非リーマン等質空間の不連続群について

小林俊行 (Toshiyuki Kobayashi)

1　序 — 空間形問題

1.1　擬リーマン多様体の定曲率空間

局所から大域への研究は，20 世紀の幾何学における大きな流れの一つであり，とりわけリーマン幾何において著しい発展をとげた．その一方で，相対性理論の時空としておなじみのローレンツ幾何やもっと一般に擬リーマン幾何 (正定値とは限らない[1] 計量の幾何)，あるいはそれ以外の種々の幾何 (シンプレクテック幾何，複素幾何，. . .) に対しては，局所的に均質な構造を課した場合でさえ，その大域的な性質については驚くほど何も知られていない．

他方，リー群の表現論およびそれを用いた大域解析の分野 (非可換調和解析) においては，20 世紀を通じた大きな流れの中で

コンパクト	$\Longrightarrow$	非コンパクト
リーマン多様体	$\Longrightarrow$	擬リーマン多様体
有限次元表現	$\Longrightarrow$	無限次元表現

と研究対象が拡がるにつれて，研究手法の質的な変革が起こり，さらに偏微分方程式・関数解析・微分幾何・代数幾何などさまざまな数学の分野との結びつきが深まっている．

このような背景の中で 1980 年代の半ば頃より，筆者は擬リーマン多様体の世界でも不連続群論を展開することができるか気になりはじめた．しばらくして，Calabi-Markus 現象の必要十分条件を証明することができ，それをきっかけとして，リーマンとは限らないが良い幾何構造をもつ等質空間 (たとえば，半単純対称空間や随伴軌道空間) における不連続群の一般論の研究に本格的にとりくむことになった．

リーマン対称空間の不連続群論では 100 年以上にわたって広く深く研究が発展してきたが，それとは対照的に，1980 年代当時は非リーマン等質空間の不連続群論に興味を示す研究者は殆どおらず，孤独ではあったが何をやっても新しい発見になった．基礎的な結果に関する筆者の一連の論文 [17, 18, 19, 28] が出版された後，ようやく 1990 年代に入って，フランスやアメリカで Benoist, Labourie, Zimmer, Lipsman, Witte など異なる分野の専門家たちが，この問題に参入し始めた．その後，非リーマン等質空間の不連続群に関してこの 10 年あまりで急速に開発された研究手法やそのアイディアは，リー群論や離散群論だけでなく，微分幾何学，代数学，エルゴード理論，力学系理論，ユニタリ表現論 $\cdots$ など既に一人の数学者ではカバーしきれないほど多岐にわたってきている ([4, 5, 9, 15, 17, 28, 34, 35, 40, 43, 46, 56, . . .])．

たとえば，Margulis, Oh, Shalom, 筆者らによる最近の研究 ([23, 35, 40, 46]) において，非リー

マン等質空間への離散群の作用と不連続群との差異を理解するという基本的な問題が，ユニタリ表現の非コンパクト部分群への制限という一見無関係の話題とつながり始めているのもその一例であろう．

この論稿の序として，“曲がり方が一定” という (ある意味では) 最も簡単な空間の “とりうる大域的な形について”，どんな問題意識が考えられ，また現在何が知られていて何が未解決か，整理してまとめてみよう．正確に述べるために次の定義を復習する．

定義. 断面曲率が一定の擬リーマン多様体を**空間形 (space form)** という．

例えば，符号が $(n,0)$(リーマン多様体) の場合，球面 S^n は曲率正の空間形，**双曲空間**は曲率負の空間形である．また，符号が $(n-1,1)$ (ローレンツ多様体) の場合，**ド・ジッター空間**[2]は曲率正の空間形，**ミンコフスキー空間**は曲率 0 の空間形，**反ド・ジッター空間**が曲率負の空間形である．

ここでは大域的な性質に興味があるので，空間形というときは，測地的に完備であることを仮定する．この節では次の問を主題としよう．

(局所的な仮定)　符号 (p,q) の擬リーマン多様体で曲率 κ の空間形[3]には，
(大域的な結論)　コンパクトなものが存在するか？
　　　　　　　　またその基本群としてどのような群が現れうるか？

1.2　２次元の場合

球面 S^2, トーラス $\mathbb{T}^2$, 種数 g の閉リーマン面 M_g $(g \geq 2)$ に対して，それぞれ曲率が正, 0, 負の空間形となるようにリーマン計量を入れることができる．言い換えると，2 次元のリーマン幾何では，任意の曲率 κ に対してコンパクトな空間形が存在する．これは次元を一般にしても同様である．

ところが，符号が $(1,1)$ のローレンツ計量の場合，$\kappa \neq 0$ ならばコンパクトな空間形が存在しない．実際，球面 S^2 や M_g $(g \geq 2)$ にはローレンツ計量を入れることさえできない[4]．そして，$\mathbb{T}^2$ に定曲率 κ のローレンツ計量が入るとすれば，Gauss-Bonnet の定理から $\kappa = 0$ になってしまうのである．

1.3　正曲率の場合

リーマン多様体の場合は，正曲率の空間形の典型例は球面 S^n である．逆に，完備なものは，S^n か，せいぜいそれを適当な有限群[5]で割ったものに限られる.「正曲率の空間形の基本群は**有限群**である」という性質に関して，2 つの古典的定理を思い出そう．

１つ目は，計量が正定値 (すなわちリーマン多様体) という性質はそのままにしておいて，曲率 (あるいは計量) の方を摂動させるのである．

定理 1 (Myers 1941 [38]). Ricci 曲率の下限が正となる，完備なリーマン多様体は，基本群が有限，かつ，コンパクトである．

もう 1 つは，曲率が正で一定という性質はそのままにしておいて，計量が正定値 (リーマン多様体) という仮定を変えるのである．

定理 2 (Calabi-Markus 1962 [8]). 3 次元以上のローレンツ幾何における正曲率の空間形は，基本群が有限，かつ，非コンパクトとなる．

定理 2 はもっと一般に，

ローレンツ多様体	$\Longrightarrow$	一般の符号の擬リーマン多様体へ
断面曲率一定	$\Longrightarrow$	局所的に均質な空間へ

という形で，**等質空間における不連続群**の問題として定式化できる．ここで，G の離散部分群 Γ が**等質空間** G/H **の不連続群**であるとは，Γ の G/H への左作用が固有不連続かつ自由であるときをいう（詳しくは第 2 節参照）．次の定理は定理 2 を特別な場合として含む定式化となっている．

定理 3 (Calabi-Markus 現象の判定条件, 1989 [17]). $G \supset H$ が簡約リー群の組のとき, 等質空間 G/H に位数無限の不連続群が存在する $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank}_{\mathbb{R}} G > \operatorname{rank}_{\mathbb{R}} H$.

