（B3）の説明：ヒルベルト空間＝「完備内積空間V」

やはり微分方程式の
解の存在に用いる
議論が典型的な
使い方のようです
（例えば、境界値を決めた
ラプラス方程式△u=0とか）

「直接法による変分法」
などで調べてみてください。

（B3）の説明：ヒルベルト空間＝「完備内積空間 V」
つまり、V は R or C 線型空間であって、内積 $(,)$ があって、これから定まる距離 $dist(v,w) := (v-w, v-w)^{1/2}$ に関してのコーシー列が収束する。

（B3）の説明：ヒルベルト空間＝「完備内積空間 V」

つまり、V は R or C 線型空間であって、内積 $(,)$ があって、これから定まる距離 $dist(v,w):=(v-w,v-w)^{1/2}$ に関してのコーシー列が収束する。

ヒルベルト空間は、無限次元の線形代数を行うよい舞台です。

e.g.）有限次元内積空間 V が、正規直交基底 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ をもつとき任意の v∈V は、$v = (v,e_1)e_1 + (v,e_2)e_2 + \cdots + (v,e_n)e_n$ と展開されます。

(B3)の説明:ヒルベルト空間＝「完備内積空間 V」

つまり、V は R or C 線型空間であって、内積 $(,)$ があって、これから定まる距離 $dist(v,w):=(v-w,v-w)^{1/2}$ に関してのコーシー列が収束する。

ヒルベルト空間は、無限次元の線形代数を行うよい舞台です。

e.g.) 有限次元内積空間 V が、正規直交基底 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ をもつとき

任意の $v \in V$ は、$v = (v,e_1)e_1 + (v,e_2)e_2 + \cdots + (v,e_n)e_n$ と展開されます。

今 V={[0,1]で定義された(複数値)連続関数} に、$(f,g) := \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$

とすると、これは内積になる(ただし、V はヒルベルト空間ではない)。また

$\{exp(2\pi inx)\}_n$ は正規直交である。よって $c_n = (f, e^{2\pi inx}) = \int_0^1 f(t)e^{-2\pi int}dt$

とすると、f∈Vは $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi inx}$ としたくなる。(B3)は f(x) = x−1/2 に

これを適用して、$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$ を示す、という問題です。

RESEARCH INSTITUTE FOR MATHEMATICAL SCIENCES

KYOTO UNIVERSITY

RIMSのロゴ

RIMSは京大数学教室とは別組織です

業界ではPubl.RIMSと略されます

[abc予想 (1985)] 任意の $\varepsilon>0$ に対して、ある $K=K(\varepsilon)>0$ が存在して、互いに素な $a,b,c\geqq 1$ が、$a+b=c$ ならば $c<K\cdot rad(abc)^{1+\varepsilon}$ が成り立つ。

ここで、$rad(x)$ =（xを割り切る素数の積）。(e.g. $rad(108) = rad(2^2 3^3) = 2\cdot 3 = 6$)

[強いabc予想, 未解決] $\varepsilon=1$ のとき、$K=1$ と取れる。すなわち、互いに素な $a,b,c\geqq 1$ が、$a+b=c$ ならば、不等式 $c<rad(abc)^2$ が成り立つ。

(e.g.) $a=1,\ b=2\cdot 3^7=4374,\ \ c=5^4\cdot 7=4375$ のとき、$rad(abc) = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7 = 210$

[abc予想 (1985)] 任意の $\varepsilon>0$ に対して、ある $K=K(\varepsilon)>0$ が存在して、互いに素な $a,b,c\geqq 1$ が、$a+b=c$ ならば $c<K\cdot rad(abc)^{1+\varepsilon}$ が成り立つ。

ここで、$rad(x)$ = (xを割り切る素数の積)。(e.g. $rad(108)=rad(2^2 3^3)=2\cdot 3=6$)

[強いabc予想, 未解決] $\varepsilon=1$ のとき、$K=1$ と取れる。すなわち、互いに素な $a,b,c\geqq 1$ が、$a+b=c$ ならば、不等式 $c<rad(abc)^2$ が成り立つ。

(e.g.) $a=1,\ b=2\cdot 3^7=4374,\ \ c=5^4\cdot 7=4375$ のとき、$rad(abc)=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7=210$

---

abc予想は、"固定された素数 $p_1,p_2,\cdots,p_r$ のみを使って、自然数 a,b,c を $a+b=c$ となるように作ることは難しい"と解釈できる。整数論は数学の女王(by Gauss)だが、その面白さの一因は「単純な足し算と単純な掛け算の複雑な相互作用」にある(e.g., 双子素数予想)。abc予想は、自然数に内在する(と予想される)、加法と乗法の調和を直接表現している。

