

# The 7th Takagi Lectures

## ABSTRACT

### Michael Harris: *Arithmetic applications of the Langlands program*

(ラングランズ・プログラムの数論的応用)

The functoriality conjecture is at the heart of the Langlands program and will undoubtedly remain as a challenge to number theorists for many decades to come. Shortly after formulating his program, however, Langlands proposed to test it in two interdependent settings. The first was the framework of *Shimura varieties*, already understood by Shimura as a natural setting for a non-abelian generalization of the Shimura–Taniyama theory of complex multiplication. The second was the phenomenon of endoscopy, which can be seen alternatively as a classification of the *obstacles* to the stabilization of the trace formula or as an *opportunity* to prove the functoriality conjecture in some of the most interesting cases. After three decades of research, much of it by Langlands and his associates, these two closely related experiments are coming to a successful close, at least for classical groups, thanks in large part to the recent proof of the so-called *Fundamental Lemma* by Waldspurger, Laumon, and especially Ngô.

My primary interest in these lectures is to give an account of these developments insofar as they are relevant to the Galois groups of number fields. Algebraic number theorists are just beginning to take stock of the new information provided by the successful resolution of the problem of endoscopy and the analysis of the most important classes of Shimura varieties. I will devote special attention to the application in this setting of the methods pioneered by Wiles, and developed further by Taylor, Kisin, and others, in his proof of statements in non-abelian class field theory that imply Fermat’s Last Theorem.

関手性予想はラングランズ・プログラムの核心であり、今後数十年にわたり数論家への挑戦であり続けることは間違いない。しかし、プログラムの定式化後まもなく、ラングランズは、それを2つの独立した設定で確かめることを提案した。1つめは、志村によって、すでに志村・谷山の虚数乗法論の非可換化の自然な枠組みとして理解されていた、志村多様体である。2つめは、内視の現象である。これは、跡公式の安定化への障害の分類としてあるいは、関手性予想がそのもっとも興味深いいくつかの場合に証明される機会と考えられる。30年におよぶ研究のうち、ラングランズと彼に続く研究者により、これらの2つのたがいに密接に関係した研究は、少なくとも古典群の場合には、成功に導かれた。これはおもに、ワルツプルジェ、ローモン、なかでもンゴーによる最近の基本補題の証明によるものである。

講演では、これらの進展について、代数体のガロワ群に関連した部分を解説することを主要な目標とする。代数的整数論の研究者は、内視の問題の解決と志村多様体のもっとも重要なクラスから得られる新しい情報を蓄積し始めたところである。なかでも、ワイルスがフェルマーの最終定理を導く非可換類体論の定理の証明で開発し、テイラー、キンらがさらに発展させた、この枠組みにおける手法の応用について解説する。

### Michael Hopkins: *The Kervaire invariant problem*

(ケルヴェア不変量問題)

The existence of framed manifolds of Kervaire invariant one is one of the oldest unresolved problems in algebraic topology. Important questions about smooth structures on spheres and on the homotopy groups of spheres depend on its solution. In these talks I will describe joint work with Mike Hill and Doug Ravenel which solves this problem in all dimensions except 126.

ケルヴェア不変量が1の枠付き多様体が存在するかという問題は、代数的位相幾何学におけるもっとも古い未解決問題の一つである。球面の微分構造や、ホモトピー群に関する重要な問題が、この問題に関係している。この講演では、この問題を126次元の場合を除いて解決したMike HillとDoug Ravenelとの共同研究の解説を行う。

### Uwe Jannsen: *Weights in arithmetic geometry*

(数論幾何における重さの概念)

The concept of weights on the cohomology of algebraic varieties was initiated by fundamental ideas and work of A. Grothendieck and Pierre Deligne. It is deeply connected with the concept of motives and appeared first on the singular cohomology as the weights of (possibly mixed) Hodge structures and on the étale cohomology as the weights of eigenvalues of Frobenius. But weights also appear on algebraic fundamental groups and in p-adic Hodge theory, where they become only visible after applying the comparison functors of Fontaine. After rehearsing various versions of weights, the talk will present some more recent applications of weights, e.g., to Hasse principles and the computation of motivic cohomology, and will discuss some open questions and speculations.

