PROPERTIES OF MINIMAL CHARTS AND ITS APPLICATIONS

TERUO NAGASE AND AKIKO SHIMA

Dedicated to Professor Yukio Matsumoto for his 60th birthday.

ABSTRACT. In my talk, we investigate properties of minimal charts which we need to prove that there is no minimal chart with exactly seven white vertices.

1. INTRODUCTION

ここでは，minimal chart の性質について研究する．この性質は「 7 個の white vertex をもつ minimal chart は存在しない」ことを示すために使われる．まずは、今までに知られている結果を述べる．

「 5 個の white vertex をもつ minimal chart は存在しない」ことは示されている ([8]) ．長谷川氏により、「丁度 6 個もつ minimal chart の存在する」が示されている ([2]). この chart の surface braid の closure が 2-twist spun terfoil と呼ばれている 2-knot に ambient isotopic である．4 個の white vertex をもつ minimal chart についても研究されている ([4]). これは 2 つの class に分かれる．最初の class は '4-chart', free edge と hoop の互いに交わらない和集合からなる．この '4-chart' の surface braid の closure は tours link を表す．2 番目の class は 1 つの '3-chart', ring, free edge と hoop の和集合からなる．鎌田氏により，どんな 3-chart (label が 1 と 2 のみからなる chart) も white vertex のない chart に C-equivalent であることが示されている ([5]) ．つまり，2 番目の class に対して，もし ring, free edge や hoop がなければ，その 3-chart は minimal chart ではないことが分かる．しかし，長谷川

The second author is partially supported by Grant-in-Aid for Scientific Research (No.16540082), Ministry of Education, Science and Culture, Japan.

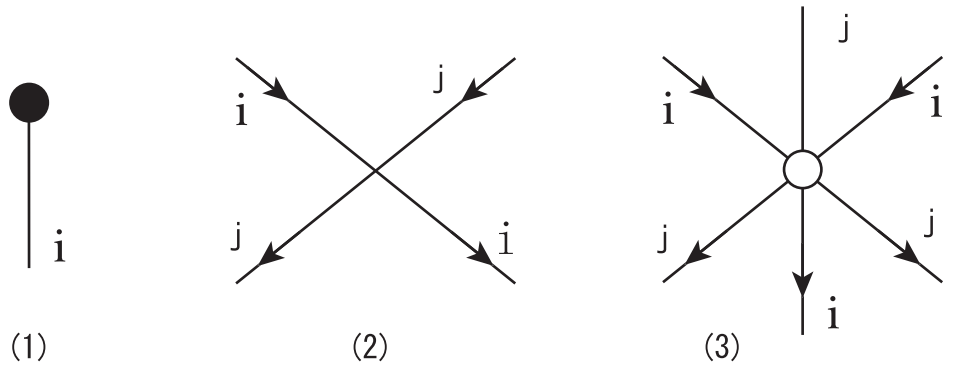

FIGURE 1. (1) black vertex, (2) crossing ($|i-j|>1$), (3) white vertex ($|i-j|=1$).

氏により，「2番目のある class は4個の white vertex をもつ minimal chart であるが，その surface braid の closure は ribbon surface である」ことが示された ([3])．

2. DEFNINITIONS

n を自然数とする．n-chart とは球面上の oriented labeled graph で Figure 1 のような頂点を持つ graph のことをいう。

chart の間の C-moves と呼ばれる変形を用いる．詳しい変形については [7] や [1] を参考にして下さい．2つの chart が *C-equivalent* とは，一方から他方の chart へ有限回の C-moves で移り合えるときをいう．

chart Γ に対して，$w(\Gamma)$ を white vertex の数，$f(\Gamma)$ を free edge の数とする．組 $(w(\Gamma), -f(\Gamma))$ を chart の *complexity* という．chart Γ が *minimal chart* とは chart Γ と C-equivalent な chart の内 Γ の complexity が minimal であるときをいう．ただし，free edge とは両端点が black vertex の edge をいう．

Γ を chart とする．各 label m に対して，Γ_m を label m の edge とその vertex からなる Γ の subgraph とする．ここでは，