逆に, この定理を種々の等質空間の例で実験すると，次の予想が成り立ちそうに思われる．

予想 4 ([27]). $p \geq q > 0,\ p+q \geq 3$ とする．断面曲率の下限が正となる[6]，符号 (p,q) の完備な擬リーマン多様体は，基本群が有限，かつ，非コンパクトである．

1.4 曲率 0 の場合

リーマン多様体の場合，曲率 0 の空間形の典型例は n 次元トーラス $\mathbb{T}^n$ であり，その基本群は $\mathbb{Z}^n$ という可換群である．もっと一般に，曲率 0 の空間形の基本群も可換群に近いというのが，次の定理である:

定理 5 (Bieberbach 1911). 断面曲率が恒等的に 0 である完備なリーマン多様体の基本群は，可換群を有限指数の部分群として含む.

類似の定理が擬リーマン多様体で成り立つかどうかは未解決である:

予想 6 (Auslander 予想の特別な場合). 断面曲率が恒等的に 0 であるコンパクトな擬リーマン多様体の基本群は，可解群を有限指数の部分群として含む.

予想 6 はローレンツ多様体の場合には正しい (Goldman-神島 1984 [12], Tomanov)．もっと一般に，アファイン多様体という仮定の下で Bieberbach の定理を拡張できるだろうというのが本来の **Auslander 予想**である．さらに，強い形も考えられる:

問題 7 (Milnor 1977 [37]). $\mathbb{R}^n$ $(\simeq (GL(n,\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n)/GL(n,\mathbb{R}))$ の不連続群 (§2 参照) は可解群を有限指数の部分群として含むか？

この Milnor の問題に対しては Margulis (1983) が $n=3$ の場合に反例を与えた (定理 11)．一方，Milnor の問題の continuous analogue である次の命題

「$\mathbb{R}^n$ に固有に作用 (§2) する連結部分群は amenable，すなわち，可解群のコンパクト拡大である」

が成り立つことは知られている (筆者 1993 [20], Lipsman 1995 [34]). 本来の Auslander 予想は未解決であるが，Abels-Margulis-Soifer (1997) は 6 次元以下の場合には成り立つと発表した ([1, 2, 36]). また，関連する話題として冪零多様体の不連続群や固有な作用に対する Lipsman 予想 (1995) [34] が知られている．Lipsman 予想については Nasrin, 吉野太郎, Baklouti, Khlif らによってごく最近決定的な結果が得られた．すなわち，冪零多様体の次元が 4 以下では正しく ([51])，5 次元以上では反例がある ([52])．また 3-step 以下の冪零リー群に対しては正しく ([3, 39, 54])，4-step 以上では反例がある ([52]).

1.5 負曲率の場合

リーマン多様体の場合は負曲率の空間形 (双曲多様体) でコンパクトなものが存在する．これは，ローレンツ群 $O(n,1)$ の一様格子が存在する[7]ことと同値である．ところが，一般の擬リーマン多様体の場合では，どのような符号 (p,q) のとき，**コンパクトな (負曲率の) 空間形が存在するか**という基本問題は現時点においても完全解決に至っていない．この問題に関する次の予想は，簡約型等質空間の一様格子の存在に関する予想 17 を，等質空間 $O(p,q+1)/O(p,q)$ に特殊化したものである:

予想 8 (空間形予想，1996). 断面曲率が負の定数である，符号 (p,q) のコンパクト擬リーマン多様体が存在するための必要十分条件は，p,q が次のリストに入っているときである．ただし，$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\cdots\}$.

q	$\mathbb{N}$	0	1	3	7
p	0	$\mathbb{N}$	$2\mathbb{N}$	$4\mathbb{N}$	8

上の条件の十分性は証明されている．$q=0$ の場合は既述したように双曲多様体 (リーマン多様体) であり，$q=1,3$ の場合は Kulkarni (1981) [30] によって発見された．$q=7$ の場合は，90 年代に入って一般の等質空間における一様格子の構成定理 (定理 15) を適用することによって発見された ([21]).

上の条件が必要であるかどうかは，未解決である．なお，$q=1$ や $p \leq q$ や pq が奇数などの場合は正しいことが証明されている．最後に述べた「奇数条件」は，小野薫氏と筆者によって特性類に関する Hirzebruch の比例性原理を一般化するという手法で，一般の簡約型等質空間 (もっとも典型的な擬リーマン等質空間) に対して拡張されている ([28])．(これらの話題に関して詳しくは [27] や [31] に挙げられた文献を参照されたい).

2 不連続な作用と Clifford-Klein 形

空間形問題は極めて特殊な空間を扱っているが，それでも多くの未解決な問題が残っていることを前節で述べた．しかし，その場合に限っても個々の事例ではなく，**(非リーマン) 等質空間における不連続群**という一般的な視点[8]から研究する方が，見通しが明るくなる場合がある．そこで，この節では「等質空間における不連続群」と「離散部分群」との違いを強調しながら基礎的な概念と具体例を解説する．さらに残りの紙面で空間形問題で説明した問題意識を頭の片隅に残しつつ，一般

的な枠組でどこまで不連続群の世界が拡がるか (できるだけ，リー群論の言葉は使わずに) 述べてみたい．

まず，リーマン多様体においては等長変換からなる部分群に関して

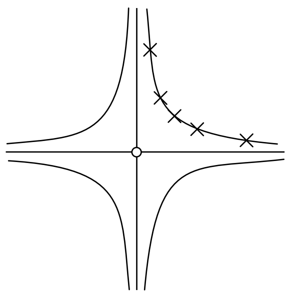
$$\text{離散群} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{不連続群}$$

である．ところが，擬リーマン多様体では，等長変換からなる部分群に関して，

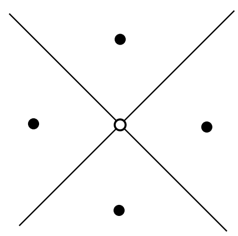
$$\text{離散群} \quad \underset{\Longleftarrow}{\not\Longrightarrow} \quad \text{不連続群}$$

であり，離散群の作用による商空間は Hausdorff になるとは限らない．例えば，離散群の軌道は必ずしも閉集合とは限らない．これは商空間の位相では 1 点が閉集合でないことに対応するから特に Hausdorff ではない．このように，局所的な理由で Hausdorff にならない場合もあるが，位相空間において Hausdorff は大域的な性質であり，もっと微妙な反例もある．その 1 つが下記の例である．そこでは集積点が存在しないのに商空間が (大域的な理由で) Hausdorff にならない[9]．

例. 離散群 $\mathbb{Z}$ を $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ に　$\mathbb{Z} \times X \to X, \quad (n,(x,y)) \mapsto (2^n x, 2^{-n} y)$ によって作用させる ($\mathbb{Z}$-軌道は $xy =$ 定数なる双曲線または x 軸，y 軸に含まれる．左下図の $\times$ は第 1 象限内の 1 つの $\mathbb{Z}$-軌道を表す)．この $\mathbb{Z}$ の作用は X 内に集積点をもたないが，商空間 $\mathbb{Z}\backslash X$ は Hausdorff でない．実際，$\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R} \to \mathbb{R}\backslash X \to \mathbb{Z}\backslash X$ というファイバー束を考えれば，商空間 $\mathbb{Z}\backslash X$ は，右下図に図示した 4 本の半直線と 4 つの点に非 Hausdorff 位相を与えた空間を底空間とする S^1-束と同相であることがわかる．



