Spherical stable maps of 4-manifolds into a surface

鈴岡　啓一

松本幸夫先生のご還暦をお祝いいたします。これに際しまして、常にあたたかくご指導や励ましをしていただいていることに、あらためて心より感謝いたします。

Abstract

In this talk, we study some topological properties of stable maps of 4-manifolds into a surface whose regular fibers are disjoint union of 2-spheres. If a closed 4-manifold admits such a map, then it bounds a 5-manifold. Each regular fiber of such a map of the 4-sphere into the plane is a homotopy ribbon 2-link. And any spun 2-knot of a classical knot can be realized as a component of a regular fiber of such a map.

1　序

以下の内容は佐伯修氏（九州大学）との共同研究によるものである。

Morse 理論は、多様体の大域的性質をそれ上の「良い性質」をもつ関数（Morse 関数）を用いて研究するというものである。それを実数値関数のみでなく、任意の多様体への写像を考えることによって研究しようという試みがいくつか行われてきている。本講演はその中で 4 次元多様体から曲面への写像を用いて、その定義多様体の持つ大域的な性質について研究するものである。ここでは Morse 関数にあたる良い性質を持つ写像として安定写像を用いる。

特異点の観点からすると最も単純な特異点は定値折り目特異点である。定値折り目特異点のみを特異点として持つ写像は　*special generic map*　と呼ばれる。この写像の正則ファイバーは常に有限個の球面の直和となっている。4 次元多様体から曲面への special generic map に関しては系統的な研究がなされている。([4]、[5] など)

本講演では正則ファイバーが球面の直和となっている安定写像について考察する。このような写像を球面型安定写像と呼ぶ。球面型安定写像には定値折り目特異点だけでな

く、不定値折り目特異点、及びカスプ特異点も一般に現れる。従ってこの写像は special generic map の自然な一般化と考えられる。また安定写像は豊富に存在することが知られているにもかかわらず、その例を構成することは意外に難しい。そこで本講演では以下の問題について考察する。

1、曲面への球面型安定写像を許容する 4 次元多様体はどのような性質を持つか。

2、球面型安定写像の実例を構成せよ。

2 安定写像とStein分解

$f : M \to N$ を 4 次元多様体から曲面への滑らかな写像とする。そのような写像全体のなす集合を $C^\infty(M,N)$ と表す。この集合にはホイットニー C^∞ 位相を入れておく。$C^\infty(M,N)$ には $\mathrm{Diff}(M)\times\mathrm{Diff}(N)$ が自然に作用する。この作用による f の軌道が $C^\infty(M,N)$ 内の開集合であるとき f を安定写像と呼ぶ。

$\mathrm{Mather}([3])$ により安定写像全体のなす集合は $C^\infty(M,N)$ の中で開かつ稠密であることが示されている。M 内の点 p で df の階数が 2 に満たないものを特異点と呼び、特異点全体のなす集合を $S(f)$ と表す。

p を中心とする局所座標 (u, z_1, z_2, z_3) と $f(p)$ を中心とする局所座標 (U, Y) が存在し

(L_1) $U \circ f = u, Y \circ f = \sum \pm z_i^2$ と表せるとき p を折り目特異点という。

p を中心とする局所座標 (u, x, z_1, z_2) と $f(p)$ を中心とする局所座標 (U, Y) が存在して

(L_2) $U \circ f = u, Y \circ f = x^3 + xu + \sum \pm z_i^2$ と表せるとき p をカスプ特異点という。カスプ特異点のなす集合を $C(f)$ と表す。

(L_1) の和記号内の符号がすべて同じであるとき p を定値折り目特異点と呼び、そうではないとき p を不定値折り目特異点と呼ぶ。

4 次元多様体から曲面への安定写像には以下の特徴付けがなされている。$([1])$

Proposition 2.1. 滑らかな写像 $f : M \to N$ が安定写像であることは、以下の 3 条件がすべて成り立つことと同値である。

(L) すべての特異点は折り目特異点であるか、カスプ特異点である。

(G_1) すべての特異点 p に対して $f^{-1}f(p) \cap S(f) = p$ である。

(G_2) $f|_{(S(f)\setminus C(f))}$ が正規交叉を持つはめ込みとなる。

f が安定写像であるとき $S(f)$ は M 内の 1 次元部分多様体でる。条件 (G_2) により、はめ込み $f|_{(S(f)\setminus C(f))}$ の多重点は 2 重点のみである。従って f の各ファイバーには高々 2 個の特異点しか無いことがわかる。