> *crossings* は Γ の *vertex* であるが，*subgraph* Γ_m の *vertex* とは思わない．

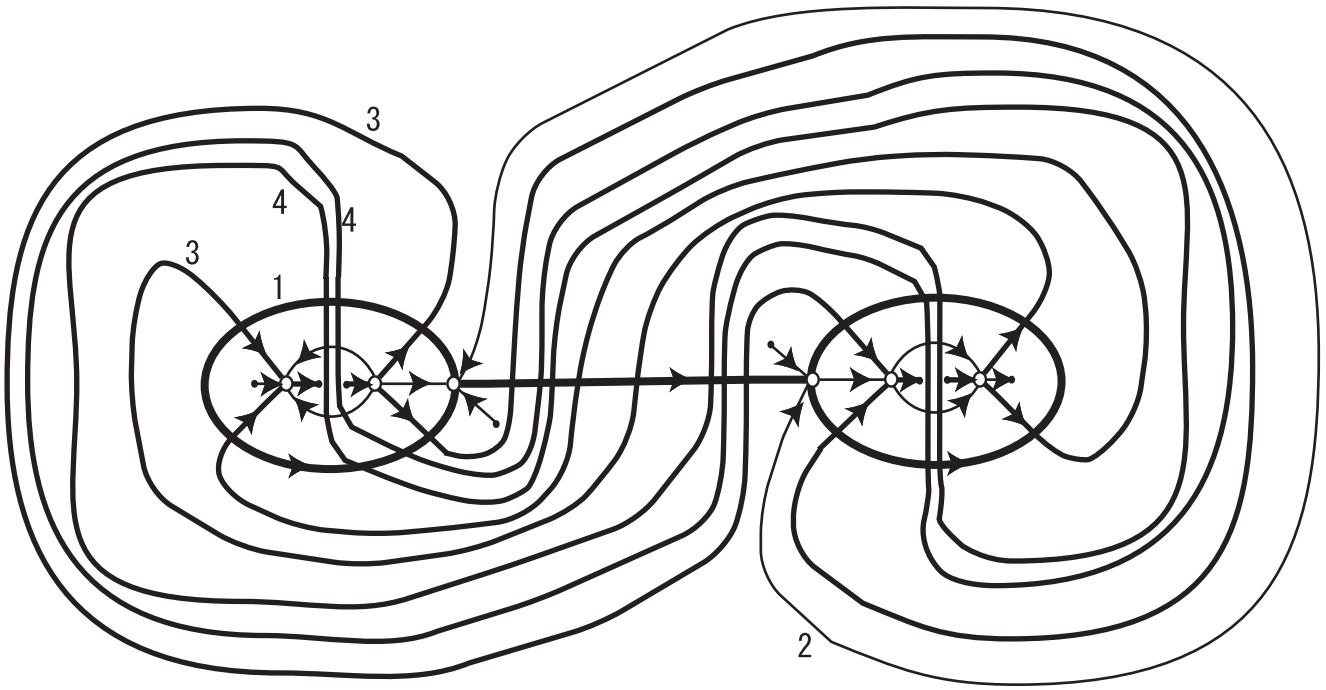

FIGURE 2.

hoop とは Γ の vertex を含まない closed edge をいう (ゆえに，crossing も含まない). Γ_m の closed edge で，crossing を含み，white vertex や black vertex を含まないものを *ring* という．Figure 2 内の chart は，ring を含む white vertex を 6 個もつ 5-chart の例である．

3. USEFUL LEMMA

disk D が *lens of type* (i,j) とは ∂D が 2 つの Γ_i の edge e_1 と Γ_j の edge e_2 からなり，各 $k=i,j$ に対して，D 内の任意の Γ_k の edge e が $e\cap\partial e_k\neq\emptyset$ ならば，e は e_1 か e_2 である．

D を lens of type (i,j) とする． e_1,e_2 を ∂D 上の edge とする. w_1,w_2 を e_1 内の white vertex とする．D が次の条件のうち 1 つを満たすとき，*half lens* という (Figure 3 を見よ):

(1) e_1 と e_2 のどちらも middle arc を含まない.
(2) 2 つの edge e_1 と e_2 のうちどちらか 1 つが両側の white vertex w_1 と w_2 において middle arc を含む．

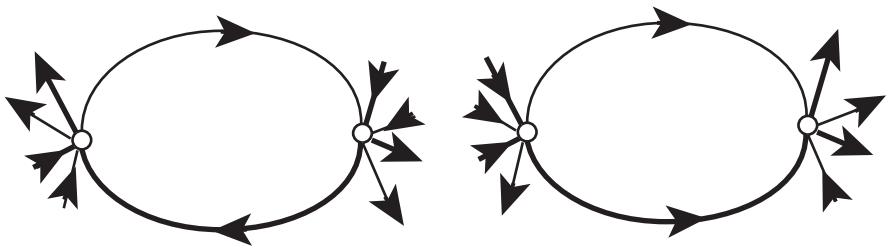

FIGURE 3.