$\mathbb{Z}$-軌道



$\mathbb{R}\backslash X \simeq 4$ 本の半直線と 4 つの点（完全代表系）

第 2 節, 第 3 節では，このような例を群論的にどうやって解釈するか，が主題となる．

最初に，いくつかの基本的な用語を準備しておこう．まず，位相群 Γ が連続に位相空間 X に作用しているという設定を考える．X の部分集合 S に対して，Γ の部分集合を以下のように定義する:

$$\Gamma_S := \{\gamma \in \Gamma : \gamma \cdot S \cap S \neq \emptyset\}.$$

定義. 1) $\Gamma \curvearrowright X$ は，X の任意のコンパクト集合 S に対して Γ_S が有限となるとき，**固有不連続**な作用 (あるいは**真性不連続**な作用) であるという．

2) $\Gamma \curvearrowright X$ は，X の任意のコンパクト集合 S に対して Γ_S がコンパクトとなるとき，**固有**な (proper) 作用であるという．

3) $\Gamma \curvearrowright X$ は，任意の $p \in X$ に対して p における固定部分群 $\Gamma_{\{p\}}$ が単位元のみからなるとき，**自由な**(free) 作用であるという．

非コンパクト群の作用は良い振る舞いをするとは限らない．コンパクト群の作用の "良い性質" を抽出したのが "固有な作用" (Palais 1961, [44]) という概念である．ところが，上のように固有不連続と並べて書くと，次の図式が浮かび上がる．

$$(\Gamma\ \text{の作用が})\ \text{固有不連続} = (\Gamma\ \text{の作用が})\ \text{固有} + (\Gamma\ \text{が})\ \text{離散群}$$

従って，離散群の作用が固有不連続かどうかを判定するためには，作用が固有かどうかがわかればよい．そして後者の方が応用範囲が広い．

さて，群 Γ が集合 X に作用しているとき，次の同値関係

$$x \sim x' \Leftrightarrow\ x' = \gamma \cdot x\ \text{となる}\ \gamma \in \Gamma\ \text{が存在する}$$

によって定まる X の同値類のなす集合を $\Gamma\backslash X$ と書く．$\Gamma\backslash X$ は X における Γ-軌道全体のなす集合とみなすこともできるので，(Γ の) **軌道空間**と呼ばれる．Γ の固有不連続な作用を考えるのは次の良く知られた理由による:

補題. 離散群 Γ が［C^∞ 級，擬リーマン，複素，...］多様体 X に連続に［滑らかに，等長的に，双正則に，...］作用しているとする．Γ の作用が固有不連続かつ自由ならば，$\Gamma\backslash X$ は商位相に関して Hausdorff になり，しかも商写像 $X \to \Gamma\backslash X$ が局所同相［微分同相，等長，双正則，...］になるような多様体の構造を一意的にいれることができる．

以下では，X がリー群 G の等質空間 G/H であり，Γ は G の離散部分群とする．すなわち，登場するのは次の群の三つ組である:

$$\Gamma \subset G \supset H.$$

定義. Γ が G/H に固有不連続かつ自由に作用するとき，Γ を**等質空間 G/H の不連続群**という．ここでは「固有不連続」という条件が最も重要であり，不連続群の定義に「自由」という条件を課さない流儀の文献もある．Γ が G/H の不連続群のとき，両側剰余類として得られる多様体 $\Gamma\backslash G/H$ を G/H の **Clifford-Klein 形**という．さらに $\Gamma\backslash G/H$ がコンパクトのとき，Γ を等質空間 G/H の**一様格子**という．

例. 1) $(G, \Gamma, H) = (\mathbb{R}^n, \mathbb{Z}^n, \{0\})$ とすると，Clifford-Klein 形 $\Gamma\backslash G/H$ は n 次元トーラス $\mathbb{T}^n$ に微分同相であり，従ってコンパクト多様体である．

2) (**冪零多様体**) $G := \{\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R}\}, \Gamma := G \cap GL(3, \mathbb{Z}), H = \{e\}$ とすると Clifford-Klein 形 $\Gamma\backslash G/H$ は 3 次元コンパクト多様体 (**岩澤多様体**) である．

3) (**モジュラー群**) $(G, \Gamma, H) = (SL(2, \mathbb{R}), SL(2, \mathbb{Z}), \{e\})$ とするとき，Clifford-Klein 形 $\Gamma\backslash G/H$ はコンパクトではないが，(自然に定まる測度に関して) 有限の体積をもつ．さらに，$\Gamma\backslash G/H \simeq \mathbb{R}^3 \setminus \{$ 三つ葉結び目 $\}$ (同相).

4) (**閉リーマン面**) 種数 $g \geq 2$ の閉リーマン面 M_g は, Poincaré の上半平面 $G/H = SL(2, \mathbb{R})/SO(2)$

の Clifford-Klein 形 $\Gamma\backslash G/H$ として実現できる．ここで $\Gamma \simeq \pi_1(M_g)$.
5) (**Calabi-Markus 現象**) $G = SL(2,\mathbb{R})$，H を G の任意の非コンパクトな閉部分群とする．このとき，G/H の不連続群は有限群に限る．特に，H および G/H が非コンパクトならば，G/H には一様格子が存在しない．
6) (コンパクトなローレンツ空間形) $(G,H) = (SO(2n,2), SO(2n,1))$ とし，Γ を $U(n,1)$ の捻れ元のない一様格子とする．$\Gamma \subset U(n,1) \subset G$ によって Γ を G の離散部分群とみなすと，Γ は等質空間 G/H の一様格子となる．なお，この Γ は G の一様格子になりえない．

上記の (5) や (6) でみられるように，H が非コンパクトのとき，以下の注意は重要である:

$$\text{群 } G \text{ の一様格子} \neq \text{等質空間 } G/H \text{ の一様格子}$$

3 不連続性の判定条件

この節では次の問題について議論する．

問題 A. 離散部分群 Γ が等質空間 G/H に固有不連続に作用するかどうかを判定する効果的な方法を見つけよ．

位相空間における固有不連続な作用の定義そのものは簡単な記述によってなされている．しかし，一般にリー群 G の離散部分群 Γ が与えられたとき，等質空間 G/H への Γ の作用が固有不連続かどうかを実際に判定することは容易ではない．問題 A における “判定条件” は，たとえば，次のような諸定理が応用例として得られるくらいに具体的で強力な判定条件であることが望ましい．

定理 9 (負曲率をもつ符号 (p,q) の擬リーマン多様体の空間形 [8, 48, 30, 17]).
$O(p,q+1)/O(p,q)$ の不連続群は有限群に限る $\Leftrightarrow p \le q$.

