# シルエットから見る*

小林俊行

物事の実体がわからないとき，影から推し量るという手があります．1 つの影だけでは文字どおり「物事の一面しか見ない」ことになりかねませんが，多くの影を集めれば実体がみえてくるのでしょうか？

## 1　魔方陣——有限の世界

最初に魔方陣を考えてみましょう．大昔から魔除などに使われていたそうですが，一番簡単なのは，$3 \times 3$ のサイズのものです．

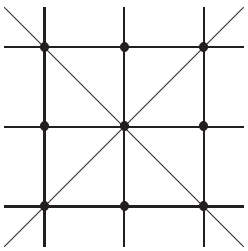


図 1

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 1 | 6 |
| 3 | 5 | 7 |
| 4 | 9 | 2 |

図 2

ルールは，

1 ) 図 1 の黒丸に 1 から 9 までの自然数を一度ずついれる．

2 ) 縦，横，斜めの 8 本の各線上での 3 つの黒丸の数字の合計はすべて等しい．

の 2 つです．すぐに分かることですが，$3 \times 3$ の場合この解は本質的に 1 つしかありません．つまり，図 2 のものか，その裏返しや 90 度回転を施したものなどで解は尽くされます．

次に，サイズを $3 \times 3$ から $4 \times 4$ に変えてみます．1 から 16 までの自然数を，縦，横，対角の計 10 本の各線上での合計が等しくなるようにいれるわけです．

---

*本稿は「非可換調和解析 ( 上 )」として『数学セミナー』1989 年 9 月号に掲載され，その後，『現代数学のあゆみ 4』( 日本評論社，1992 ) に再録された．1988 年 10 月 5 日，金沢大学での現代数学史研究会で発表された大島利雄「対称空間上の調和解析」が『数学セミナー』に掲載されるにあたり，その導入として書かれたものである．

こんどは，

$$\begin{array}{cccc} 8 & 13 & 3 & 10 \\ 11 & 2 & 16 & 5 \\ 14 & 7 & 9 & 4 \\ 1 & 12 & 6 & 15 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 8 & 13 & 2 & 11 \\ 10 & 3 & 16 & 5 \\ 15 & 6 & 9 & 4 \\ 1 & 12 & 7 & 14 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 8 & 10 & 5 & 11 \\ 13 & 3 & 16 & 2 \\ 12 & 6 & 9 & 7 \\ 1 & 15 & 4 & 14 \end{array}$$

などのように多くの解 ( 本質的に $880$ 通り ) があることが知られています．サイズ $n \times n$ では，$n$ が大きくなると解の個数が偶発的に大きくなることが想像されるでしょう．大雑把に言って，$n$ が大きいと

$$\text{黒丸の数} = n^2 \gg \text{線の数} = 2n + 2$$

すなわち，

$$\text{未知数の数} \gg \text{方程式の数}$$

であるために方程式の解の自由度が増えるわけです．

標語的にいえば「複雑な実体を知るためにはそれに見合った多くの影の情報が必要」だということです．

## 2　積分幾何入門——有限から無限へ

次に，魔方陣で見た考え方を連続な局面に適用してみましょう．一つの一般化として，

$$\begin{cases} \text{実体} = \text{黒丸に数字をいれる} \\ \text{影} = \text{各線上の黒丸の数字の合計} \end{cases}$$

という設定を

$$\begin{cases} \text{実体} = \text{平面上の関数 } f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ を与える} \\ \text{影} = \text{各直線上での } f \text{ の積分} \end{cases}$$

に変えてみます．

> 問題 A : すべての直線上での $f$ の積分が情報として与えられれば，
> もとの関数 $f$ は再生できるか？

平面上の直線は，$0 \leqq \theta < 2\pi,\ a \in \mathbb{R}$ によって，

$$\begin{cases} x = t\cos\theta + a\sin\theta \\ y = t\sin\theta - a\cos\theta \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と表されますから，この直線上での $f$ の積分は，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t\cos\theta + a\sin\theta,\ t\sin\theta - a\cos\theta)dt$$

