. これは, $((M,j),T)$ を E_T により定義されるコボルディズムにうつす.

3 $\bar{\mathcal{B}}$ の生成射

定理 $\bar{\mathcal{B}}$ は monoidal category として次の射で生成される.

$$\psi,\psi^{-1}\colon 2\to 2,\quad \mu\colon 2\to 1,\quad \eta\colon 0\to 1,\quad \Delta\colon 1\to 2,\quad \epsilon\colon 1\to 0,$$
$$S,S^{-1}\colon 1\to 1,\quad v,v^{-1}\colon 0\to 1,\quad B^*\colon 3\to 0.$$

これらは図 3により定義される.

4 関手 $\bar{\mathcal{J}}$

$U_h(sl_2)$ を h 進完備な $\mathbb{Q}[[h]]$ 代数で生成元 H, E, F と関係式

$$HE=E(H+2),\quad HF=F(H-2),\quad EF-FE=\frac{K-K^{-1}}{v-v^{-1}}$$

[3] 講演では説明する予定.

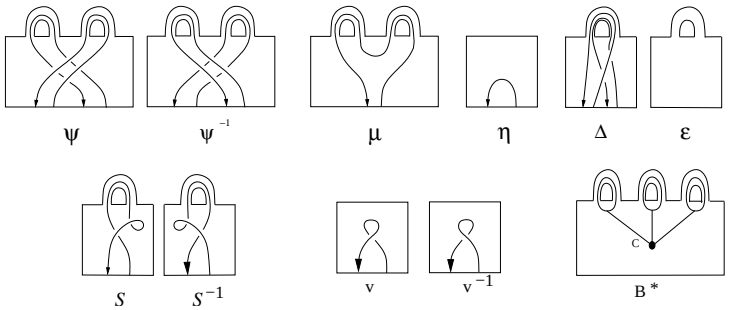


図 3: $\bar{\mathcal{B}}$ の生成射. ただし, $B^*: 3 \to 0$ はハンドルボディ V_3 をクラスパー [2] C に沿って手術することにより得られる.

により定義されるものとする. ただし, $v = \exp\frac{h}{2}$, $K = \exp\frac{hH}{2}$. $U_h(sl_2)$ は, リー環 sl_2 の量子包絡環と呼ばれている.

$q = v^2 = \exp h$ とおく. $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ を $\mathbb{Q}[[h]]$ の部分環とみなす. 完備化 $\widehat{\mathbb{Z}[q]}$ は $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ を含む $\mathbb{Q}[[h]]$ の部分環とみなすことができる.

ここでは定義を省略するが, $n \geq 0$ に対して, $\widehat{\mathbb{Z}[q]}$ 部分加群 $\mathcal{V}_n \subset U_h(sl_2)^{\hat{\otimes} n}$ が定義できて, 次が成り立つ.

定理 $\bar{\mathcal{B}}$ から $\widehat{\mathbb{Z}[q]}$ 加群のなす圏 $\mathrm{Mod}_{\widehat{\mathbb{Z}[q]}}$ への関手

$$\bar{\mathcal{J}}: \bar{\mathcal{B}} \to \mathrm{Mod}_{\widehat{\mathbb{Z}[q]}}$$

で, $\bar{\mathcal{J}}(n) = \mathcal{V}_n$ $(n \geq 0)$ となるものが定義できる.[4]

注 2 $\bar{\mathcal{J}}(0) = \widehat{\mathbb{Z}[q]}$ である. $M_0 \in \bar{\mathcal{B}}(0,0)$ とすると, M_0 は穴空きホモロジー球面であって, 対応するホモロジー球面を M とすると, $\bar{\mathcal{J}}(M_0): \widehat{\mathbb{Z}[q]} \to \widehat{\mathbb{Z}[q]}$ は, 元を J_M 倍する写像である. この意味で, $\bar{\mathcal{J}}$ は不変量 $J: \{\text{ホモロジー球面}\} \to \widehat{\mathbb{Z}[q]}$ の拡張である.

注 3 実は, $\bar{\mathcal{J}}$ は $\bar{\mathcal{B}}$ から, ある braided category $\mathcal{M}$ への braided functor として定義することができる. ここで, $\mathcal{M}$ の braided category 構造は, 左 $U_h(sl_2)$ 加群のなす圏のそれからひきおこされる. $\mathcal{M}$ には, $U_h(sl_2)$ の transmutation として得られる braided Hopf 代数構造によってひきおこされる braided Hopf 代数構造がある. $\bar{\mathcal{J}}$ は $\bar{\mathcal{B}}$ における braided Hopf algebra 構造 $(1, \mu, \eta, \Delta, \epsilon, S)$ を $\mathcal{M}$ におけるそれにうつす.

注 4 各 $m \geq 0$ に対して, $\bar{\mathcal{B}}(m,m)$ は種数 m の一つ穴空き曲面 $\Sigma_{m,1}$ の上のホモロジーシリンダーのなすモノイド [2][5] $\mathcal{H}_{m,1}$ を部分モノイドとして含んでいる. よって特に, $\Sigma_{m,1}$ の Torelli 群 $\mathcal{I}_{m,1}$ も含んでいる. さらに, $\bar{\mathcal{B}}(m,m)$ は J. Levine [8] により導入された La-

[4] $\bar{\mathcal{J}}$ の具体的な定義の仕方については, 時間的に可能であればもう少し詳しく言及する予定.
[5] そこでは, ホモロジーシリンダーは "homologically trivial homology cobordism" と呼ばれている.

grangian を保つ写像類群の部分群も含んでいる. 関手 $\bar{J}$ の制限として, これらのモノイドと群の表現が得られる.

参考文献

[1] L. Crane and D. Yetter, On algebraic structures implicit in topological quantum field theories, *J. Knot Theory Ramifications* **8** (1999), no. 2, 125–163.

[2] K. Habiro, Claspers and finite type invariants of links, *Geom. Topol.* **4**, 1–83 (2000).

[3] K. Habiro, On the quantum sl_2 invariants of knots and integral homology spheres, *Invariants of knots and* 3*-manifolds (Kyoto, 2001)*, Geom. Topol. Monogr., 4, 55–68 (2002).

[4] K. Habiro, *A subcategory of the tangle category and the universal tangle invariants*, in preparation.

[5] K. Habiro, *A unified sl_2 quantum invariant of integral homology spheres*, in preparation.

[6] T. Kerler, Bridged links and tangle presentations of cobordism categories, *Adv. Math.* **141**, no. 2, 207–281 (1999).

[7] R. J. Lawrence, Asymptotic expansions of Witten-Reshetikhin-Turaev invariants for some simple 3-manifolds, *J. Math. Phys.* **36** (1995), 6106–6129.

[8] J. Levine, Homology cylinders: an enlargement of the mapping class group, *Algebr. Geom. Topol.* **1** (2001), 243–270.

[9] H. Murakami, Quantum SU(2)-invariants dominate Casson's SU(2)-invariant, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **115** (1994), no. 2, 253–281.

[10] T. Ohtsuki, A polynomial invariant of integral homology 3-spheres. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **117** (1995), no. 1, 83–112.

[11] N. Reshetikhin and V. G. Turaev, Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups, *Invent. Math.* **103** (1991), no. 3, 547–597.

[12] L. Rozansky, *On p-adic properties of the Witten-Reshetikhin-Turaev invariant*, preprint, math.QA/9806075.

[13] E. Witten, Quantum field theory and the Jones polynomial, *Comm. Math. Phys.* **121** (1989), no. 3, 351–399.

.