On invariants of knots and 3-manifolds

大槻 知忠
京都大学 数理解析研究所

謝辞: 松本幸夫先生からは、私が学生の頃から現在にいたるまで、常にあたたかいご指導、励まし、ご助言をいただいてきました。松本先生のご還暦をお祝いし、この機会に、あらためて心から深く松本先生に感謝いたします。

Abstract

In the former half of my talk, I explain a brief survey on some fundamental open problems on the Kontsevich invariant of knots and the LMO invariant of 3-manifolds from the viewpoint of the classification problems of knots and 3-manifolds. In the latter half of the talk, I explain the loop expansion of the Kontsevich invariant, which is related to one of the open problems. Further, I give a result on a formula to calculate the 2-loop polynomial of knots, which presents the 2-loop part of the loop expansion.

1 序

3 次元多様体と結び目の分類問題には「幾何構造による分類」と「不変量による分類」の 2 つのアプローチがある。3 次元多様体の「幾何構造による分類」は現在完成しつつあり、結び目補空間の「幾何構造による分類」はすでに 1970 年代後半に完成している。「幾何構造による分類」によって、たとえば、双曲多様体の分類は $PSL_2(\mathbb{C})$ のある種の離散部分群の分類に帰着され、これによって 3 次元多様体 (resp. 結び目) の分類問題は「代数的な問題に帰着された」という意味で「位相幾何の問題としては解決した」とみなすことができる。しかし、$PSL_2(\mathbb{C})$ の離散部分群の分類はそれ自体が容易ではない問題であり、分類問題を「3 次元多様体 (resp. 結び目) の集合とあるよくわかった集合を全単射により同一視すること」ととらえる観点からは分類の理解は依然として不十分であるように筆者にはおもわれる。3 次元多様体 (resp. 結び目) の集合をよりよく理解するために、3 次元多様体 (resp. 結び目) を不変量によって分類し、さらに「幾何構造による分類」をその枠組みで理解することは、依然として重要で基本的な問題であると筆者はおもう。

この原稿の前半 (2 節) では、結び目の Kontsevich 不変量と 3 次元多様体の LMO 不変量についてその概要を解説する。これらの不変量は結び目と 3 次元多様体を分類することが期待されている不変量であり、「不変量による分類」の観点からこれらの不変量についていくつかの基本的な未解決問題を述べ、それらについて解説する。この原稿の後半 (3 節) では、その未解決問題の 1 つと関連して、Kontsevich 不変量のループ展開について解説し、その 2 ループの部分を与える 2 ループ多項式の計算方法について筆者の最近の結果を述べる。

2 Kontsevich 不変量と LMO 不変量

この節では、結び目と 3 次元多様体の分類問題の観点から、結び目の Kontsevich 不変量と 3 次元多様体の LMO 不変量についていくつかの未解決問題を述べ、それらについて解説する。2.1 節で、Kontsevich 不変量と LMO 不変量が値をとる空間である Jacobi 図の空間について解説し、2.2 節で Kontsevich 不変量、2.3 節で LMO 不変量について解説する。

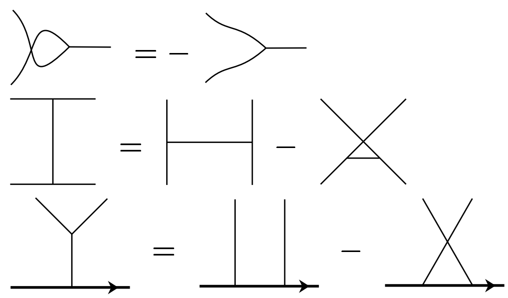
2.1 Jacobi 図

いくつかの頂点を辺でつないだ図形を**グラフ**といい、とくに、各頂点にはいる辺の本数が 1 本か 3 本のグラフを **1,3 価グラフ**という。向きづけられた 1 次元多様体 X について、1,3 価グラフで、1 価頂点は X 上にあり、各 3 価頂点のまわりの 3 つの辺に巡回順序が指定されているものを **X 上の Jacobi 図**という。X 上のヤコビ図がはるベクトル空間を次の 3 つの関係式でわってできる商ベクトル空間を $\mathcal{A}(X)$ とかく。とくに、3 価頂点をもたない Jacobi 図を **chord 図**といい、線分と同相な 1,3 価グラフを **chord** という。

AS 関係式:

IHX 関係式:

STU 関係式:



図では X を太線で、1,3 価グラフを細線でかいている。Jacobi 図の 1 価頂点と 3 価頂点の個数の和の $\frac{1}{2}$ 倍をその Jacobi 図の**次数**という。

d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
dim $\mathcal{A}(S^1)^{(d)}$	1	1	2	3	6	10	19	33	60	104	184	316	548	≥ 932	≥ 1591
dim $\mathcal{A}(S^1)^{(d)}_{\text{conn}}$	0	1	1	1	2	3	5	8	12	18	27	39	55	≥ 78	≥ 108
dim $\mathcal{A}(\emptyset)^{(d)}$	1	1	2	3	6	9	16	25	42	65	105	161	≥ 254	≥ 386	≥ 595
dim $\mathcal{A}(\emptyset)^{(d)}_{\text{conn}}$	0	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	9	≥ 11	≥ 13	≥ 15
#{prime diagrams}	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	2	1			

表 1: Jacobi 図の空間の次数 d の部分空間の次元。$d \geq 13$ では未知である。

未解決問題 2.1. 一般の d について、$\mathcal{A}(S^1)$, $\mathcal{A}(\emptyset)$ の次数 d の部分空間 $\mathcal{A}(S^1)^{(d)}$, $\mathcal{A}(\emptyset)^{(d)}$ の次元と基底を求めよ。

$\mathcal{A}(S^1)$ について、連結な 1,3 価グラフが与える Jacobi 図がはる $\mathcal{A}(S^1)$ の部分空間を $\mathcal{A}(S^1)_{\text{conn}}$ とかく。$\mathcal{A}(S^1)$ は $\mathcal{A}(S^1)_{\text{conn}}$ の symmetric tensor algebra と同型であることと、$\mathcal{A}(S^1)_{\text{conn}}$ は連結な open Jacobi 図の空間 $\mathcal{B}_{\text{conn}}$ と同型であることが知られている。$\mathcal{B}_{\text{conn}}$ の 3 ループ以下の部分空間についてはすべての次数の部分空間の次元が知られている。

$\mathcal{A}(\emptyset)$ について、連結な3価グラフが与える Jacobi 図がはる $\mathcal{A}(\emptyset)$ の部分空間を $\mathcal{A}(\emptyset)_{\mathrm{conn}}$ とかくと、Jacobi 図の排反和を積として、$\mathcal{A}(\emptyset)$ は $\mathcal{A}(\emptyset)_{\mathrm{conn}}$ の symmetric tensor algebra と同型である。$\mathcal{A}(\emptyset)_{\mathrm{conn}}$ において Jacobi 図の連結和をとる操作は well-defined であり、連結和に関して素な Jacobi 図を prime diagram という。次数 11 までの prime diagrams は [CDK] で与えられている。一般に、$\mathcal{A}(\emptyset)_{\mathrm{conn}}$ の任意の Jacobi 図は prime diagrams の連結和に分解されるが、このとき prime diagrams への分解の一意性は成り立たない ([Oh+] 参照)。

2.2 Kontsevich 不変量

$\mathbb{R}^3$ を $\mathbb{C}\times\mathbb{R}$ とみなし、結び目 K を高さに関する臨界点が有限個しかないようにその中におく (図 1)。高さのパラメータ $t_1, t_2, \cdots, t_m$ をとり、各 t_i についてその高さにある K の点を 2 つえらび $z_i(t_i)$, $z_i'(t_i)$ とおく。このようなえらび方のことを**配置**という。配置 P において各 t_i でえらんだ 2 点を K に対応する S^1 上で考えてこれを点線でむすぶと次数 m の S^1 上の chord 図がえられるが、それを D_P とかく。このとき、反復積分をもちいて

$$Z(K) = (\text{正規化定数}) \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^m} \int_{t_1 \leq \cdots \leq t_m} \sum_P (-1)^{\#P_\downarrow} D_p \prod_{i=1}^{m} \frac{dz_i - dz_i'}{z_i - z_i'}$$

により **Kontsevich 不変量** $Z(K) \in \mathcal{A}(S^1)$ が定義される ([Ko])。正確には、結び目に枠が指定されているとき $\mathcal{A}(S^1)$ において定義され、枠が指定されていないときはこれを FI 関係式とよばれる関係式でわった空間において定義される。組みひもに対する同様の式は KZ 方程式とよばれる微分方程式の解の反復積分表示を与え、KZ 方程式の可積分性から Kontsevich 不変量の不変性が示される。定義より、$Z(K)$ は chord 図の $\mathbb{C}$ 係数無限線型和であるが、実際の値は $\mathbb{Q}$ 係数になることが知られている。