で与えられます．この値を $f^\vee(\theta, a)$ と書けば，

$$f(x, y) \longmapsto f^\vee(\theta, a)$$

という変換をしたことになります．この変換が 1 対 1 か？ もし 1 対 1 なら逆公式を求めよ，というのが問題 A です．何はともあれ絵で実感をつかんでみましょう．平面上定義された関数を目でみるために濃淡を使って表します．つまり関数の値が大きい所は密度を濃く小さい所は密度を疎に点をまき散らせば，上の絵は瓢箪（ひょうたん）島の高さを表すような関数です（図 3）．

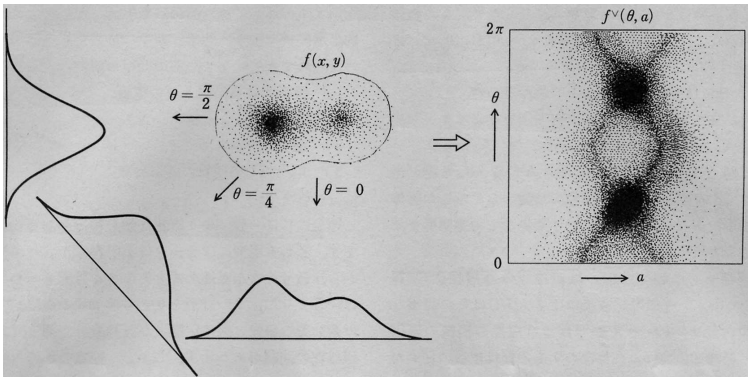



図 3

$\theta$ が一定で $a$ が動くとき，平行直線族を意味します（図 4 イ参照）．図 3 右の濃淡の模様から $f^\vee(\theta, a)$ を $a$ の関数とみたグラフが図 3 左の 3 つのグラフのようになることを読み取ってください．逆に $a$ を一定にして $\theta$ を動かすと原点から距離 $|a|$ の直線族になります（図 4 ロ）．さあ，$f^\vee(\theta, a)$ から $f$ の原点での値 $f(0, 0)$ はどのように再現されるのでしょうか？ 図 4 ロの直線族は向きによらず対等であるべきですから，$\theta$ に関する平均

$$M_f(a) := (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} f^\vee(\theta, a) d\theta$$

が重要そうです．特に $M_f(0)$ は，原点を通るすべての直線での積分の平均ですから，$f$ の原点での値の比重が特に大きくなっています．しかし同時に，全空間での $f$ の値も混ざっていますからその寄与を取り除いてやらなければいけません．このためには，結局すべての $a$ に対する $M_f(a)$ の値が必要になります．具体的に次の逆公式が知られています．

$$f(0, 0) = \pi^{-1} \int_0^{\infty} a^{-2}(M_f(0) - M_f(a)) da$$

原点以外での $f$ の値も全く同様に復元できます．というわけで，例えば，遠くで 0 になるような関数に対しては

定理 ( Radon ): 変換 $f(x,y) \longmapsto f^{\vee}(\theta,a)$ は 1 対 1 であり逆公式が明確に求められる．

という問題 A に対する肯定的な解決が得られました．

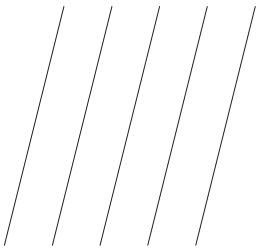


図 4　イ

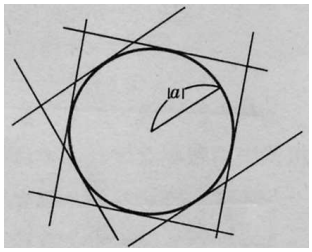



図 4　ロ

この問題の高次元への一般化として，$\mathbb{R}^n$ または $\mathbb{C}^n$ の各 $d$ 次元平面での積分を考えることができます．$d = n-1$ のとき，この変換は ( 狭義の ) Radon 変換，$d = 1$ のときは，3 節で述べる医学などへの応用から X 線変換と呼ばれることがあります．

先ほどの考察から，原点での $f$ の値を復元するために $a = 0$ の近くの $M_f(a)$ の値が必要なのは首肯けるでしょう．実際には上の公式のように十分大きな $|a|$ に対しての $M_f(a)$ の値まで必要なこともあれば，逆に 0 のごく近くの $a$ に対しての値だけあれば十分な場合もあります．後者は，Huygens ( ホイヘンス ) の原理に対応しています．いずれが起こるかは，考えている空間の次元が奇数か偶数かとか，実数体上か複素数体上かなどに深く依存しています．

