Knowing the topology of 3-manifolds

Sadayoshi Kojima (小島 定吉)
Tokyo Institute of Technology (東京工業大学)

概 要

The first half of this talk will survey a recent work of G. Perelman on the geometization of 3-manifolds, which implies a topological classification of 3-manifolds. Then, knowing the topology of 3-manifolds, we discuss a possible direction for understanding very deep mathematical structures behind the world where the 3-manifold plays.

1 3次元多様体の幾何化

Thurston による幾何化予想とは,

3次元多閉様体の連結和分解+JSJ 分解の各ピースには局所等質構造が入る

という命題である [3]．ここで局所等質構造とは，普遍被覆では等長群が推移的に作用するリーマン計量のことであり，3次元では8種類あることが知られている [3, 4]．単連結3次元閉多様体で局所等質構造を持つのは球面に限られるので，幾何化予想が正しければ,

単連結3次元閉多様体は球面とトポロジーが等しい

とするポアンカレ予想 [2, 8] も正しい．

じつは，幾何化予想は3次元多様体のトポロジーの分類を導く．簡単のため向き付け可能な場合に話を限定すると，幾何化予想が正しければ，任意の向き付け可能な3次元閉多様体は，トポロジカルには双曲多様体と Seifert 多様体と可解多様体をトーラス和および連結和することによって得られることになる．一方，このような分解は標準的であり，分解のピースが異なるか和の取り方を違えると，トポロジーが異なる多様体が生まれる．この仕組みはホモトピー群の言葉に翻訳でき ([6] を参照)，たとえば，ホモトピー同値な向き付け可能な既約閉多様体は，レンズ空間を除き互いにトポロジーが等しいことが分かる．とくに，すでによく理解されている例外を除けば，向き付け可能な既約閉多様体のトポロジーは基本群で決る．まったく一般にも，ホモトピー群という古典的な代数的不変量でそのトポロジーが概ね確定するのである．

基本群は非可換のため 2 次元での種数ほど明快な分類基準ではないが，たとえば「種数 2 以上の曲面云々」等に類似する表現が，対象を明確に指定する言葉として 3 次元多様体に対しても使えることになる．

昨年来，幾何化予想が Perelman により解決されたことが大きな話題になっている．歴史の節目を振り返ると，

1. Poincaré の予想 (1904)
2. Kneser による連結和分解の有限性 (1929)
3. Milnor による連結和分解の一意性 (1962)
4. Jaco-Shalen および Johannson による JSJ 分解理論 (1975)
5. Thurston による Haken 多様体の一意化と幾何化予想 (1977/80)

と続き，幾何化予想が提唱されて間もなく，Hamilton によるリーマン幾何的立場からの研究が始まる．鍵はリッチ流とよぶ曲率を局所的に平均化する微分方程式で，1999 年には，リッチ流に沿ってリーマン計量を変形すると解の爆発時に連結和分解が見え，手術を繰り返し更に時間発展させると JSJ 分解が認識できるという，3 次元多様体幾何化のプログラムを立てた．Perelman は，いくつものドラスティィクなアイデアを導入し，Hamilton のプログラムを完了させた [1].

2　3 次元多様体のトポロジーが分かって

Perelman による幾何化予想の解決は，現時点ではまだ検証中である．しかし，現状はさておき，トポロジーが分かった 3 次元多様体をめぐる数学はこの先どのように進むであろうか.

これまでの 3 次元多様体を巡る研究を振り返ってみると，そのトポロジーを研究する過程で複雑な大域的様相を表現する言葉が整備され，それ自身がいろいろな分野と絡むたいへん豊かな数理構造を含んでいることに気がつく．一時期 3 次元多様体のトポロジーを知ることが大きな目標だったのは事実だが，それが唯一最大の目標だったのは遠い昔のことで，今は，3 次元多様体は，空間の歪みを表現する新しい数学の言葉を生み出す元になっている．森田茂之氏が [9] で語った「トポロジーは振興宗教のようなもの」というやや自嘲した見方は，もはや過去の危惧になろうとしている．また，自然数を元にたいへん深い数学が展開されるのと比較すると，大槻知忠氏が [5] で記した「幾何学における 3 次元多様体は，数論における自然数になれるか?」という期待が現実化してきていることも伺わせる．

このような状況で確信的なことなど言い得ないが，講演の後半では，最近の J. Brock と J. Souto の仕事を素材に ([7] を参照)，3 次元多様体をめぐる研究の将来像のささやかな一つに言及したい.

参考文献

[1] B. Kleiner が開設している Perelman の仕事に関する HP : http://www.math.lsa.umich.edu/research/ricciflow/perelman.html

[2] H. Poincaré, Cinquième complḿent à l'analysis situs, Rendic del Corcolo mat. di Palermo, **18**, (1904).

[3] W. Thurston, Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry, Bull. Amer. Math. Soc., **6** (1982), 357–381.

[4] W. Thurston, Three-Dimensional Geometry and Topology, Princeton Math. Series, 35, Princeton Univ. Press, (1997), 小島 定吉 監訳,「3 次元幾何学とトポロジー」，培風館，(1999).

[5] 大槻 知忠,「21 世紀の幾何学はどこにいくのか?」，数学の楽しみ，日本評論社，**7** (1998), 51–62.

[6] 小島 定吉,「Poincaré 予想」，数学，岩波書店，**53** (2001), 195–207.

[7] 小島 定吉,「ポアンカレ予想とトポロジー」，数学セミナー，日本評論社，11 月号 (2004).

[8] 齋藤利弥訳,「ポアンカレ トポロジー Analysis Situs」，朝倉書店，(1996).

[9] 深谷 賢治・森田 茂之・砂田 利一,「21 世紀の幾何学」，数学の楽しみ，日本評論社, **7** (1998), 24–50.