Haefliger knots and the Smale invariant

2004年10月8日(金) 池田和正著

松本幸夫教授の60歳の誕生日に捧げます.

abstruct The new construction of Smooth (4k-1,6k)-Knots shows that their unknotting number is 1.

問題 以下の2つの問題に答えようとするのが動機である.

問題1. n 次元球面を S^n とおく. 埋め込み $f:S^p \to S^q$ のアンビエント・アイソトピー類を (q,p) 結び目と呼ぶことにする. $(6k,4k-1)$ 結び目において, PL カテゴリーでは自明なものしかないのに, 滑らかなカテゴリーでは $\mathbb{Z}$ 個の異なるものが存在する. その違いを端的に表す幾何的実体を探したい.

問題2. [Mo] において, Homology 3 球面 M の Casson 不変量が $\lambda(M) = \dfrac{d_f - \sigma_f}{8}$ と表現されている. ここで, f は $\hat{M} = M\#\mathbb{R}^3$ の接枠の指定, d_f は $\hat{M}$ 上の異なる2点の配位空間のコンパクト化 $\bar{C}^2(\hat{M}, f)$ の2次元コホモロジーの生成元の2乗が4次元コホモロジーの何倍になるかという量である. cohomological な Hopf 不変量の定義と同様の定義となっている. また, σ_f は $M\#M\#(-M)$ を境界とするある4次元多様体の指数である.

一方, [Ta] において, 滑らかなカテゴリーでの $(6k,4k-1)$ 結び目の Haefliger 不変量が $\Omega(F) = -\dfrac{1}{8}(\sigma(V^{4k}) + H_{\tilde{F}})$ と表されている. ここで, $\tilde{F}$ は, 埋め込み $F:S^{4k-1} \to S^{6k}$ をザイフェルト曲面 V^{4k} に拡張した写像 $\tilde{F}:V^{4k} \to S^{6k}$, $H_{\tilde{F}})$ は, $F(S^{4k-1}) \subset \tilde{F}(V^{4k})$ の外向き法ベクトル場が結び目の外部に定める写像のホモトピー類 $\in \pi_{4k-1}(S^{2k})$, $\sigma(V^{4k})$ は V^{4k} の指数である.

Casson 不変量と Haefliger 不変量の表示の類似の背景にある数学的構造が何なのかを知りたい.

本稿では, 上記問題に答える第1歩として, 次の定理を考える.

定理 滑らかな $(4k-1,6k)$ 結び目の結び目解消数は1である.

定義 埋め込み $f:S^{4k-1} \to S^{6k}$ の結び目解消数を次のように定義する. f を, 以下の条件を満たす正則ホモトピー f_t $(t \in [0,1])$ で動かす.

$f_0 = f$. f_t が有限の時刻 $t = t_1, \cdots, t_n$ 以外では埋め込みであり, $t = t_1, \cdots, t_n$ において, $f_t(S^{4k-1})$ が3重点以上を持たず, 2重点の集合が S^{2k-1} と可微分同相になる. f_1 は自明な結び目を表す. このようにして f を自明な結び目に直すことができるとき, n の最小値を f の結び目解消数と呼ぶことにする. 上記の条件を満

たすように自明な結び目にできないときは結び目解消数を ∞ と定義することにする.

証明の方針　[Ta] によって, 次の定理が知られている.

$M^{4k} = S^{2k} \times S^{2k} \setminus \mathrm{Int} D^{4k}$ とおく. 埋め込み $\tilde{E}_{a,b} : M^{4k} \to S^{6k}$ で, 法オイラー数が $(2a, 2b) \in H^{2k}(M^{4k}) \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ となるものを考える. $\tilde{E}_{a,b}$ を M^{4k} の境界である S^{4k-1} に制限したものを $E_{a,b}$ とおくと, その Haefliger 不変量は $\Omega(E_{a,b}) = -ab$ である.

[Ha1] により, Haefliger 不変量が滑らかな $(4k-1, 6k)$ 結び目を完全に分類する, つまり, Haefliger 不変量が等しい結び目は同じ結び目であることが知られている.

任意の整数 n に対して, Haefliger 不変量が n となる $(4k-1, 6k)$ 結び目結び目として, $\Omega(E_{1,-n})$ がある.

$S^{2k} \times D^{2k} \subset M^{4k}$ で, 埋め込み $\Omega(E_{1,-n})$ による像が法オイラー数 $(2, -2n) \in H^{2k}(M^{4k})$ の 2 を担っている部分を考える.

１回交叉変更することにより 0 にできる. 変更後の埋め込みは $\Omega(E_{0,-n})$ となり, Haefliger 不変量は 0. したがって, 自明な結び目となる. □

構成法　法オイラー数 $2n$ となる $S^{2k} \times D^{2k}$ の $\mathbb{S}^{6k}$ への埋め込みは S^{2k} から小さい開円板を抜いて得られる D^{2k} 上の各点に, $\mathbb{R}^{6k}$ 内で D^{2k} をひねって乗せて構成する. ただし, 底空間 D^{2k} の境界上ではひねりが出ないようにする.