## 3　理論から応用へ
### ——ラドン ( 1917 ) → ノーベル医学賞 ( 1979 )

前節の問題は今世紀の初頭に $f$ が球面上の関数のとき P. Funk ( 1916 )，平面上の関数のとき J. Radon ( 1917 ) によって肯定的に解決され，半世紀近くたって実社会への著しい応用がはじまりました．半透明な物体の密度関数を $f$ とし，直線 $l$ に沿った光がこの物体を通過するときの光の減衰率を $r = r(l)$ $(0 \leqq r \leqq 1)$ とすれば，

$$-\log(1-r) = f \text{ の } l \text{ 上の線積分の値}$$

が成り立ちます．観測データが左辺を与えますから，問題 A は，次のように翻訳されます．

問題 A′ : 半透明な物体に色々な角度から光線を当てて，その影の濃淡の模様の情報から，もとの物体の形のみならず，内部の勝手な場所での透明度まで逆算できるか？

解剖せずに脳の内部の絵が描ける断層撮影 ( X 線 CT スキャンや核磁気共鳴による MRI ) はその見事な応用例です . 1 枚の X 線写真では白黒の濃淡の原因がどの深さにおける病巣なのかあるいは複数の何かが重なっているのか全然判断できなくても , 多くの方向からの写真を集めればそれがわかるというわけです . この成果によって , 1979 年の A. M. Cormack と G. N. Hounsfield がノーベル医学・生理学賞を受賞しています . 次の写真は核磁気共鳴を用いて得たデータから目の高さの脳の断面図を再現したものです .

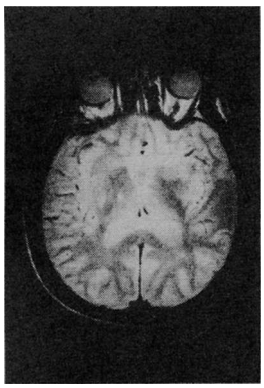


図 5 ( 東大医学部放射線科提供 )

同様の考え方に基づいた別な著しい応用にジオトモグラフィによる近年の地球内部の研究があります .

例えば , 同一の地震に対する世界中の地震観測所のデータを集めて解析することにより , 地球内部が同心球ではなく , 例えば海と陸とでは地球深くまで様子が異なっていることがわかるそうです . 最近は地下資源の探査や地下空間の利用などにもますます重要な技術になってきています . 波の減衰だけではなく走時など情報量も多いかわりに , 弾性波では反射や屈折が無視できないので , X 線 CT スキャンにない難しさがあらわれます . ジオトモグラフィは , 比較的新しく , 発展の期待される技術です .

いままで述べてきた話は , 数学的な理論が生まれて約半世紀後に医学 , 地学 , 産業にめざましい応用が見いだされてきています . その問題の解決は大別して ,

1 ) 復元できるかどうかの理論 ,

さらに復元できるときは

2 ) 逆公式を求めること ,

3 ) 応用面での逆算の近似計算

に分かれます .

逆公式には一般に少々複雑な微分積分の演算が現れます．しかも現実にはデータは有限個しかとれませんから，微分を含んだ逆公式をそのまま計算するわけにはいきません．よい近似を与える逆公式や有限データの選び方の研究と共に，膨大な計算量を必要とする情報処理の問題があります．しかし，逆算のためのコンピューターシステムの超小型化がすすめば，日用品にさえこの考え方を応用した物がいろいろ現れるようになるかも知れませんね．

## 4　影にだまされる?!

第 2 節では，影を十分に集めれば再現できるというめでたい話を述べてきました．しかしいつでも類似の問題がうまくいくわけではありません．この節では影から実体が決定できないような典型例を扱います．さて，半透明な物体のかわりに不透明な物体に色々な角度から光線を当てて，