定理 10 (可解多様体，1993; [20] [34]). 可解リー群の任意の等質空間は，基本群が無限位数となる Clifford-Klein 形をもつ．

定理 11 (アファイン平坦な多様体，Margulis 1983 [2]). $(GL(3,\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^3)/GL(3,\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^3$ は非可換自由群をその不連続群としてもつ．

定理 12 (擬リーマン等質空間，Benoist 1996 [4]). $SL(3,\mathbb{R})/SL(2,\mathbb{R})$ は非可換自由群をその不連続群としてもたない．

さて，非リーマン等質空間 G/H に対する不連続群の従来のアプローチは，極めて特別な場合 (例えば §1 で扱ったようなランク 1 の対称空間) に絞って研究し，個別の等質空間 G/H が持つ特有の性質をうまく利用するものであった．この手法だと，G/H がランク 1 の対称空間であっても，膨大な計算が必要になる ([8, 30, 48, 49, ...])．そこで，より一般の非リーマン等質空間 (H は非コンパクト) の不連続群を扱うために，筆者は [17, 22] で次のようなアイディアを導入した．

1. H が群であることも等質空間 G/H が多様体であることも**忘れる**.
2. Γ が離散であることも群であることも**忘れる**.

このように，(一見) 大事な情報を一度忘れてしまうことによって, 次が可能になる:

3. Γ, H を G 内の**対等な**, 単なる部分集合とみなす.
4. $\Gamma \curvearrowright G/H$ の不連続性を群 G の表現論で統制する.

このアイディアを具現化するために，$\pitchfork$ と $\sim$ という関係を局所コンパクト群 G の部分集合 H，L に対して[10]以下のように定義しよう.

定義 ([22]). 1) (G において) $L \pitchfork H \Leftrightarrow G$ の任意のコンパクト部分集合 S に対して $L \cap SHS$ が相対コンパクトである[11].

2) (G において) $L \sim H \Leftrightarrow G$ のコンパクト集合 S で，$L \subset SHS$ かつ $H \subset SLS$ を満たすものが存在する.

群 G が可換ならば，$\pitchfork$ や $\sim$ の関係は著しく簡単になる.

例. H と L を可換群 $G := \mathbb{R}^n$ の部分空間とする.
1) G において $H \pitchfork L$ である $\Leftrightarrow H \cap L = \{0\}$.
2) G において $H \sim L$ である $\Leftrightarrow H = L$.

さて，L と H を G の閉部分群とすると，

$$G \text{ において } L \pitchfork H \Leftrightarrow L \text{ が } G/H \text{ に固有に作用する}$$

が成り立つ．従って $\pitchfork$ は固有な作用を一般化した概念とみなせる．すなわち，固有な作用 (あるいは固有不連続な作用) を理解するためには $\pitchfork$ という関係を理解すればよい．さらに，

$$L \pitchfork H \Leftrightarrow H \pitchfork L$$

が成り立つ．これは L の G/H への作用と H の G/L への作用の一種の双対性を反映している．また，

$$H \sim H' \text{ ならば，} \quad L \pitchfork H \Leftrightarrow L \pitchfork H'$$

が成り立つので, $\sim$ は $\pitchfork$ を考える上で思考の節約になる. G の部分集合 H に対し，その**不連続双対** $H^{\pitchfork}$ を次の式で定義する：

$$H^{\pitchfork} := \{L : L \text{ は } G \text{ の部分集合で，} L \pitchfork H \text{ を満たす} \}$$

まず，次の定理が成り立つ．この定理は G が簡約リー群の場合には筆者 (1996) によって証明された ([22])．一般の場合に成り立つかどうかは [27] で取り上げた未解決問題の 1 つであったが，吉野太郎 (2004) は肯定的に解決した ([53]).

定理 13 (双対定理). リー群 G の部分集合 H は，同値関係 $\sim$ の分を除いて，**不連続双対** $H^{\pitchfork}$ によって復元される.

我々の本来の目標は離散群の作用が固有不連続であるかどうかを具体的に判定することであった. 問題 A はより一般的な形で再定式化される.

問題 A′. H と L を G の部分集合とする．$L \pitchfork H$ であるための判定条件を求めよ．

G を簡約線型リー群 (例えば $GL(n,\mathbb{R})$ や $O(p,q)$ など) とする．G のリー環 $\mathfrak{g}$ の Cartan 分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ とし，$\mathfrak{p}$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ をとる．

$$d(G) := \dim \mathfrak{p}, \quad \operatorname{rank}_{\mathbb{R}} G := \dim \mathfrak{a}$$

とおく．さらに，Cartan 分解 $G = K \exp(\mathfrak{a}) K$ を用いて **Cartan 射影** $\nu : G \to \mathfrak{a}$ を定義する (Weyl 群の作用を除いて定まる)．

例えば, $G = GL(n,\mathbb{R})$ ならば, $d(G) = \frac{1}{2}n(n+1)$, $\operatorname{rank}_{\mathbb{R}} G = n$ である．正方行列 $g \in G$ に対して，行列 ${}^t gg$ は正定値対称行列であり，その固有値を大きい方から順に並べて $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n (> 0)$ と書く．このとき，Cartan 射影 $\nu : G \to \mathbb{R}^n$ は次の式で与えられる: $g \mapsto \frac{1}{2}(\log \lambda_1, \ldots, \log \lambda_n)$.

以上の準備の下で，問題 A(あるいは問題 A′) の答は次のように与えられる．

定理 14 (不連続性の判定条件 [17, 22]). H と L を簡約線型リー群 G の部分集合とする．

1) G において $L \sim H \Leftrightarrow \mathfrak{a}$ において $\nu(L) \sim \nu(H)$.

2) G において $L \pitchfork H \Leftrightarrow \mathfrak{a}$ において $\nu(L) \pitchfork \nu(H)$.

可換群 $\mathfrak{a} \simeq \mathbb{R}^n$ に対しては $\pitchfork$ や $\sim$ の関係式の意味は簡単である．したがって，定理 14 が判定条件として役立つのである．

問題 A′ は三つ組の簡約リー群 (G,H,L) に対しては 1989 年に筆者によって解決され ([17])，その後 [22] で L と H に群構造さえ仮定しない上記の形に一般化された ([22] とは独立に Benoist [4] も同様の一般化を証明した)．なお既述の定理 3，定理 9，定理 12 は定理 14 の Corollary として得られる．また定理 14 の形のように一般化しておくことによって，離散群を変形したときに固有不連続性がどの程度保たれるか (たとえば，Goldman (1985) ([11]) の予想) を調べることが可能になった ([24, 41, 45])．この話題については第 5 節でふれる．その他，具体的な等質空間に対して定理 14 を適用した結果については Iozzi, Oh, Witte らの最近の研究 (2001∼) がある ([14, 27, 42]).

なお, 定理 14 の (1) の $\Leftarrow$ と (2) の $\Rightarrow$ は自明である．また, (1) における $\Rightarrow$ は行列を摂動させたときの**固有値の誤差評価を一様**に行う[12]ことに関連している．

4 コンパクトな Clifford-Klein 形の存在問題

4.1 一様格子の存在と非存在定理

以下，$G \supset H$ を簡約線型リー群の組とする．G/H は擬リーマン等質空間 (H がコンパクトならばリーマン) の典型例である．この節では次の問題を論ずる．

問題 B. どのような等質空間 G/H に一様格子が存在するか？ (コンパクトな Clifford-Klein 形をもつような等質空間を分類せよ．)

現在知られている諸結果の中で最も適用範囲が広い結果を 2 つ述べよう．その証明において鍵となるのは，固有な作用の判定条件 (定理 14) と離散群のコホモロジーである．

定理 15 (1989 [17]). G において簡約な部分群 L で

$$L \pitchfork H \text{ かつ } d(L) + d(H) = d(G)$$

をみたすものがあれば, G/H にはコンパクトな Clifford-Klein 形が存在する.

