(A2) 1. 関数 $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$ を，$x=0$ のまわりでベキ級数展開せよ．また，その収束半径 R を求めよ．

2. $|a|<R$ となる a について，関数 $f(x)$ を $x=a$ のまわりでベキ級数展開せよ．その級数が収束するような x の範囲を求めよ．

$f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}=(x-2)^{-2}$ より

$f'(x)=-2(x-2)^{-3}$ …… ☆

$f^{(m)}(x)=(-1)^m(m+1)!\,(x-2)^{-(m+2)}$

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ のとき $f^{m}(0)=m!\,a_m$ から

$m!\,a_m=(-1)^m(m+1)!\,(0-2)^{-(m+2)}$
$=(m+1)!\left(\frac{1}{2}\right)^{m+2}$

$\therefore a_m=\left(\frac{1}{2}\right)^{m+2}(m+1)$.

収束半径は $\overline{\lim}\sqrt[m]{|a_m|}=\frac{1}{2}$ より 2.

$f(x)=\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{m+2}x^m$ //

② ☆により $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_m(x-a)^n$ とおくと

$m!\,b_m=(-1)^m(m+1)!\,(a-2)^{-(m+2)}$

$b_m=(m+1)(-1)^m(a-2)^{-(m+2)}$.

$f(x)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(m+1)(a-2)^{-(m+2)}x^m$

収束半径は $\overline{\lim}\sqrt[m]{|b_m|}=\frac{1}{|a-2|}$ より

$|a-2|$ //