ここで，middle arc とは white vertex の近傍内の 6 本の arc で，向きが内側 (あるいは外側) に連続して入っている 3 本の arc の真ん中のものをいう．

次の命題は有効である．

Lemma 3.1. *minimal chart* において, どんな *half lens* の内部にも少なくとも 3 つの *white vertex* が存在する．更に，*half lens of type* $(m, m+1)$ に対して，その内部に *white vertex* が 2 つ w_1, w_2 存在し，w_1 は *index* が m 以下の *white vertex* であり，w_2 は *index* が $m+2$ 以上の *white vertex* である．ここで，w が *label* m の *edge* と *lable* $m+1$ の *edge* と隣接するとき，その *white vertex* の *index* を $m+1$ とする．

上の lemma から half lens が存在するならば，white vertex に隣接する edge の label の種類は最低 4 種類必要なことが分かる．

chart Γ が chart of type $(n_s, n_{s+1}, \ldots, n_{t-1}, n_t)$ であるとは，$n_s \neq 0$, $n_t \neq 0$, $n_i = 0$ $(i < s$ or $t < i)$ を満たす．ただし，n_m は index m の white vertex の数とする．

上の lemma から次の corollary を得る．

Corollary 3.2. Γ を *minimal chart of type* (m, n) とする．このとき，Γ には *half lens* は存在しない．

4. No minimal chart with seven white vertices

最後に，7 個の white vertex をもつ minimal chart が存在しないことをどのように示したのか，証明の流れを説明する．

Γ を chart とする. subgraph Γ_m において, edge が 1 つの vertex のみもつとき, その edge を *loop of* Γ_m という. loop は crossing を含んでもよい.

つぎの定理が示せる.

Theorem 4.1. Γ を *minimal chart* で高々 7 個の *white vertex* を含むとする. このとき, Γ は *subgraph* として *Figure 2* 内の *subgraph* を含む. 更に, 7 個の *white vertex* をもつ *minimal chart* には *loop* が存在しない.

上の定理を使って, 次の lemma が示せる.

Lemma 4.2. Γ を *minimal chart* で丁度 7 個の *white vertex* を含むとする. このとき, Γ の *type* は

$$(7),\ (5,2),\ (4,3),\ (3,2,3),\ (2,3,2)$$

である.

各々の type の chart を順に調べていくことになる. 一つ一つ説明する時間がないと思うので, 特に chart of type $(4,3)$ を説明したいと思う.

chart Γ を構成していく上で, white vertex w に対して, w を含む Γ_m の 2 つ edge が特別視されていて, w を含む 残りの一つ Γ_m の edge がまだ決まっていないとする. このときに, この white vertex w を 2 重丸で描くことにする (Figure 4 を見よ). 特に, 決まっていない edge が black vertex を含むならば, その white vertex を黒丸に白丸で表すことにする (Figure 4 を見よ).

Lemma 4.3. Γ を *chart of type* $(4,3)$ とする. *white vertex* の隣接する *edge* の *label* の内, 最小の数を m とする. このとき, Γ_m は次のどれかである.

特に Γ_m が非連結になったときが大変である.