定理 16 (1992 [19]). G において簡約な部分群 L で

$$L \sim H \text{ かつ } d(L) > d(H)$$

をみたすものがあれば, G/H にはコンパクトな Clifford-Klein 形が存在しない.

定理 15 の条件を満たす (G, H) のリスト[13]は [21] 参照．定理 16 の条件を満たす (G, H) のリストは [19, 21] 参照.

Γ を捻れ元のない L の一様格子とすると，定理 15 の仮定が満たされているとき，$\Gamma\backslash G/H$ がコンパクトな Clifford-Klein 形となる．逆に $\Gamma\backslash G/H$ がコンパクトな Clifford-Klein 形としても，Γ を含むような簡約な部分リー群 L で定理 15 の仮定をみたすものが存在するとは限らない (筆者 1998 [24], Salein 1999 [45])．しかし，もう少し弱い形の次の予想は未解決である．予想 17 の特別な場合 $(G/H = O(p, q+1)/O(p, q))$ が空間形予想 (予想 8) である.

予想 17 (1996 [21]). 定理 15 は逆が成り立つ.

4.2 随伴軌道の一様格子

等質空間の例として半単純軌道を考えよう．リー群 G のリー環 $\mathfrak{g}$ の元 X を一つ選ぶと, 随伴軌道 $\mathcal{O}_X = \mathrm{Ad}(G)X$ は $\mathfrak{g}$ の部分多様体であり, 等質空間 G/G_X と同一視される．ここで G_X は X における固定部分群 $\{g \in G : \mathrm{Ad}(g)X = X\}$ である.

G が簡約リー群であり, $\mathrm{ad}\, X \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ が半単純のとき, $\mathcal{O}_X$ を**半単純軌道**という．さらに $\mathrm{ad}\, X$ の固有値がすべて純虚数のとき**楕円軌道**という．例えば，コンパクトなリー群の随伴軌道はすべて楕円軌道である.

重要な等質空間のいくつかのクラスは半単純軌道として実現できる．例えば, 任意の旗多様体やエルミート対称空間やパラエルミート対称空間などはすべて半単純軌道として実現される[14].

半単純軌道には自然に G-不変なシンプレクティック構造, 及び, 擬リーマン計量が定義される[15]. またその幾何的量子化としては, 主系列表現 (もっと一般に退化主系列表現) や離散系列表現 (もっと一般に Zuckerman の導来函手加群 $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$) などのユニタリ表現が現れる．特に後者は楕円軌道の幾何的量子化に対応する.

半単純軌道のコンパクト Clifford-Klein 形の存在問題[16] に関して，次の定理が成り立つ.

定理 18 ([19]). 一様格子をもつ半単純軌道は楕円軌道に限る．特に不変な複素構造をもつ.

エルミート対称空間は常に一様格子をもち (Borel, [6]), しかも楕円軌道である．エルミート対称空間でない楕円軌道の例を 1 つ挙げよう: 符号 $(2, n)$ のエルミート形式

$$z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} - z_3\overline{z_3} - \cdots - z_{n+2}\overline{z_{n+2}}$$

を制限して正定値になるような複素直線を集めて，それを $\mathcal{O}$ とする．$\mathcal{O}$ は $\mathbb{P}^{n+1}\mathbb{C}$ の開集合であり (特に複素多様体となる)，$U(2,n)$ の楕円軌道と同一視できる．ただし，$\mathcal{O}$ はエルミート対称空間の構造をもたない．さらに n が偶数ならば定理 15 より $\mathcal{O}$ には一様格子が存在することがわかる ($L = Sp(1, \frac{n}{2})$ とすればよい)．特にシンプレクティックなコンパクト複素多様体で，自然な計量が不定符号となるものを構成することができる ([17, 21])．

定理 18 は筆者によって発見された．その証明は離散群のコホモロジーを用いる定理 16 に基づくものであった．その後，Benoist と Labourie はシンプレクティック幾何を用いる別証明を与えた ([18, 19, 5])．

4.3 $SL(n)/SL(m)$ の一様格子

この節では，非対称等質空間 $SL(n)/SL(m)$ にコンパクトな Clifford-Klein 形が存在するかどうかについて議論しよう．この空間は我々の立場からは特殊であるが，1990 年代の半ば以降さまざまな異なる手法でこの空間におけるコンパクトな Clifford-Klein 形の存在問題がアタックされ，同じ結果が何種類もの証明方法で得られるなど，異分野が交錯しているのが魅力的である．

原型となるのは，定理 16 に $L = SU(2,1)$ を適用して得られる次の結果である:

定理 19 (1990 [18]). $SL(3,\mathbb{C})/SL(2,\mathbb{C})$ にはコンパクトな Clifford-Klein 形が存在しない．

同じ原理で，定理 16 から次の定理が導かれる ($\mathbb{R}$ のかわりに $\mathbb{C}$ や四元数体 $\mathbb{H}$ でも同様)．

定理 20 (1992 [19]). 等質空間 $SL(n,\mathbb{R})/SL(m,\mathbb{R})$ ($\frac{n}{3} > \left[\frac{m+1}{2}\right]$) にはコンパクトな Clifford-Klein 形が存在しない．

さて，$SL(n,\mathbb{R})/SL(m,\mathbb{R})$ の Clifford-Klein 形に対しては $SL(n-m,\mathbb{R})$ の右からの作用を考えることができる．この点に注目して，Zimmer たちは，コサイクルに関する超剛性定理や Ratner による軌道閉包定理などを用いて以下の定理を証明した．

定理 21 (Zimmer 1994 [56]). $SL(n,\mathbb{R})/SL(m,\mathbb{R})$ ($n > 2m$) にはコンパクトな Clifford-Klein 形が存在しない．

定理 22 (Labourie-Mozes-Zimmer 1995 [32]). $SL(n,\mathbb{R})/SL(m,\mathbb{R})$ ($n \geq 2m$) にはコンパクトな Clifford-Klein 形が存在しない．

定理 23 (Corlette-Zimmer 1994 [9, 10]). $Sp(n,2)/Sp(m,1)$ ($n > 2m$) にはコンパクトな Clifford-Klein 形が存在しない．

一方，次の結果は固有な作用の判定条件 (定理 14) の応用として得られる．

定理 24 (Benoist 1996 [4]). $SL(n,\mathbb{R})/SL(n-1,\mathbb{R})$ (n は奇数) にはコンパクトな Clifford-Klein 形が存在しない．

さらに，$SL(m)$ が $SL(n)$ に (自然な埋め込みではなく) 既約表現 φ によって埋め込まれている場合に関して，Margulis は $SL(n,\mathbb{R})$ のユニタリ表現を非コンパクトな部分群に制限し，行列要素の漸近挙動を精緻に評価するという手法を用いて次の定理を証明した．

定理 25 (Margulis 1997 [35]). $SL(n,\mathbb{R})/\varphi(SL(2,\mathbb{R}))$ $(n \geq 5)$ にはコンパクトな Clifford-Klein 形が存在しない.