> 問題 B：その影の幅（大きさ）と影の位置の情報から，元の物体の形が復元できるか？

を考えてみましょう．今度は，物体に凹んだ部分があると影からはみわけがつきません（図 6）．逆に凸である物体に限れば影から定まる包絡線（面）によってもとの物体が再現できることは見やすいでしょう．

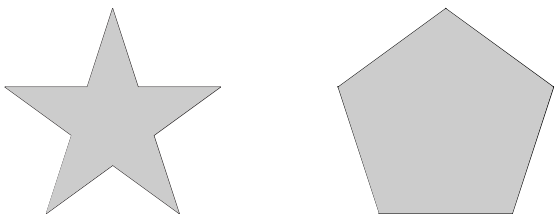


図 6　2 つの図形はその平面上どこから光を当てても同じ影を持つ

物体を凸に限っても，影の幅（大きさ）のみで，影の位置の情報がなければやはり再現できません．マンホールの形が丸いのは，幅を一定にすることで開閉時にうっかり落としてしまうのを防ぐという理由もあるそうですが，幅が一定な凸図形は円の他にもたくさんあります．例えば，図 7 の Reuleaux（ルーロー）の三角形が古くから知られています．Reuleaux の三角形には尖った角がありますが，円を一定の幅に保ったまま滑らかに変形することさえも可能です．

## 5　古くて新しい問題——モザイク画面と Pompeiu の問題

第 2 節では，平面上の関数 $f$ をありとあらゆる直線上で積分したデータから $f$ を再現することを考えました．こんどはひとつの有界な図形 $\Omega$（三角形，

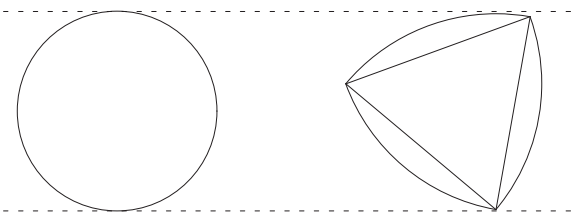


図 7　影の大きさ ( 幅 ) が円板と同じ凸図形

円板，. . . ) を決めその上で連続関数 $f$ を積分することを考えてみましょう．$\Omega$ を合同なまま平面上自由に移動させて同様に $f$ の積分のデータを集めるのです．

問題 C：$\Omega$ を動かして得た積分データから $f$ が再生できるか？

がこの節の話題です．

最近，テレビなどでモザイク画面を見ることがあります．つまり，暴走族へのインタビュー番組のように公開したくない画像をコンピュータ・グラフィックスを用いてわざとぼかして放送しているわけです．静止画面 1 枚では顔かたちを再現するのに情報不足ですが，被写体が十分動けばどうでしょうか？もちろんここで言っているのは上下左右や首をかしげる斜めの動きの意味で，顔を手で覆ったり後ろを向いたりする動きではありません．この意味で，正に

問題 D：被写体 ( あるいはカメラ ) が十分動けばモザイク画面からもとの画像が再現できるか？

は，$\Omega$ が長方形の場合の問題 C にひとつの新しい解釈を与えているわけです．

最初に 1 次元のモデルを考えてみましょう．1 変数連続関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の静止モザイク画面とは，一定区間での平均をとった棒グラフです ( 図 8 )．

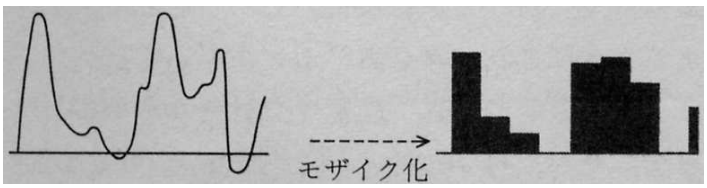



図 8

ぼかしを与える幅を簡単のため 1 とすると，動くモザイク画面をみることは，変数 $x$ に対して

$$Tf(x) := \int_{x-1}^{x} f(t)dt$$

のデータを与えることに対応しています．1 次元モデルで $\Omega$ が区間の場合の問題 C は，

問題 E：$Tf$ から $f$ を再生できるか？

と表されます．この答えは $f$ が遠くで 0 になることが予めわかっていれば Yes ですが，無条件には No です．実際，$f(x)$ が十分大きな $x$ に対して恒等的に 0 と仮定すれば，等式

$$f(x) = f(x-1) + (Tf)'(x)$$

によって帰納的に $f$ を復元できます．具体的には

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (Tf)'(x-n) = -\sum_{n=1}^{\infty} (Tf)'(x+n)$$