代数多様体のコホモロジーの重さの概念は、グロタンディエックとドリーニュによる基本的な着想と業績によりはじまった。これは、モチーフの概念と深く結び付き、初めは特異コホモロジーの(混合)ホッジ構造としての重さそしてエタールコホモロジーのプロベニウス固有値の重さとして現れた。重さは、そればかりでなく、代数的基本群や、フォンテーヌの比較関手を適用して初めてわかるものであるが、p進ホッジ理論にも現れる。重さのさまざまな現れ方を概観したのちに、最近の重さの応用、たとえば、ハッセ原理やモチヴィックコホモロジーの計算を紹介し、未解決問題や展望についても論じる。

## Chandrashekar Khare: *Serre's conjecture and its consequences*

(セール予想とその帰結)

I will give a historically motivated account of Serre's conjecture about mod  $p$  representations of the absolute Galois group of the rationals. This was proved by J-P. Wintenberger and myself, together with a certain input of Kisin.

The context in which Serre made his conjecture was the work of Serre and Swinnerton-Dyer which explained the congruences Ramanujan had found for the Ramanujan  $\tau$ -function. The explanation was via the study of images of Galois representations Deligne attached to the Ramanujan  $\Delta$ -function (again conjectured by Serre). Here  $\Delta(z) = q\Pi(1 - q^n)^{24} = \sum_n \tau(n)q^n$  with  $q = e^{2\pi iz}$ .

I will also explain some of the consequences of Serre's conjecture. For instance it implies Artin's conjecture for 2-dimensional, complex, odd representations of the absolute Galois group of the rationals.

I will also talk about the ideas of the proof and some questions they lead to.

有理数体の絶対ガロワ群の法  $p$  表現に関するセール予想について、歴史的側面を重視して解説する。セール予想はヴァンタンヴェルジェと私により、キシンの結果も用いて、証明されたものである。

セール予想の定式化は、セール自身とスウィンナートン・ダイヤーによる、ラマヌジャンのtau関数の合同についてのラマヌジャンの予想の、意味づけに導かれたものであった。これは、セールが予想し、ドリーニュが構成した、ラマヌジャンのデルタ関数にともなうガロワ表現の像の研究によって与えられた。ここで  $\Delta(z) = q\Pi(1 - q^n)^{24} = \sum_n \tau(n)q^n$  である。ただし  $q = e^{2\pi iz}$ 。

セール予想の帰結についても、いくつか解説する。たとえば、有理数体の絶対ガロワ群の2次元複素表現についてのアルティン予想がしたがう。

また、証明の方針や関連した問題についても解説する。

## James McKernan: *Mori dream spaces*

(森ドリーム空間)

A fundamental result of Hilbert says that if  $R$  is a finitely generated  $\mathbb{C}$ -algebra then the ring of invariants  $R^G$  is finitely generated, provided  $G$  is a reductive algebraic group (for example products of the multiplicative group  $(\mathbb{C}^*)^k$ ). Nagata gave examples where  $R$  is a polynomial ring and  $G = \mathbb{C}^k$  is a product of the additive group and yet  $R^G$  is not finitely generated. In fact  $R^G$  is the total coordinate ring of a blow up of projective space  $\mathbb{P}^n$ .

If  $X$  is a projective variety and the Cox ring is finitely generated then  $X$  is called a Mori dream space; every toric variety and every Fano variety is a Mori dream space. As the name might suggest, Mori dream spaces have very many nice properties; every section ring is finitely generated; flips always terminate; there is a natural combinatorial structure to the set of minimal models, and all of this controlled by the geometric invariant theory of some Thaddeus master space. We will explore this circle of ideas in the talk.

ヒルベルトの基本的な結果によれば、 $R$  が有限生成な  $\mathbb{C}$ -代数であれば、 $G$  が簡約代数群のとき (たとえば、乗法群の直積  $(\mathbb{C}^*)^k$  のとき)、不変環  $R^G$  も有限生成である。永田は  $R$  が多項式環で、 $G = \mathbb{C}^k$  が加法群の直積であるときに、 $R^G$  が有限生成ではない例を与えた。実際は  $R^G$  は、射影空間  $\mathbb{P}^n$  のブローアップの全座標環である。

$X$  が射影的多様体で、そのCox環が有限生成であるとき、 $X$  を、森ドリーム空間と呼ぶ。任意のトーリック多様体と任意のFano多様体は森ドリーム空間である。名前が示す通り、森ドリーム空間は、たいへん多くのよい性質を持つ。任意の切断環は有限生成であり、フリップは常に終止し、極小モデルの集合には自然な組み合わせ論的構造が入り、これらはすべて、あるThaddeusマスター空間の幾何学的不変式論によってコントロールされる。講演ではこれらの一連のアイデアを解説する。