Margulis の方法は，さらに Oh (1998) によって系統的に研究が推し進められた ([40])．ユニタリ表現論に基づく手法はさらに発展し，Shalom は次の定理を証明した.

定理 26 (Shalom 2000 [46]). $SL(n,\mathbb{R})/SL(2,\mathbb{R})$ $(n \geq 4)$ にはコンパクトな Clifford-Klein 形が存在しない.

これらの結果は，数学の異種の分野の最近の発展を取り入れて得られ，その証明法は多岐にわたるが，現在の所，知られているすべての定理は予想 17 (この場合に適用すると，“$SL(n,\mathbb{R})/SL(m,\mathbb{R})$ $(n > m)$ にはコンパクトな Clifford-Klein 形が存在しない”) を裏付けるものとなっている.

なお，これらの諸定理のうち，定理 21，定理 22，定理 23，定理 26 は定理 16 の非常に特殊な場合に含まれていた (上掲の文献 [9, 10, 31, 46, 56] では明示的に言及されていないが，実は，これらの特殊な場合に限っても，定理 16 あるいはその系である定理 20 の方が強い結果になっている). 一方，Benoist や Margulis の定理 24，定理 25 は定理 16 に含まれていない．なお，これらの具体的な等質空間に対する種々の結果については European School における講義録 [21] が詳しい.

5 Clifford-Klein 形の剛性と変形

この節では次の問題を論ずる事にしよう.

問題 C. 等質空間 G/H の一様格子 Γ は変形できるか?

H がコンパクトの場合，3 次元以上の既約リーマン対称空間 G/H の一様格子 Γ には本質的な変形は存在しない (定理 27)．これは，(リーマン幾何に対する) 種々の剛性定理の原型となった.

ところで，H が非コンパクトな場合 (擬リーマンの場合) にはこのような**剛性定理**は存在するのだろうか？　「剛性定理」は，基本群が位相構造だけでなく，その上の幾何構造まで決定してしまうというタイプの主張であると見ることもできる．(既約な) 擬リーマン対称空間に対しても「剛性定理」は成り立つのだろうか？

実は，H が非コンパクトの場合，リーマン対称空間の剛性定理とはかなり様子が異なる．すなわち，**いくらでも高い次元の**(既約) な擬リーマン対称空間であって，剛性定理が成り立たないような一様格子をもつものが存在する ([20, 24])．その例は定理 28 で述べる．そこで，問題 C をきちんと定式化しよう．まず問題 C には以下の 2 つの問題が含まれている.

問題 C-1. 群 G 内で離散部分群 Γ の抽象群としての変形を記述せよ.

問題 C-2. 離散群 Γ を G 内で変形したとき，その G/H への作用が固有不連続性を崩さないような変形パラメータの範囲を決定せよ.

これを念頭に置いて，不連続群の変形の集合を抽象的に記述してみよう.

G をリー群，Γ を有限生成群とする．Γ から G への準同型写像全体のなす集合 $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ に各点収束による位相を入れる．Γ の生成元 $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ をとり，次の単射を通じて，$\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ に直積 $G \times \cdots \times G$ の相対位相を入れる:

$$\mathrm{Hom}(\Gamma, G) \hookrightarrow G \times \cdots \times G, \quad \varphi \mapsto (\varphi(\gamma_1), \ldots, \varphi(\gamma_k)).$$

H を G の閉部分群とする．既に説明したように，H が非コンパクトならば，G の離散部分群は必ずしも G/H に固有不連続に作用しない．そこで $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ ではなく，以下で定義する部分集合 $R(\Gamma, G, H)$ が重要な役割を果たすことになる ([20]).

$$R(\Gamma, G, H) := \{u \in \mathrm{Hom}(\Gamma, G) : u \text{ は単射であり，しかも } u(\Gamma) \text{ は } G/H \text{ に 固有不連続かつ自由 に作用する }\}.$$

このとき，各々の $u \in R(\Gamma, G, H)$ に対し Clifford-Klein 形 $u(\Gamma)\backslash G/H$ が得られる．さて，$\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ には直積群 $\mathrm{Aut}(\Gamma) \times G$ が自然に作用し, それは $R(\Gamma, G, H)$ を不変に保つ. そこで，次の 2 つの集合を定義する．

$$\begin{array}{lrl} \textbf{変形空間} & \mathcal{T}(\Gamma, G, H) & := R(\Gamma, G, H)/G \\ \textbf{モジュライ空間} & \mathcal{M}(\Gamma, G, H) & := \mathrm{Aut}(\Gamma)\backslash R(\Gamma, G, H)/G \end{array}$$

例えば, $(G, H) = (PSL(2, \mathbb{R}), PSO(2))$, $\Gamma = \pi_1(M_g)$ $(g \geq 2)$ ならば $\mathcal{T}(\Gamma, G, H)$ は M_g のタイヒミュラー空間であり, $\mathcal{M}(\Gamma, G, H)$ は M_g 上の複素構造のモジュライ空間に他ならない.

局所剛性は変形空間 $\mathcal{T}(\Gamma, G, H)$ の "孤立点" として定式化される:

定義 (非リーマン等質空間における局所剛性 1993 [20]). 変形空間 $\mathcal{T}(\Gamma, G, H)$ における一点 $[u]$ が開集合をなすとき，すなわち $u \in R(\Gamma, G, H)$ に十分近い任意の元は G の内部同型を用いて u と共役となるとき，u の定める離散部分群 $u(\Gamma)$ は**等質空間 G/H の不連続群として局所剛性**をもつという．局所剛性をもたないとき，**連続変形可能**という.

H がコンパクトならば，この用語は従来の概念 (例えば Weil [47]) と一致する.

高次元において局所剛性定理が成り立つかどうか，H がコンパクトなときと非コンパクトなときとを比較しよう．G' を非コンパクトな単純線型リー群として，K' を極大コンパクト部分群とする．次の定理は，リー環のコホモロジーの消滅および非消滅定理と，既述の不連続性の判定条件 (定理 14) などを用いて証明することができる.

定理 27 (リーマンの場合の局所剛性定理: Selberg-Weil 1964 [47]). $(G, H) := (G', K')$ とする．このとき，G' に関する次の 2 条件は同値である.

i) 一様格子 $\iota : \Gamma \to G'$ であって $\iota \in R(\Gamma, G, H)$ が連続変形可能なものが存在する.

ii) G' は $SL(2, \mathbb{R})$ に局所同型である.

定理 28 (非リーマンの場合の局所剛性定理: 1998 [24]). $(G, H) := (G' \times G', \mathrm{diag}(G'))$ とする．このとき，G' に関する次の 2 条件は同値である.

i) 一様格子 $\iota : \Gamma \to G'$ であって $\iota \times 1 \in R(\Gamma, G, H)$ が連続変形可能なものが存在する.

ii) G' は $SO(n, 1)$ または $SU(n, 1)$ に局所同型である.

別の見方をすれば，群多様体 G' とその一様格子 Γ に対して，定理 27 は左からの作用だけに関する剛性を扱い，定理 28 は左と右の両方からの作用に関する剛性を考えているのである (後者では $G/H \simeq G'$ に注意する).