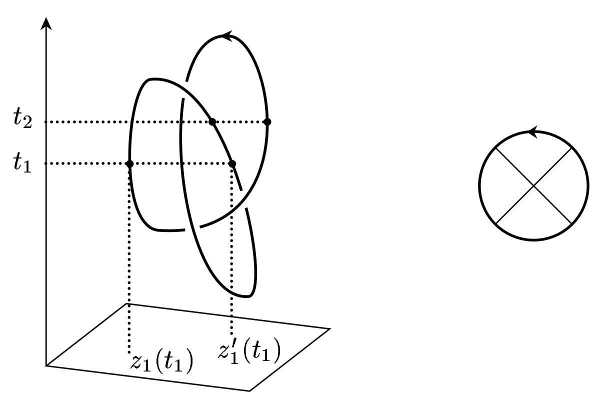


図 1: 配置の例とこれに対応する chord 図

Kontsevich 不変量はすべての量子不変量とすべての Vassiliev 不変量を導出する非常に強力な不変量である。Kontsevich 不変量の観点から、結び目の分類問題は次のように言いかえることができる。

未解決問題 2.2.
(1) Kontsevich 不変量は結び目の完全不変量か?
(2) Kontsevich 不変量の像 $Z(\{\text{結び目}\}) \subset \mathcal{A}(S^1)$ を決定せよ。

(1) は「Kontsevich 不変量 $Z : \{\text{結び目}\} \to \mathcal{A}(S^1)$ は単射か?」という意味で、この問題は正しいであろうと予想されている。その特別な場合である「自明な結び目 O ではない任意の結び目 K について $Z(K) \neq Z(O)$ か?」$_{(*)}$ も未解決である。この特別な場合 $(*)$ は次の問題に帰着される。非自明な結び目について、結び目群（結び目の補空間の基本群）から非可換有限群への全射準同型があることが知られている。さらに、結び目群から有限群への準同型の個数は結び目 quandle から有限 quandle X への準同型の個数 $h_X(K)$ を用いて表され、その個数はある種の R 行列（Yang-Baxter 方程式の解）を用いて構成される。「そのような R 行列が Yang-Baxter 方程式の解の空間の中で自明な R 行列と同じ連結成分にはいっている」$_{(**)}$ とき、h_X は Vassiliev invariants で detect 可能であり、このとき Kontsevich 不変量より h_X が決定可能である。この意味で $(*)$ は $(**)$ に帰着される。

(2) は「$Z(K)$ の値にはいる制限を完全に記述せよ」という問題である。現時点で知られている制限は、$Z(K)$ は weight system で量子不変量 (多項式) にうつされること、group-like であること、ループ展開（後述）である。また、Kontsevich 不変量の任意有限項の像は対応する Jacobi 図の空間の中の full rank の lattice と同型であることが clasper を用いた議論によりわかり、したがって、Kontsevich 不変量の像はそれらの lattices の射影極限（rank が無限の lattice）の部分集合である。

2.3 3 次元多様体の LMO 不変量

3 次元多様体 M の LMO 不変量は次のように定められる ([Oh3] 参照)。簡単のため、M は枠つき結び目 K にそって S^3 を surgery して得られるとする。K の枠を定める整数 f と各成分に少なくとも 1 つの 3 価頂点をもつ Jacobi 図からなる元 $\alpha \in \mathcal{B}$ をもちいて、K の Kontsevich 不変量は

$$\chi^{-1}\big(Z(K)\#\nu\big) = \exp_{\sqcup}\Big(\frac{f}{2}\ \bigcap\ \Big) \sqcup \alpha \quad \in\ \mathcal{B}$$

のように表示される。ここで $\nu \in \mathcal{A}(S^1)$ は自明の結び目の Kontsevich 不変量である。このとき、M の **LMO 不変量** [LMO] は

$$Z^{\mathrm{LMO}}(M) = (\text{正規化定数}) \cdot \Big\langle\ \exp_{\sqcup}\big(-\frac{1}{2f}\ \bigcup\ \big),\ \alpha \Big\rangle \quad \in\ \mathcal{A}(\emptyset)$$

で与えられる (Aarhus integral [BGRT] による構成法)。ただし、開 Jacobi 図 D_1, D_2 に対して $\langle D_1, D_2\rangle$ は D_1 と D_2 の 1 価頂点の数が異なるとき 0、等しいとき互いの 1 価頂点を結合してえられる $\emptyset$ 上の Jacobi 図をすべての結合方法にわたって加えた和で定義される。上の 2 式の過程はある種の Gauss 積分の摂動展開を Jacobi 図版に普遍化した操作を意味し、このことから LMO 不変量の不変性を導くことができる。