により逆公式が与えられます．しかし，$f$ に何も仮定がない場合，たとえば

$$f(x) = p\cos(2\pi x) + q\sin(2\pi x)$$

のように振動する関数では，定数 $p, q$ の如何に関わらず，$Tf \equiv 0$ になります．つまり，一般には $Tf$ から $f$ が再現できないのです．このことはまた，$f$ が再現できる場合でも，1 点での $f$ の値を知るために $Tf$ の大域的なデータが必要になることも示唆しています．

再び 2 次元の場合に戻りましょう．1 次元の場合と違って，$\Omega$ を平行移動だけでなく回転した位置での積分データもありますから，情報量は相対的に多くなっているようにも見受けられます．1970 年代に，L. Brown たちによって次のことがわかりました．

定理：問題 C は

( 1 ) $f$ が遠くで 0 になる関数なら Yes

( 2 ) $f$ が一般の連続関数では

( a ) $\Omega$ が円板だと No

( b ) $\Omega$ が多角形だと Yes

モザイク画面の場合は，$\Omega$ が長方形ですから原理的にはもとの画像が回復されるわけです．しかし，顔のように有界な画面ならともかく，風景のようにどこまでも続く画面の場合，もとの画像が簡単に逆算できるとは主張していませんので，念のため．

円板のときの問題 C の反例は，Bessel 関数を用いて描かれた次頁の絵 ( 図 9 ) で与えられます．

問題 C は最初ルーマニアの Pompeiu によって考察されました．原論文 ( 1929 ) は間違っていたのですが以後 Pompeiu の問題といわれ，60 年たった現在も $\Omega$ が特別な形をしている場合を除いて解決されていません．

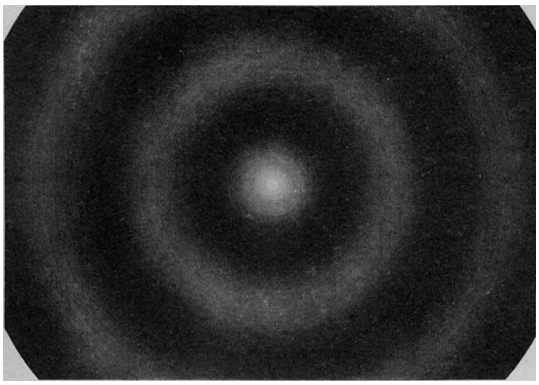


図 9　この模様が鉄板の密度（黒い部分は重く，白い部分は軽い）とすると，適当な半径の円板でどの箇所を切り抜いても同じ重さになります．

*　　*　　*

ここまで，理解に重点をおいて現象論的な側面に焦点をあてながら話を進めてきました．最後に，次回との接続を考えて，少し理論的な背景の 1 つを述べましょう．わかりにくい言葉は深刻に考えず雰囲気を味わっていただければ十分です．

まず，今までに述べた変換を抽象化してみましょう．空間 $X$（例えば $\mathbb{R}^n$）とパラメーター $a \in A$ をもつ $X$ の部分集合の族 $M_a$ があり，各 $M_a$ 上で積分 $\int_{M_a} d\sigma_a$ が定義されているとします．

例（イ）$\{M_a : a \in A\}$ は $d$ 次元平面全体．
例（ロ）$\{M_a : a \in A\}$ は領域 $\Omega$ と合同な図形全体．

上の状況で，$\{M_a\}, X$ という幾何的な情報を含んだ変換 $\Phi$: $\{X$ 上の関数$\} \longrightarrow \{A$ 上の関数$\}$ を

$$\Phi f(a) = \int_{M_a} f(x) d\sigma_a(x)$$

で定義します．特に例（イ）の場合を $\Phi \equiv \Phi(n,d)$，例（ロ）の場合を $\Phi \equiv \Phi(n,\Omega)$ と書きましょう．本文では主に $\mathbb{R}^2$ で，$\Phi(2,1), \Phi(2,\Omega)$ を扱っていました．