さらに，以下の場合にはその変形空間が研究されている:

1) ポアンカレ円板 $G/H = SL(2,\mathbb{R})/SO(2)$.

2) $G/H = G' \times G'/\operatorname{diag} G'$，$G' = SL(2,\mathbb{R})$ (Goldman [11], Salein 1999 [45]).

3) $G/H = G' \times G'/\operatorname{diag} G'$，$G' = SL(2,\mathbb{C})$ (Ghys 1995 [13]).

これらの場合の変形空間 $\mathcal{T}(\Gamma, G, H)$ は，それぞれ，(1) は閉リーマン面 M_g $(g \geq 2)$ の複素構造の変形，(2) は 3 次元多様体上のローレンツ構造の変形，(3) は 3 次元複素多様体上の複素構造の変形に対応している．さらに，(2) と (3) は，定理 28 で $n = 1, 2, 3$ のときに相当している．実際，

$$\begin{aligned} G' &= SL(2,\mathbb{R}) \approx SO(2,1) \approx SU(1,1), \\ G' &= SL(2,\mathbb{C}) \approx SO(3,1) \end{aligned}$$

というリー群の局所同型写像があるからである．

定理 28 において n を大きくすることによって，局所剛性定理が成り立たない一様格子 Γ をもつ既約な擬リーマン対称空間で**いくらでも高い次元**のものが存在することがわかる．一般の n に対して，[24] ではこのような一様格子 Γ の変形の量的な評価 (不連続性が保たれる範囲) が局所リーマン対称空間 $\Gamma\backslash G'/K'$ の直径を用いて与えられた．さて,「離散部分群を “少し” 変形したときに作用の不連続性が保たれる」という命題は冪零リー群では一般には正しくない ([29])．しかし，上記のように半単純リー群の場合にはこの命題が成り立ち，特に Goldman の予想 ([11]) が肯定的に解決した．その証明には不連続性の判定条件 (定理 14) が鍵となる．

注

[1] リーマン計量が多様体上の各点における正定値 2 次形式として与えられるのに対し, 擬リーマン計量は正定値を非退化という条件に一般化したものである．非退化 2 次形式の符号が $(n-1, 1)$ の場合が**ローレンツ多様体**である．

[2] Calabi-Markus ([8]) では，相対性理論が時空の連続体として 4 次元のローレンツ多様体を用いることにちなんで，正曲率のローレンツ空間形 (ド・ジッター空間) を **relativistic spherical space form** と呼んでいる．

[3] 擬リーマン計量を -1 倍すると，符号は (p, q) から (q, p) に，断面曲率 κ は $-\kappa$ となる．

[4] 任意のパラコンパクト多様体にはリーマン計量が存在するが，擬リーマン計量に対しては類似の定理が成り立たない.

[5] どのような有限群で割ることができるかについては，Wolf の著作 [50] に詳しい.

[6] ここでは断面曲率を用いている．Ricci 曲率だけの仮定では弱すぎる．

[7]算術的な一様格子は Borel-Harish-Chandra (1962), Mostow-玉河 (1962), Borel (1963) などによる一般論; 非算術的な一様格子は (双曲空間に対して)Makarov (1966), Vinberg, Gromov-Piatetski-Shapiro (1988) などによって構成されている.

[8]この視点から言えば，符号 $(p,q)(q \neq 1)$ の擬リーマン多様体の空間形は，ランク 1 の半単純対称空間 $O(p,q+1)/O(p,q)$ の Clifford-Klein 形である.

[9]群論的には，$SL(2,\mathbb{R})$ の等質空間によってこの例を再構成できる ([18]).

[10]以下では，Γ のかわりの記号として，L を用いることが多い.

[11]$\pitchfork$ という記号は微分幾何において部分多様体が横断的に交わるという意味で用いられることが多いが，ここでは全く違う意味でこの記号を使っている.

[12]これに関しては，H. Weyl の定理を原型とする種々の不等式が知られている.

[13]Borel の定理 [6] から，このリストには H がコンパクトの場合や群多様体 (すなわち $G = G' \times G'$, $H = \operatorname{diag} G'$ の形) の場合が当然含まれる.

[14]最初の 2 例は楕円軌道でもある.

[15]さらに楕円軌道の場合には G-不変な複素構造，(擬)Kähler 構造も定義される.

[16] コンパクトな Clifford-Klein 形が存在する場合には, 極めて特殊な例であるが, L^2-指数定理を用いた Atiyah-Schmid による離散系列表現の構成などの解析的な応用も知られている.

参考文献

[1] H. Abels, G. A. Margulis and G. A. Soifer, Properly discontinuous groups of affine transformations with orthogonal linear part, *C. R. A. S. Paris Math.* **324** (1997), 253–258.

[2] H. Abels, G. A. Margulis and G. A. Soifer, On the Zariski closure of the linear part of a properly discontinuous group of affine transformations, *J. Differential Geometry* **60** (2002), 315–344.

[3] A. Baklouti and F. Khlif, Proper actions on some exponential solvable homogeneous spaces, preprint.

[4] Y. Benoist, Actions propres sur les espaces homogenes reductifs, *Ann. Math.* **144** (1996), 315–347.

[5] Y. Benoist and F. Labourie, Sur les espaces homogenes modeles de varietés compactes, *I. H. E. S. Publ. Math.* **76** (1992), 99–109.

[6] A. Borel, Compact Clifford–Klein forms of symmetric spaces, *Topology* **2** (1963), 111–122.

[7] A. Borel and Harish-Chandra, Arithmetic subgroups of algebraic groups, *Ann. Math.* **75** (1962), 485–535.

[8] E. Calabi and L. Markus, Relativistic space forms, *Ann. Math.* **75** (1962), 63–76.

[9] K. Corlette, Harmonic maps, rigidity and Hodge theory, *ICM-94, Proceedings* (1994), pp. 465–471.

[10] K. Corlette and R. Zimmer, Superrigidity for cocycles and hyperbolic geometry, *Internat. J. Math.* **5** (1994), 273–290.

[11] W. M. Goldman, Nonstandard Lorentz space forms, *J. Differential Geometry* **21** (1985), 301–308.

[12] W. Goldman and Y. Kamishima, The fundamental group of a compact flat space form is virtually polycyclic, *J. Differential Geometry* **19** (1984), 233–240.

[13] É. Ghys, Déformations des structures complexes sur les espaces homogènes de $SL(2,\mathbb{C})$, *J. reine angew. Math.* **468** (1995), 113–138.

[14] A. Iozzi and D. Witte, Cartan-decomposition subgroup of $SU(2,n)$, *J. Lie Theory* **11** (2001), 505–543.

[15] A. Iozzi and D. Witte, Tessellations of homogeneous space of classical group of real rank two, Geometriae Dedicata **103** (2004), 115–191.

[16] B. Klingler, Complétude des variétés lorentziennes à courbure constante, *Math. Ann.* **306** (1996), 353–370.

[17] T. Kobayashi, Proper action on a homogeneous space of reductive type, *Math. Ann.* **285** (1989), 249–263.