各摂動的不変量は重み系をとおして LMO 不変量から導出され（[Oh2, Oh3, BGRT, Le2, Ku] を参照)、この意味で LMO 不変量はすべての摂動的不変量に対して普遍的である。さらに整ホモロジー球面の各量子不変量は摂動的不変量から導出され（[Ha2, Ha3, HL])、よって、整ホモロジー球面の LMO 不変量はすべての量子不変量に対しても普遍的である。さらに、整ホモロジー球面の LMO 不変量はすべての有限型不変量 ([Oh1]) に対して普遍的であることも知られている [Le1]。LMO 不変量は、とくに整ホモロジー球面に対して、非常に強力な不変量である。LMO 不変量の観点から、整ホモロジー球面の分類問題は次のように言いかえることができる。

未解決問題 2.3.
(1) LMO 不変量は整ホモロジー球面の完全不変量か?
(2) LMO 不変量の像 $Z^{\mathrm{LMO}}(\{\text{ 整ホモロジー球面 }\}) \subset \mathcal{A}(\emptyset)$ *を決定せよ。*

(1) に関連して、その特別な場合である「S^3 と同相でない整ホモロジー球面 M について $Z^{\mathrm{LMO}}(M) \neq Z^{\mathrm{LMO}}(S^3)$ か? 」$_{(***)}$ も未解決である。体積予想 [Ka, MM, Mu] （[Oh+] も参照）は双曲体積が量子不変量のある種の極限として導出されることを示唆し、これは双曲多様体について $(***)$ が正しいことを示唆している。数理物理的には、Chern-Simons 経路積分に形式的に鞍点法を適用することにより双曲体積が導かれ、Chern-Simons 経路積分の摂動展開として LMO 不変量が導かれる。

整ホモロジー球面以外の 3 次元多様体について、LMO 不変量はレンズ空間の完全不変量ではないことが知られている ([BL])。また、3 次元多様体の Betti 数が正のときはその LMO 不変量の値は Alexander 多項式等の「古典的」な不変量で表示できることが知られており ([Oh3] を参照)、とくに、Betti 数が正の 3 次元多様体に対しては LMO 不変量は比較的弱い不変量である。ホモロジー群と linking pairing を固定した 3 次元多様体のクラスについて LMO 不変量の強力な refinement を定義できるのではないかということが clasper を用いた議論により期待される。

(2) に関連して、いくつかの Seifert 多様体の摂動的不変量の値は保型関数になることが知られており [LZ]、これは他の 3 次元多様体の摂動的不変量の値にも何か数論的な強い制限がはいるのではないかということを示唆しているようにおもわれるが、この制限は重み系をとおして間接的に LMO 不変量の値に対する制限も与えていることになる。LMO 不変量の任意有限項の像は対応する Jacobi 図の空間の中の full rank の lattice と同型であることが clasper を用いた議論によりわかり、したがって、LMO 不変量の像はそれらの lattices の射影極限（rank が無限の lattice）の部分集合である。

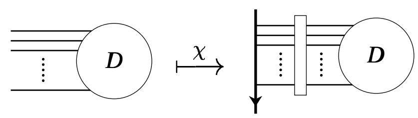
LMO 不変量の計算例について、レンズ空間の LMO 不変量は計算されている ([BL]) が、任意に与えられた 3 次元多様体に対してその LMO 不変量のすべての項 (Jacobi 図の無限線型和) を同時に計算する一般的な方法はまだ知られていない。torus 結び目の Kontsevich 不変量のループ展開はある程度計算されており（[Ma1, Ma2])、これを用いて torus 結び目で分岐する S^3 の分岐被覆空間の LMO 不変量がある程度計算できるとおもわれる。

3 Kontsevich 不変量のループ展開

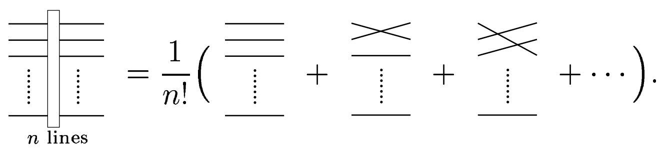
この節では、未解決問題 2.2 (2) に関連して、Kontsevich 不変量のループ展開とその 2 ループの部分を与える 2 ループ多項式について解説する。3.1 節でループ展開と 2 ループ多項式の概要を解説し、3.2 節で 2 ループ多項式の表示に関する筆者の最近の結果を述べる。