「シルエットから見る」とは，$\Phi$ の逆関数を求める，すなわち未知関数 $f(x)$ を $\Phi f(a)$ という観測データから逆算するということに相当します．それが可能なのは，$\Phi$ が単射で逆公式（あるいは近似公式）が明確に与えられる最も好ましい状況のときです．しかし，$\Phi$ が単射でない例，単射であるが逆関数の公式が明確に求められていない例が存在することも見てきました．

変換 $\Phi$ を研究するためには，フーリエ変換が効果的なことが多くあります．逆に変換 $\Phi$ を用いてフーリエ変換を簡単にするような状況もしばしば現れま

す．$\mathbb{R}^n$ のフーリエ変換とは，

$$\tilde{f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \exp -\sqrt{-1}\langle x, \xi \rangle dx$$

（ただし，$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n),\ \langle x, \xi \rangle = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \cdots + x_n\xi_n$ ）で定義される変換です．

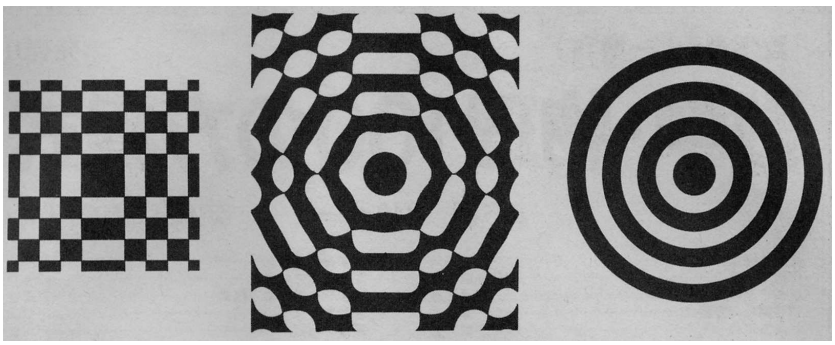
では，なぜ $\Phi$ の研究にフーリエ変換が現れるのでしょうか？ 簡単に言うと，フーリエ変換の定義は「$\mathbb{R}^n$ の加法群としての構造を反映させたものだ」という見方ができます．加法群 $\mathbb{R}^n$ の作用を $\Phi$ が保つ写像のためフーリエ変換が，この $\Phi$ の研究に深くかかわってくると考えられるのです．実際，空間 $X = \mathbb{R}^n$ には平行移動として加法群 $\mathbb{R}^n$ が作用し，また $\{M_a\} = \{d$ 次元平面$\}, \{\Omega$と合同な図形$\}$ などは平行移動に関して閉じているのでパラメーター空間 $A$ にも加法群 $\mathbb{R}^n$ が作用しています．その結果，これらの幾何的対象を用いて定義された $X$ 及び $A$ 上の関数空間の間の写像 $\Phi$ もまた自然な意味で加法群 $\mathbb{R}^n$ の作用を保つわけです．この考え方は次回に詳しく説明します．

一般に空間（例えば，非コンパクト多様体）上の大域的な解析の理論が豊富であるためには，無限遠でその空間になんらかの統制を必要とします．$\mathbb{R}^n$ が自分自身に平行移動として作用している今の例のように，統制の 1 つの形態は（できるだけ大きい）群が作用していることです．

さて，人の足を踏んで「ごめん！」と謝るのと，「ごめん！」と謝ってから人の足を踏むのとでは大違いですが，数学ではこのように 2 つの演算の順序が異なると結果が違ってくる世界を「非可換」と呼んでいます．例えば多項式のかけ算は可換ですが，行列のかけ算や変数係数の微分などは一般に非可換です．行列群のように一般に非可換な群の作用で統制されている空間の幾何的な性質，群の代数的な性質を駆使して，その空間の解析をおこなう研究を「非可換調和解析」と呼んでいます．