[18] T. Kobayashi, Discontinuous groups acting on homogeneous spaces of reductive type, Proceedings of ICM-90 satellite conference on Representation Theory of Lie Groups and Lie Algebras at Fuji-Kawaguchiko, 1990, eds. T.Kawazoe, T.Oshima and S.Sano, World Scientific, 1992, 59–75.

[19] T. Kobayashi, A necessary condition for the existence of compact Clifford–Klein forms of homogeneous spaces of reductive type, *Duke Math. J.* **67** (1992), 653–664.

[20] T. Kobayashi, On discontinuous groups acting on homogeneous spaces with noncompact isotropy subgroups, *J. Geometry and Physics* **12** (1993), 133–144.

[21] T. Kobayashi, Discontinuous groups and Clifford-Klein forms of pseudo-Riemannian homogeneous manifolds, In: Lecture Notes of the European School, 1994, eds. H. Schlichtkrull and B. Ørsted. Perspectives in Math., **17**. Academic Press, 1996, pp. 99–165.

[22] T. Kobayashi, Criterion of proper actions on homogeneous spaces of reductive groups, *J. Lie Theory* **6** (1996), 147–163. http://www.emis.de/journals/JLT/vol.6_no.2/index.html .

[23] T. Kobayashi, Discrete decomposability of the restriction of $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ with respect to reductive subgroups and its applications, Part I *Invent. Math.* **117** (1994), 181–205, Part II. *Ann. Math.* **147** (1998), 709–729; Part III. *Invent. Math.* **131** (1998), 229–256.

[24] T. Kobayashi, Deformation of compact Clifford-Klein forms of indefinite-Riemannian homogeneous manifolds, *Math. Ann.* **310** (1998), 394–408.

[25] T. Kobayashi, Introduction to actions of discrete groups on pseudo-Riemannian homogeneous manifolds, *Acta Appl. Math.* **73** (2002) 115-131.

[26] T. Kobayashi, Branching problems of unitary representations, Proc. of I.C.M. 2002 at Beijing, vol. 2, Higher Ed. Press, Beijing (2002), 615–627.

[27] T. Kobayashi, Discontinuous groups for non-Riemannian homogeneous spaces, Mathematics Unlimited-2001 and Beyond, (eds. B. Engquist and W. Schmid), Springer, Berlin, (2001), pp. 723-747; 邦訳: 非リーマン等質空間の不連続群論, 数学の最先端 21 世紀への挑戦, 第 1 巻, (砂田利一監修), (2002), pp. 18-73.

[28] T. Kobayashi and K. Ono, Note on Hirzebruch's proportionality principle, *J. Fac. Sci. Univ. of Tokyo* **37** (1990), 71–87.

[29] T. Kobayashi and S. Nasrin, Deformation of properly discontinuous actions of $\mathbb{Z}^k$ on $\mathbb{R}^{k+1}$, preprint.

[30] R. S. Kulkarni, Proper actions and pseudo-Riemannian space forms, *Advances in Math.* **40** (1981), 10–51.

[31] F. Labourie, Quelques résultats récents sur les espaces localement homogènes compacts, In: Symposia Mathematica (en l'honneur d'Eugenio Calabi), **XXXVI**. P. de Martolomeis, et al. (eds.). Cambridge University Press, 1996, 15 pp.

[32] F. Labourie, S. Mozes and R. J. Zimmer, On manifolds locally modeled on non-Riemannian homogeneous spaces, *GAFA* **5** (1995), 955–965.

[33] F. Labourie and R. J. Zimmer, On the non-existence of cocompact lattices for $SL(n)/SL(m)$, *Math. Res. Letters* **2** (1995), 75–77.

[34] R. Lipsman, Proper actions and a compactness condition, *J. Lie Theory* **5** (1995), 25–39. http:www.emis.de/journals/JLT/vol.5_no.1/index.html

[35] G. A. Margulis, Existence of compact quotients of homogeneous spaces, measurably proper actions, and decay of matrix coefficients, *Bul. Soc. math. France* **125** (1997), 447–456.

[36] G. A. Margulis, Problems and conjectures in rigidity theory, Mathematics: Frontiers and Perspectives (V.Arnold, M.Atiyah, et al. eds.), A. M. S., (2000), pp. 161–174.

[37] J. Milnor, On fundamental groups of complete affinely flat manifolds, *Advances in Math.* **25** (1977), 178–187.

[38] S. B. Myers, Riemannian manifolds with positive mean curvature, *Duke Math. J.* **8** (1941), 401–404.

[39] S. Nasrin, Criterion of proper actions for 2-step nilpotent Lie groups, *Tokyo J. Math.* **24** (2001), 535–543.

[40] H. Oh, Tempered subgroups and representations with minimal decay of matrix coefficients, *Bull. Soc. Math. France* **126** (1998), 355–380.

[41] H. Oh and D. Witte, New examples of compact Clifford-Klein forms of homogeneous spaces of $SO(2, n)$, *Int. Math. Res. Notice* **5** (2000), 235–251.

[42] H. Oh and D. Witte, Cartan-decomposition subgroups of $SO(2, n)$, *Trans. Amer. Math. Soc.* **356** (2004), 1–38.

[43] H. Oh and D. Witte, Compact Clifford-Klein forms of homogeneous spaces of $SO(2, n)$, *Geometriae Dedicata* **89** (2002), 25–57.

[44] R. S. Palais, On the existence of slices for actions of noncompact Lie groups, *Ann. Math.* **73** (1961), 295–323.

[45] F. Salein, Varietés anti-de Sitter de dimension 3 possédant un champ de Killing non trivial, Thèse at l'École Normale Supérieure de Lyon, Dec. 1999.

[46] Y. Shalom, Rigidity, unitary representations of semisimple groups, and fundamental groups of manifolds with rank one transformation group, *Ann. Math.* **152** (2000), 113–182.

[47] A. Weil, Remarks on the cohomology of groups, *Ann. Math.* **80** (1964), 149–157.

[48] J. A. Wolf, The Clifford–Klein space forms of indefinite metric, *Ann. Math.* **75** (1962), 77–80.

[49] J. A. Wolf, Isotropic manifolds of indefinite metric, *Comment. Math. Helv.* **39** (1964), 21–64.

[50] J. A. Wolf, Spaces of Constant Curvature, 5th edn. Publish or Perish, Inc. 1984.

[51] T. Yoshino, A solution to Lipsman's conjecture for $\mathbb{R}^4$, to appear in Int. Math. Res. Notice.

[52] T. Yoshino, A counterexample to Lipsman's conjecture, to appear in Int. J. Math.

[53] T. Yoshino, On a discontinuous duality theorem, 表現論シンポジウム講演集, 淡路島, (ed. T. Kobayashi), 2004, 23–27.

[54] T. Yoshino, Criterion of proper actions for three step nilpotent Lie groups, preprint.

[55] A. Zeghib, On closed anti-de Sitter spacetimes, Math. Ann. **310** (1998), 695–716.

[56] R. J. Zimmer, Discrete groups and non-Riemannian homogeneous spaces, *J. Amer. Math. Soc.* **7** (1994), 159–168.

(こばやしとしゆき・京都大学数理解析研究所)