3.1 ループ展開と 2 ループ多項式

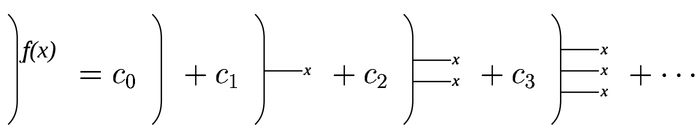
1,3 価グラフで、各 3 価頂点のまわりの 3 つの辺に巡回順序が指定されているものを **open Jacobi 図**という。open Jacobi 図がはるベクトル空間を AS, IHX 関係式でわってできる商ベクトル空間を $\mathcal{B}$ とかく。次で与えられる線型写像 $\chi : \mathcal{B} \to \mathcal{A}(\downarrow)\ \big(\cong \mathcal{A}(S^1)\big)$ は同型写像になり、これを **Poincare-Birkhoff-Witt 同型** (**PBW 同型**) とよぶ。



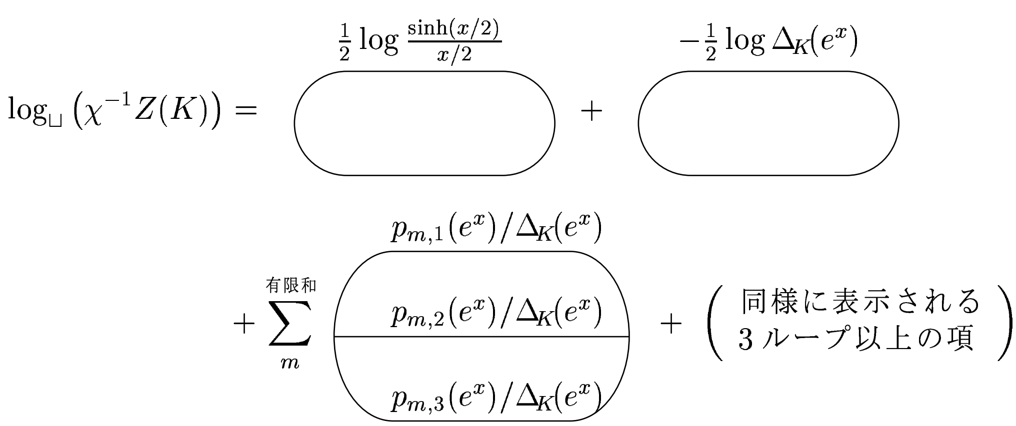
ここで、長方形は symmetrizer で、n 本の線にかかる長方形は左の n 点と右の n 点をつなげる $n!$ 通りの平均を表す。すなわち、



多項式または巾級数 $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$ にたいして、$f(x)$ が edge につけられた Jacobi 図は次の線型和を意味する。



1 次 Betti 数が n である 1,3 価グラフからなる open Jacobi 図を n **ループ**であるという。結び目 K の Kontsevich 不変量 $Z(K)$ は $\mathcal{B}$ の元として次のように展開され、これを**ループ展開**という [Ro1, Kr1, GK1]。



ここで、$\Delta_K(t)$ は Alexander 多項式で、$p_{i,j}(e^x)$ は e^x の多項式である。とくに、2 ループの部分の情報は

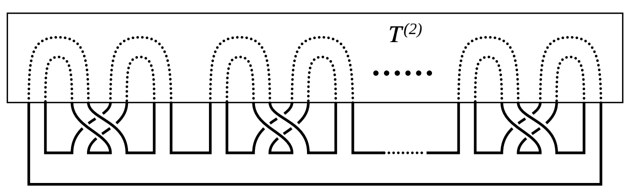
$$\Theta_K(t_1,t_2,t_3) = \sum_{\substack{m \\ \varepsilon=\pm1 \\ \{i,j,k\}=\{1,2,3\}}} p_{m,1}(t_i^{\varepsilon})p_{m,2}(t_j^{\varepsilon})p_{m,3}(t_k^{\varepsilon}) \quad \in \mathbb{Q}[t_1^{\pm1},t_2^{\pm1},t_3^{\pm1}]/(t_1t_2t_3=1)$$

