On Aiso's lemma about the projections of pseudo-ribbon 2-knots

Kyohei Yoshida

Dedicated to Professor Yukio Matsumoto for his 60th birthday.

Abstract

The projections of pseudo-ribbon 2-knots are immersions of S^2 into $\mathbb{R}^3$ whose self-intersection sets consist of only double points. Their inverse images are circles on S^2. We show a necessary and sufficient condition to realize as an immersion in $\mathbb{R}^3$ when we arbitrarily decide a configuration of circles on S^2 and how they intersect.

$\mathbb{R}^2$ 上のはめ込まれた S^1 に対して Gauss word というものが定まる。逆に、任意に Gauss word を１つ決めたとき、この word にしたがって $\mathbb{R}^2$ にはめ込まれた S^1 が存在するための簡単な必要十分条件が知られている。

相曽秀昭氏によって pseudo-ribbon 2-knot の射影図になっているような S^2 の $\mathbb{R}^3$ へのはめ込みに対して、Gauss word に対応するものが考えられた。これは自己交叉集合が２重点のみから成り、かつ、いくつかの disjoint な S^1 になっているはめ込みで、２次元球面結び目 $f : S^2 \to \mathbb{R}^4$ は合成写像 $\pi \circ f : S^2 \to \mathbb{R}^3$ がこの条件を満たすとき、pseudo-ribbon 2-knot と呼ばれる。($\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ を自然な射影とする。)

具体的には次の（１)、（２）の情報である。

(1) 自己交叉集合は２重点のみからなり、いくつかの disjoint な S^1（これを crossing circle と呼ぶ。）になっているので、その引き戻しは２倍の

数の S^2 上の S^1 になっている。これらの S^1 たちが S^2 上でどのように配置されていて、どのような組み合わせで $\mathbb{R}^3$ の中で重なるか。

(2) 各 crossing circle の $\mathbb{R}^3$ での管状近傍とはめ込まれた S^2 との共通部分は transverse に交わる２つの annnurus になっている。この２つの annulus がどのように交わるか。

ここで（２）の２つの annulus の交わり方のパターンは、S^2、$\mathbb{R}^3$ に向きを入れたもとで４つある。

逆に、（１）、（２）の情報を任意に決めたとき、$\mathbb{R}^3$ のはめ込みとして実現するための必要十分条件を見つけた。（１）、（２）の情報を決めると、この情報にしたがって S^2 がはめ込まれた connected oriented campact 3-manifold ができる。

（この 3-manifold の境界の連結成分数）＝（crossing circle の数）＋２

が必要十分条件である。また、（１）、（２）の情報を決めただけでは、はめ込みが一意に決まらないことが一般的に知られている。一方で、（１）、（２）の他に各 crossing circle で上下の情報を入れて、結び目図式にすると球面結び目が一意に決まるという定理が 1984 年に相曽氏によって示されている。

[参考文献]　相曽秀昭：“crossing circle が 5 本以下である simply knotted sphere の分類について”, 東京大学修士論文（1984)