以下で Stein 分解について定義する。$f : M \to N$ を安定写像とする。この写像により自然な同値関係が得られる。すなわち同値関係 $P_0 \sim P_1$ を $f(P_0) = f(P_1) = Q$ であり、かつ P_0 と P_1 が $f^{-1}(Q)$ 内の同じ連結成分にふくまれることと定義する。

同値関係により得られる商集合を W_f と表す。商写像 $q_f : M \to W_f$ により、以下の図式を可換にする写像 $\bar{f} : W_f \to N$ が誘導される。

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ q_f \searrow & & \nearrow \overline{f} \\ & W_f & \end{array}$$

Definition 2.2. このような可換図式による分解を f の **Stein** 分解と呼ぶ。また空間 W_f を f の Stein 分解とも言う。

W_f は 2 次元の多面体であり、一般には多様体ではないことに注意する。また ${q_f}^{-1}(t)$ が 2 個の特異点を含む時 t を $trident$ と呼び trident のなす集合を T と表す。

Definition 2.3. $f : M \to N$ を安定写像とする。すべての $f(M) \setminus f(S(f))$ の点 r に対して、$f^{-1}(r)$ すなわち正則ファイバーが球面の直和となっているとき f を 球面型安定写像と呼ぶ。

3 主定理

Theorem 3.1. $f : M \to N^2$ を 4 次元多様体から曲面への球面型安定写像とする。このとき $\partial V_f = M$ となるコンパクトな 5 次元多様体 V_f 及び、連続写像 $r_f : V_f \to W_f$ であって $r_f|_{\partial V_f} = q_f : M \to W_f$ となるものが存在し、以下の性質を満たす：

(1) 任意の $z \in W_f \setminus (S(f))$ に対し ${r_f}^{-1}(z)$ は D^3 と微分同相である。

(2) $\overline{f} : V_f \to N$ は滑らかな沈め込みである。

(3) V_f の滑らかな 3 角形分割と、W_f の 3 角形分割が存在し r_f が単体写像となる。

(4) r_f の各ファイバーは 1 点に縮約し、r_f はホモトピー同値写像である。

(5) 2 次元多面体 W が V_f 内に存在し、$r_f|_W : W \to W_f$ は T の近傍の補空間で PL 同相写像になり、V_f は $\tilde{W}_f$ に縮約する。

この定理からいくつかの系を得る。

Corollary 3.2. M は閉 4 次元多様体であるとする。M が曲面への球面型安定写像を許容するならば M は零同境である。特に M が向き付けられているならば有向零同境であり、その符号数は 0 である。

Corollary 3.3. $(q_f)_* : \pi_1(M) \to \pi_1(W_f)$ は同型写像である。

Corollary 3.4. $f : S^4 \to N$ は球面型安定写像であるとする。$y \in f(S^4) \setminus S(f)$ に対し、$f^{-1}(y)$ は S^4 内の *homotopy ribbon 2-link* である。

4 球面型安定写像の例

S^3 内の結び目 k に対し、S^4 内のその spun 2 結び目を $\tilde{k}$ と表す。

Theorem 4.1. 任意の結び目 k に対し、正則ファイバーのある連結成分が $\tilde{k}$ とイソトピックとなる球面型安定写像 $g : S^4 \to \mathbf{R}^2$ が存在する。

その具体的な構成方法は ([6]) に与えてある。

References

[1] M. Golubitsky and V. Guillemin, Stable mappings and their singularities, Grad. Texts in Math. 14, Springer, New York, Heidelberg, Berlin, 1973.

[2] H. Levine, Classifying immersions into $\mathbf{R}^4$ over stable maps of 3-manifolds into $\mathbf{R}^2$, Lect. Notes in Math. 1157, Springer, Berlin, 1985.

[3] J. N. Mather, *Stability of C^∞ mappings: VI, the nice dimensions*, Lect. Notes in Math. 192, Springer, 1971, pp.207–253.

[4] P. Porto and Y. K. S. Furuya, *On special generic maps from a closed manifold into the plane*, Topology Appl. **35** (1990), 41–52.

[5] O. Saeki, *Topology of special generic maps of manifolds into Euclidean spaces*, Topology Appl. **49** (1993), 265–293.

[6] O. Saeki and K. Suzuoka, *Generic smooth maps with sphere fibers*, preprint.

[7] K. Suzuoka, *On the topology of sphere type fold maps of 4-manifolds into the plane*, Ph.D Thesis, Univ. of Tokyo, March 2002.