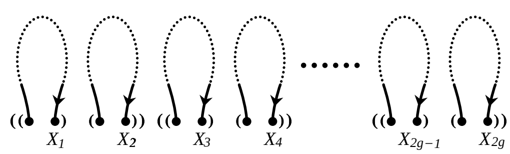
に集約され、これを結び目 K の **2 ループ多項式**という。

任意に与えられた結び目に対してその 2 ループ多項式を計算することができる一般的な方法はまだ知られていない。特殊な場合について、Alexander 多項式が自明であるような結び目の 2 ループ多項式はある種の手術公式をもちいて計算することができる ([GK1, Kr2])。Rozansky [Ro2] は 7 交点までの結び目に対してその 2 ループ多項式の値の表を与えている。2 ループ多項式のケーブル化公式は知られており、とくにトーラス結び目の 2 ループ多項式は計算されている ([Ma1, Oh4])。種数 1 の任意の結び目の 2 ループ多項式は計算されている ([Oh5])。結び目 K の Alexander 多項式は K の補空間の無限巡回被覆のホモロジー群 $H_1(S^3-K)$ への被覆変換群の作用から構成することができる。これと同様の観点から、2 ループ多項式は S^3-K の「同変 Casson 不変量」に相当し、しかるべく手術公式を定式化することによって 2 ループ多項式を計算できるようになるのではないかということが期待される。

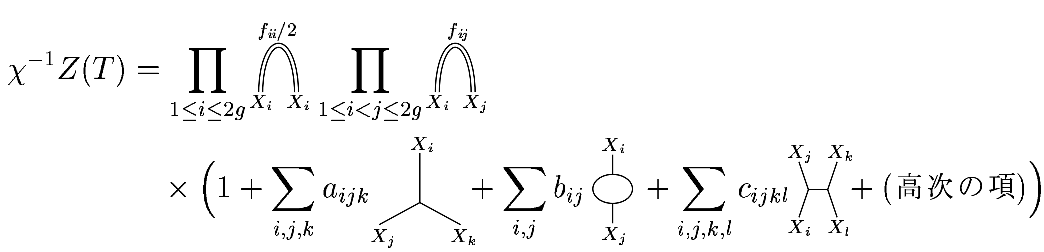
3.2 2 ループ多項式のある表示

任意の結び目 K は、それを境界とするコンパクトな曲面（Seifert 曲面）をもつが、この曲面を標準形で表示することにより、K は tangle T の 2 重化 $T^{(2)}$ をもちいて次のように表示される。

$K =$ 

$T =$ 

ここで、図の点線部分はひもが結ばったり互いに絡まったりしていることを意味する。T の Kontsevich 不変量はスカラー a_{ijk}, b_{ij}, c_{ijkl}, f_{ij} をもちいて次のように表示される。



ここで、2 重線は chord の exponential を表す。T の linking matrix は (f_{ij}) で与えられることに注意すると、Seifert matrix と Alexander 多項式は

$$S = \big(f_{ij}\big) + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{\oplus g}$$
$$\Delta_K(t) = \det\big(t^{-1/2}S - t^{1/2}\ {}^tS\big)$$

で与えられる。次の定理は K の 2 ループ多項式に a_{ijk}, b_{ij}, c_{ijkl} がどのように寄与するのかを表す表示を与える。

定理 3.1. 上の設定のもとで、結び目 K の *2* ループ多項式 $\Theta_K(t_1,t_2,t_3)$ は a_{ijk}, b_{ij}, c_{ijkl}, f_{ij} の関数として次のように表示される。

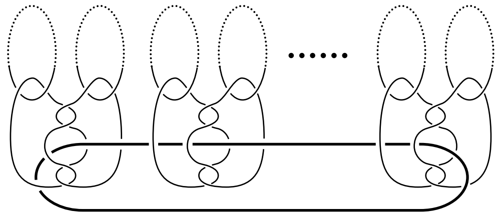
$$\begin{aligned}
\Theta_K(t_1,t_2,t_3) &= \big(a_{ijk},\ b_{ij},\ c_{ijkl} \text{ にはよらず } f_{ij} \text{ のみによってきまる項}\big) \\
&+ \sum_{\substack{\varepsilon=\pm1 \\ \{i,j,k\}=\{1,2,3\}}} \Big(\frac{1}{2}\ {}^t\mathbf{a}\cdot\big(U(t_i^\varepsilon)\wedge U(t_j^\varepsilon)\wedge U(t_k^\varepsilon)\big)\cdot\mathbf{a}\ + \mathrm{trace}\big({}^tB\cdot U(t_i^\varepsilon)\big)\Delta_K(t_j^\varepsilon)\Delta_K(t_k^\varepsilon) \\
&\qquad + \mathrm{trace}\big({}^tC\cdot\big(U(t_i^\varepsilon)\wedge U(t_j^\varepsilon)\big)\big)\Delta_K(t_k^\varepsilon)\ - 2\ {}^t\mathbf{u}(t_i^\varepsilon)\cdot C\cdot\mathbf{u}(t_j^\varepsilon)\cdot\Delta_K(t_k^\varepsilon) \\
&\qquad + 2\ {}^t\mathbf{a}'(t_i^\varepsilon)\cdot\mathbf{v}'(t_j^\varepsilon)\cdot\Delta_K(t_k^\varepsilon)\Big) +\ {}^t\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}(t_1,t_2,t_3)
\end{aligned}$$