具体的には, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R}^{2k} = \mathbb{R}^{6k}$, とおき,

$\mathbf{x} = r\mathbf{v}$ $(|\mathbf{v}| = 1, 0 \leqq r \leqq 1)$, と球面座標で表す.

このとき, $D^{2k} \times D^{2k}$ の $\mathbb{R}^{6k}$ への埋め込みを

$(\mathbf{x}, \mathrm{y}) \to (\mathbf{x}, (\cos 2n\pi r)\mathrm{y}, (\sin 2n\pi r)\mathrm{y})$ と定める.

$r = \dfrac{1}{4n}$ の部分で, $0 \times 0 \times \mathbb{R}^{2k} \subset \mathbb{R}^{6k}$ 方向に交叉変更することにより, $+1$ 半ひねりを -1 半ひねりにすることができる.

追加　$k=1$ の場合の結果が, お茶の水女子大学 大場清, お茶の水女子大学 村井美里によって, 独立に別の方法で得られている.

参考文献

[Cai] Stewwart S. Cairns, *The smoothability problem for manifolds*, 1963 年 5 月 25 日 日本数学会年会における総合講演.

[Cap] Sylvanin E. Cappell, *Embedding and immersions of four dimensional manifolds in* $\mathbb{R}^6$, Geometric Topology, Academic Press 1979.

[Co] Tim Cochran, *Embedding 4-manifolds in* S^5,Topology

[E] Tobias. Ekholm, *Differential 3-knots in 5-space with and without self-intersections*, Topology 40(2001) 157-196.

[ES] Tobias. Ekholm, András. Szücs, *Geometric formulas for Smale invariants of codimension two immersions*, Topology 42(2003) 171-196.

[Ha1] André. Haefliger, Knotted $(4k-1)$-spheres in $6k$-space, Ann. of Math.,Vol.75,No.3, (1962),452-466.

[Ha2] André. Haefliger, *Differentiable embeddings of S^n in S^{n+q} for $q > 2$*, Ann. of Math.,Vol.83,(1966),402-436.

[Hi] Morris W. Hirsch, *Obstruction theories for smoothing manifolds and maps*, Bull. of AMS.

[Hi] Morris W. Hirsch, *On imbedding differentiable manifolds in euclidean space*, Ann. of Math.,Vol.73,No.3, May,(1961),566-571.

[HM] John F. Hughes, Paul M. Melvin, *The Smale invariant of a knot*, Comment.Math.Helvetici 60(1985),615-627.

[Ka] 加藤十吉, 結び目同境理論の大域化 –松本幸夫氏による余次元 2 の手術理論–, 数学, 岩波書店.

[K1] M.A.Kervaire, *Nœds de dimensions supérieures*, Bull.soc.math.de France, Tome 93, 1965.

[K2] Michel.A.Kervaire, *On higher dimensional knots*, Differential and combinatorial topology

[KT] Greg Kuperberg and Dylan P. Thurston, *Perturbative 3-manifold invariants by cut-and-paste topology*, arXiv:math.GT/9912167,v2,10May2000.

[La] Richard K.Lashof, *A nonsmoothable knot*, Bull. of AMS., vol.77,No.4,July 1971.

[Le] J.Levine, *Unknotting spherers in codimension two*, Topology Vol.4,pp.9-16,1965.

[Mi] J.Milnor, *Spin structures on manifolds*, l'Enseignement math.2.S.,Tom. 9,'63.

[MK] Jhon W.Milnor, Michel A. Kervaire, *Bernoulli numbers, homotopy groups, and a theorem of Rohlin*, Proc.ICM. 1958.

[Mo] Tetsuhiro Moriyama, *Casson invariant and signature*, Intelligence of Low Dimensional Topology,16〜19Nov2003.

[Mu] 村井美里, *(6,3)* 型 *Heafliger Knot* を境界とする *4* 次元 *disk* の *7* 次元球体へのはめ込みについて, お茶の水女子大学 人間文化研究科 数理情報科学専攻,30Jan2004.

[Ru] Daniel Ruberman, *Imbedding four-manifolds and slicing links*, Math. proc. Camb. Phil. Soc.(1982), 91, 107.

[Sc] Martin Scharlemann, *Haefliger Non-PL imbeddings of 3-manifolds*, American J. of math. Vol.100, No.3, pp539-545. 1978

[Ta1] 高瀬将道, *Haefliger* 結び目の幾何公式, 第 50 回トポロジーシンポジウム於松本市,2003 年 7 月.

[Ta2] Masamichi Takase, *A Geometric formula for Haefliger Knots*, to appear in Topology.

[Z] E.C.Zeeman, *Twisting spun knots*, Ann. of math, 1965.