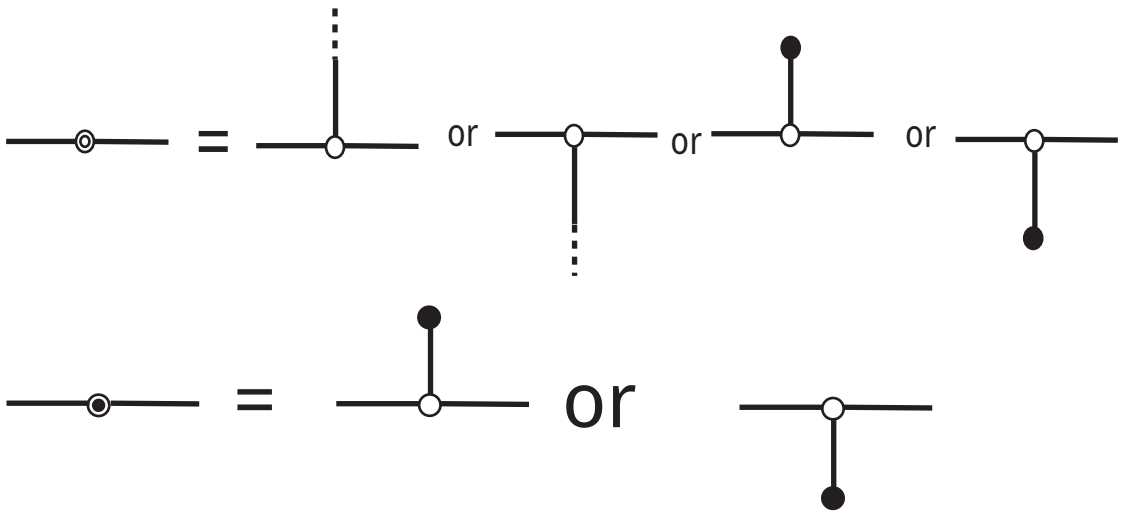

FIGURE 4.

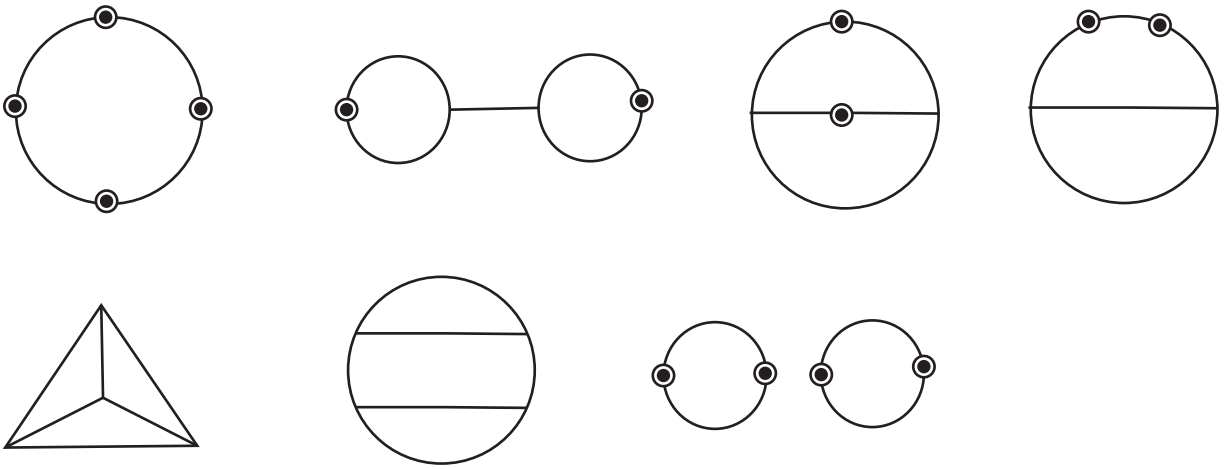

FIGURE 5.

REFERENCES

[1] J. S. Carter and M. Saito, " Knotted surfaces and their diagrams", Mathematical Surveys and Monographs, 55, American Mathematical Society, Providence, RI, (1998).
[2] I. Hasegawa, *The lower bound of the w-indices of non-ribbon surface-links*, preprint.
[3] I. Hasegawa, *Surface braids need stabilization*, preprint, (2004).
[4] S. Ishida, T. Nagase and A. Shima, *Minimal n-charts with four white vertices*, preprint.
[5] S. Kamada, *Surfaces in R^4 of braid index three are ribbon*, J. Knot Theory Ramifications 1 (1992), no. 2, 137–160.

[6] S. Kamada, 2-*dimensional braids and chart descriptions*, Topics in knot theory (Erzurum, 1992), 277–287, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. Math. Phys. Sci., 399, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, (1993).
[7] S. Kamada, "Braid and Knot Theory in Dimension Four", Mathematical Surverys and Monographs, Vol. 95, American Mathematical Society, (2002).
[8] M. Ochiai, T. Nagase and A. Shima, *There exists no minimal n-chart with five white vertices*, preprint.

Department of Mathematics, Tokai University, 1117 Kitakaname, Hiratuka Kanagawa, 259-1292 Japan
E-mail address: nagase@sm.u-tokai.ac.jp
E-mail address: shima@keyaki.cc.u-tokai.ac.jp