ただし、$\{e_1,e_2,\cdots,e_{2g}\}$ を基底とするベクトル空間を V として、上式の記号は次で与えられる。

$$\begin{aligned}
U(t) &= (t^{1/2}-t^{-1/2})\cdot\Delta_K(t)\cdot\big(t^{-1/2}S - t^{1/2}\ {}^tS\big)^{-1}\ = \big(U_{ij}\big)\ \in\ \mathrm{End}(V) \\
\mathbf{u}(t) &= \sum_{i,j} U_{ij}(t)\ e_i\wedge e_j\ \in\ V\wedge V \\
\mathbf{v}(t_1,t_2,t_3) &= \frac{1}{2}\sum_{i,j,k,n,p,q,r,\varepsilon} \frac{U_{i,2n}(t_p^\varepsilon)\big(U_{j,2n}(t_q^\varepsilon)-U_{j,2n-1}(t_q^\varepsilon)\big)U_{k,2n-1}(t_r^\varepsilon)}{(t_p^{-1}-1)(t_r-1)}\ e_i\wedge e_j\wedge e_k \\
\mathbf{v}'(t) &= \frac{1}{4}\sum_n \Big(\big(t^{1/2}U_{2n-1,2n}(t)+t^{-1/2}U_{2n,2n-1}(t)\big)(e_{2n-1}+e_{2n}) \\
&\qquad + (t^{1/2}+t^{-1/2})\big(U_{2n-1,2n-1}(t)e_{2n-1}+U_{2n,2n}(t)e_{2n}\big)\Big) \\
\mathbf{a} &= \sum_{i,j,k} a_{ijk}\, e_i\wedge e_j\wedge e_k\ \in\ V\wedge V\wedge V \\
\mathbf{a}'(t) &= -\frac{1}{2}\sum_{i,j,k} a_{ijk}\big(U_{jk}(t)-U_{kj}(t)\big)e_i \\
B &= \sum_{i,j} b_{ij}\, e_i\otimes e_j^\star\ \in\ \mathrm{End}(V) \\
C &= \sum_{i,j,k,l} c_{ijkl}(e_i\wedge e_j)\otimes(e_k^\star\wedge e_l^\star)\ \in\ \mathrm{End}(V\wedge V)
\end{aligned}$$

証明の方針. 問題の結び目 K は、次の図の細線にそって S^3 を手術することにより、太

線から得られる。（図の点線部分が問題の tangle T に等しい。）



K の Kontsevich 不変量は対 (S^3, K) の LMO 不変量に等しいこと（すなわち、$Z(K) = Z^{\mathrm{LMO}}(S^3, K)$）に注意すると、上図の絡み目の Kontsevich 不変量に LMO 不変量の手術公式（Aarhus integral）を適用することにより $Z(K)$ が得られる。とくに、点線部分の tangle の Kontsevich 不変量の値の Jacobi 図の中で 3 価頂点をもつものから $Z(K)$ の 2 ループの部分への寄与を計算することにより、求める式を得る。 $\square$

References

[BGRT] Bar-Natan, D., Garoufalidis, S., Rozansky, L., Thurston, D.P., *The Aarhus integral of rational homology 3-spheres I: A highly non trivial flat connection on S^3*, Selecta Math. (N.S.) **8** (2002) 315–339.

[BL] Bar-Natan, D., Lawrence, R., *A rational surgery formula for the LMO Invariant*, Israel J. Math. **140** (2004) 29–60.

[BLT] Bar-Natan, D., Le, T.T.Q., Thurston, D.P., *Two applications of elementary knot theory to Lie algebras and Vassiliev invariants*, Geometry and Topology **7** (2003) 1–31.

[CDK] Chmutov, S.V., Duzhin, S.V., Kaishev, A.I., *The algebra of 3-graphs*, Trudy Matematicheskogo Instituta im. Steklova **221** (1998) 168–196. English translation: Trans. Steklov Math. Inst. **221** (1998) 157–186.

[GK1] Garoufalidis, S., Kricker, A., *A rational noncommutative invariant of boundary links*, math.GT/0105028.

[GK2] ———, *A surgery view of boundary links*, math.GT/0205328, to appear in Math. Annalen.

[Ha1] Habiro, K., *Claspers and finite type invariants of links*, Geom. Topol. **4** (2000) 1–83.