$\mathbb{R}^n$ での先ほどの例は，非可換性が低く平行移動の群に対応する通常のフーリエ変換だけでも間に合います．しかし，$\Phi = \Phi(n, d)$ の場合はアフィン変換群 $G$（一次変換と平行移動），$\Phi = \Phi(n, \Omega)$ の場合は合同変換群 $G'$（回転と平行移動）というより大きな群を考えることにより，$\Phi$ を調べるときの見通しが明るくなったり，証明が著しく簡単になったりすることがあります．なお，$\Phi = \Phi(n, d)$（または $= \Phi(n, \Omega)$）を考えた状況では群 $G$（または $G'$）は $X$ のみならず $A$ にも推移的に作用しています．

もっと非可換性の高い場合の成功例として，第 2 節の Radon 変換をある種の曲がった空間へ拡張したものが知られています．特に，$X$ がリーマン対称空間や複素半単純リー群では，$d$ 次元平面の代わりにホロ球面と呼ばれる部分多様体を $\{M_a\}$ に用いて定義した（広義の）ラドン変換 $\Phi$ が単射になり，$X$ 上の非可換調和解析を $A$ 上のもっと扱いやすい可換調和解析の問題に帰着させることができます．これは，I. M. Gelfand，Harish-Chandra，S. Helgason などによって半単純リー群の無限次元表現論の初期から使われた手法ですが，



イ）$\Omega$ は正方形　　ロ）$\Omega$ は正六角形　　ハ）$\Omega$ は円板

図 10　$N(\Omega;\mathbb{R})$ の例

一般には $\Phi$ が必ずしも単射でないという困難があります．

第 5 節の Pompeiu の問題は，フーリエ変換を使うと色々な問題と同値であることが知られています．その 1 つは，Schiffer 予想と呼ばれる次の自由境界値問題です．以下簡単のため $\Omega$ が $\mathbb{R}^n$ の滑らかで連結な境界 $\partial\Omega$ をもつ有界領域（つまり穴が開いていない）であると仮定して話を進めます．

問題 C′：次の微分方程式に解があれば $\Omega$ は円板か？

$$\begin{cases} \Omega\text{内で} & \triangle u = \lambda u \ (\lambda \in \mathbb{C})\ (\triangle：\text{ラプラシアン}) \\ \partial\Omega\text{上で} & \text{法微分}\frac{\partial u}{\partial n} \equiv 0,\ u \equiv 1 \end{cases}$$

また，別の言い替えとして

$$\tilde{\chi}_\Omega(\xi,\eta) := \int_\Omega \exp\sqrt{-1}(x\xi + y\eta)dxdy$$
$$N(\Omega;\mathbb{R}) := \{(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 : \tilde{\chi}_\Omega(\xi,\eta) = 0\}$$

とおくと，問題 C, C′ は

問題 C″：$N(\Omega;\mathbb{R})$ が原点中心の円を含むならば，$\Omega$ は円板か？

とも同値になります．$N(\Omega;\mathbb{R})$ はどのような集合でしょうか？ 上の図 10 の絵は，$\tilde{\chi}_\Omega(\xi,\eta)$ が正の部分を黒く，負の部分を白く表したもので，黒と白の境界が $N(\Omega;\mathbb{R})$ を表しています．

$\Omega$ は正六角形のときの $N(\Omega;\mathbb{R})$ の絵において一番内側の黒い部分は，一見円のようですが，実は円ではありません．$\Omega$ が円板なら $N(\Omega;\mathbb{R})$ は無限個の円を含みますが，逆に $N(\Omega;\mathbb{R})$ が無限個の円を含むなら $\Omega$ は円板であることが証明できます．この結果の高次元への拡張や，「$N(\Omega;\mathbb{R})$ が円を含めば，$\Omega$ が十分円板に近いという仮定のもとで $\Omega$ は円板に限る」や，「$\Omega$ が凸なら $N(\Omega;\mathbb{C})$ の漸近挙動から $\Omega$ を復元できる」や「$N(\Omega;\mathbb{C})$ の漸近挙動は $\Omega$ が

凸であるという性質を特徴づける」等の結果が最近得られました．これらは「$N(\Omega;\mathbb{R})$ が $1$ 個でも円を含めば $\Omega$ は円板」という古くからの予想への小さな一歩です．

なお，図 $3$ は，阿原一志，大原淳両氏によるものです．また，中田隆夫氏からは多くの貴重な意見をいただきました．誌面を借りて感謝させていただきます．