$\boxed{\mathrm{V}}$ 関数 $f : X \to Y$ について

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B), \quad f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$$

を示せ．ここで $A, B \subseteq X$ は部分集合である．

（方針）まず像 $f(A) \subseteq B$ の定義を思い出そう．

$$f(A) = \{f(a) \mid a \in A\} = \{b \in B \mid \exists a \in A, b = f(a)\}.$$

演習中に述べた通り，集合 S とその部分集合 $T, U \subseteq S$ について，$T = U$ を示すには，

- $T \subseteq U (\Leftrightarrow \forall s \in S, (s \in T \Rightarrow s \in U))$ かつ $U \subseteq T (\Leftrightarrow \forall s \in S, (s \in U \Rightarrow s \in T))$

を示すのだが，たいてい片側の包含関係は自明になっていることが多い．

（解答）「$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ の証明」
$A, B \subseteq A \cup B$ より，$f(A), f(B) \subseteq f(A \cup B)$ である．よって $f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$ である．逆に，任意の $y \in Y$ について $y \in f(A \cup B)$ とすると，$y = f(x)$ となる $x \in A \cup B$ が存在するが，$x \in A$ ならば $y \in f(A)$ で，$x \in B$ ならば $y \in f(B)$ である．よって $y \in f(A) \cup f(B)$ である．
（解答）「$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ の証明」
$A \cap B \subseteq A, B$ より，$f(A \cap B) \subseteq f(A), f(B)$ である．よって $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ である．

（コメント）以上では，集合 S と部分集合 $T, U, W \subseteq S$ について，以下の 2 つを用いています．

1. $T, U \subseteq W$ ならば $(T \cup U) \subseteq W$ である．
2. $W \subseteq T, U$ ならば $W \subseteq (T \cap U)$ である．

どちらも定義から明らかですが，一応，次のように示せます．

1. $s \in S$ が $s \in T \cup U$ ならば，$s \in T$ または $s \in U$ である．$T, U \subseteq W$ より，どの場合も $t \in W$ である．
2. $s \in S$ が $s \in W$ であれば，$W \subseteq T, U$ より，$s \in T$ かつ $s \in U$ である．よって $s \in T \cap U$ である．

また，関数 $f : P \to Q$ と部分集合 $R, S \subseteq P$ について，以下も用いています．

- $R \subseteq S$ ならば $f(R) \subseteq f(S)$ である．

これも明らかですが，次のように示せます．

- $q \in Q$ が $q \in f(R)$ のとき，$q = f(r)$ なる $r \in R$ が存在するが，$R \subseteq S$ より $r \in S$ である．よって $q \in f(S)$ である．

$\boxed{\mathrm{VI}}$ 関数 $f : X \to Y$ と $g : Y \to Z$ について，以下を示せ．

1. f, g が全射ならば $g \circ f$ も全射になる．
2. f, g が単射ならば $g \circ f$ も単射になる．
3. $g \circ f$ が全射ならば g も全射になる．
4. $g \circ f$ が単射ならば f も単射になる．

（解答）

1. 任意の $z \in Z$ について $z = (g \circ f)(x)(= g(f(x)))$ なる $x \in X$ の存在を示せばよい．g が全射なので $z = g(y)$ なる $y \in Y$ が存在し，f が全射なので $y = f(x)$ なる $x \in X$ が存在する．この $x \in X$ について $z = (g \circ f)(x)$ となっている．
2. 任意の $x \neq x' \in X$ について $g(f(x)) \neq g(f(x'))$ を示せばよい．f が単射なので $f(x) \neq f(x')$ であり，g が単射なので $g(f(x)) \neq g(f(x'))$ がえられた．
3. g が全射でないとき，$g \circ f$ が全射でないことを示せばよい．g が全射でないので，$\exists z \in Z, \forall y \in Y, z \neq g(y)$ となっている．よって $\forall x \in X, z \neq g(f(x))$ となっている．
4. f が単射でないとき，$g \circ f$ も単射でないことを示せばよい．f が単射でないので，ある $x \neq x' \in X$ が存在して，$f(x) = f(x')$ となる．よって $g(f(x)) = g(f(x'))$ がわかった．

（コメント）演習中には別解として，単射や全射の圏論的言い換えを用いる方法も説明しました．

1　4/18 の連絡事項

- S1 の演習は，微積と線型を合わせて 1 科目として成績がつきます．今のところ，「授業の試験の成績」と「演習のレポート」を加味してつけようと考えています．
- シラバスには 2 名の教員が演習を隔週で受け持つことになっていますが，実際は私（土岡）が毎週受け持ちます．シラバスの訂正をお願いします．
- 今日は「7 章の確認問題」と「3 章の確認問題」を扱います．
- 演習には TA が 4 人います．分からないことは何でも聞いてください．
- 配布される資料(解答を含む)は `http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~tshun/2017s1.html` にもあります．またそこからメッセージフォームにリンクを張っています．匿名で要望等あれば，お気軽にどうぞ．
- 質問箱を用意したので，質問や要望はお気軽に投函してください（匿名やペンネームも可）．
- 「アクチュアリーについて知りたい」という要望があったので，近いうちに扱います．