[Ha2] ———, *On the quantum sl_2 invariants of knots and integral homology spheres*, Invariants of knots and 3-manifolds (Kyoto 2001), 161–181, Geom. Topol. Monogr. **4**, Geom. Topol. Publ., Coventry, 2002.

[Ha3] ———, in preparation.

[HL] Habiro, K., Le, T.T.Q., in preparation.

[Ka] Kashaev, R.M., *The hyperbolic volume of knots from the quantum dilogarithm*, Lett. Math. Phys. **39** (1997) 269–275.

[Ko] Kontsevich, M., *Vassiliev's knot invariants*, Adv. in Sov. Math **16(2)** (1993) 137–150.

[Kr1] Kricker, A., *The lines of the Kontsevich integral and Rozansky's rationality conjecture*, math.GT/0005284.

[Kr2] ———, *A surgery formula for the 2-loop piece of the LMO invariant of a pair*, Invariants of knots and 3-manifolds (Kyoto 2001), 161–181, Geom. Topol. Monogr. **4**, Geom. Topol. Publ., Coventry, 2002.

[Ku] Kuriya, T., *On the LMO conjecture*, preprint, 2003.

[LZ] Lawrence, R., Zagier, D., *Modular forms and quantum invariants of* 3*-manifolds*, Sir Michael Atiyah: a great mathematician of the twentieth century. Asian J. Math. **3** (1999) 93–107.

[Le1] Le, T.T.Q., *An invariant of integral homology 3-sphere which is universal for all finite type invariants*, in “Soliton, Geometry and Topology: On the Crossroad”, AMS Translations series 2 **179** (1997), Eds. V. Buchstaber and S. Novikov, 75–100.

[Le2] ———, *Quantum invariants of 3-manifolds: integrality, splitting, and perturbative expansion*, Proceedings of the Pacific Institute for the Mathematical Sciences Workshop “Invariants of Three-Manifolds” (Calgary, AB, 1999). Topology Appl. **127** (2003) 125–152.

[LMO] Le, T.T.Q, Murakami, J., Ohtsuki, T., *On a universal perturbative invariant of 3-manifolds*, Topology **37** (1998) 539–574.

[Ma1] Marché, J., *On Kontsevich invariant of torus knots*, math.GT/0310111.

[Ma2] ———, *Sur l'intégrale de Kontsevich des noeuds dans les variétés de dimension 3*, Ph.D. Thesis, Université Paris 7, 2004.

[Mu] Murakami, H., *Optimistic calculations about the Witten–Reshetikhin–Turaev invariants of closed three-manifolds obtained from the figure-eight knot by integral Dehn surgeries*, Recent progress towards the volume conjecture, 70–79, 数理解析研究所 講究録 **1172**, 2000. math.GT/0005289.

[MM] Murakami, H., Murakami, J., *The colored Jones polynomials and the simplicial volume of a knot*, Acta Math., **186** (2001) 85–104.

[Oh1] Ohtsuki, T., *Finite type invariants of integral homology 3-spheres*, J. Knot Theory and Its Rami. **5** (1996) 101–115.

[Oh2] ———, *The perturbative* $SO(3)$ *invariant of rational homology 3-spheres recovers from the universal perturbative invariant*, Topology **39** (2000) 1103–1135.

[Oh3] ———, *Quantum invariants, — A study of knots, 3-manifolds, and their sets*, Series on Knots and Everything **29**. World Scientific Publishing Co., Inc., 2002.

[Oh4] ———, *A cabling formula for the 2-loop polynomial of knots*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **40** (2004) 949–971.

[Oh5] ———, *On the 2-loop polynomial of knots*, in preparation.

[Oh+] Ohtsuki, T. (ed.), *Problems on invariants of knots and 3-manifolds*, Invariants of knots and 3-manifolds (Kyoto 2001), 377–572, Geom. Topol. Monogr. **4**, Geom. Topol. Publ., Coventry, 2004.

[Ro1] Rozansky, L., *A rational structure of generating functions for Vassiliev invariants*, Notes accompanying lectures at the summer school on quantum invariants of knots and three-manifolds, Joseph Fourier Institute, University of Grenoble, org. C. Lescop, June, 1999.

[Ro2] ———, *A rationality conjecture about Kontsevich integral of knots and its implications to the structure of the colored Jones polynomial*, Proceedings of the Pacific Institute for the Mathematical Sciences Workshop “Invariants of Three-Manifolds” (Calgary, AB, 1999). Topology Appl. **127** (2003) 47–76.

〒606-8502 京都市左京区北白川追分町 京都大学数理解析研究所

Email : tomotada@kurims.kyoto-u.ac.jp