[abc予想 (1985)] 任意の $\varepsilon>0$ に対して、ある $K=K(\varepsilon)>0$ が存在して、互いに素な $a,b,c\geqq 1$ が、$a+b=c$ ならば $c<K\cdot rad(abc)^{1+\varepsilon}$ が成り立つ。
ここで、$rad(x)=$（xを割り切る素数の積）。(e.g. $rad(108)=rad(2^2 3^3)=2\cdot 3=6$)

[強いabc予想, 未解決] $\varepsilon=1$ のとき、$K=1$ と取れる。すなわち、互いに素な $a,b,c\geqq 1$ が、$a+b=c$ ならば、不等式 $c<rad(abc)^2$ が成り立つ。
(e.g.) $a=1,\ b=2\cdot 3^7=4374,\ \ c=5^4\cdot 7=4375$ のとき、$rad(abc)=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7=210$

---

abc予想は、”固定された素数 $p_1,p_2,\cdots,p_r$ のみを使って、自然数 a,b,c を $a+b=c$ となるように作ることは難しい”と解釈できる。整数論は数学の女王(by Gauss)だが、その面白さの一因は「単純な足し算と単純な掛け算の複雑な相互作用」にある(e.g., 双子素数予想)。abc予想は、自然数に内在する(と予想される)、加法と乗法の調和を直接表現している。

(注) ケーリー・ハミルトンの定理も驚くべき定理と思えるかもしれません。

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2} r\,drd\theta = 2\pi\int_{-\infty}^{0} e^s \frac{ds}{2} = \pi$$

$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ と変換

$$dx = (\partial x/\partial r)dr + (\partial x/\partial\theta)d\theta$$

$$dy = (\partial y/\partial r)dr + (\partial y/\partial\theta)d\theta$$

$$\begin{vmatrix} \partial x/\partial r & \partial x/\partial\theta \\ \partial y/\partial r & \partial y/\partial\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{-y^2}dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$ より

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ である(ガウス積分)。2017/12/14付の望月さんの論文

のイントロをながめてみましょう。

[abc予想 (1985)] 任意の $\varepsilon>0$ に対して、ある $K=K(\varepsilon)>0$ が存在して、互いに素な $a,b,c\geqq 1$ が、$a+b=c$ ならば $c<K\cdot rad(abc)^{1+\varepsilon}$ が成り立つ。
ここで、$rad(x)$ = (xを割り切る素数の積)。(e.g. $rad(108)=rad(2^2 3^3)=2\cdot 3=6$)

[強いabc予想, 未解決] $\varepsilon=1$ のとき、$K=1$ と取れる。すなわち、互いに素な $a,b,c\geqq 1$ が、$a+b=c$ ならば、不等式 $c<rad(abc)^2$ が成り立つ。
(e.g.) $a=1,\ b=2\cdot 3^7=4374,\ \ c=5^4\cdot 7=4375$ のとき、$rad(abc)=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7=210$

abc予想は、"固定された素数 $p_1,p_2,\cdots,p_r$ のみを使って、自然数 a,b,c を $a+b=c$ となるように作ることは難しい"と解釈できる。**整数論は数学の女王** (by Gauss)だが、その面白さの一因は「単純な足し算と単純な掛け算の複雑な相互作用」にある(e.g., 双子素数予想)。abc予想は、自然数に内在する(と予想される)、加法と乗法の調和を直接表現している。

(注) 強い abc予想からは、350年未解決だったフェルマー予想「$n\geqq 3$のとき、$x^n+y^n=z^n$ は自然数解 $x,y,z\geqq 1$ は存在しない」も導くことができる。

[abc予想 (1985)] 任意の $\varepsilon>0$ に対して、ある $K=K(\varepsilon)>0$ が存在して、互いに素な $a,b,c\geqq 1$ が、$a+b=c$ ならば $c<K\cdot rad(abc)^{1+\varepsilon}$ が成り立つ。
ここで、$rad(x)=$（xを割り切る素数の積）。(e.g. $rad(108)=rad(2^2 3^3)=2\cdot 3=6$)

[強いabc予想, 未解決] $\varepsilon=1$ のとき、$K=1$ と取れる。すなわち、互いに素な $a,b,c\geqq 1$ が、$a+b=c$ ならば、不等式 $c<rad(abc)^2$ が成り立つ。
(e.g.) $a=1,\ b=2\cdot 3^7=4374,\ \ c=5^4\cdot 7=4375$ のとき、$rad(abc)=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7=210$

（やってみましょう）$x^n+y^n=z^n$ に互いに素な自然数解 x,y,z≧1 が存在するとき、$a=x^n,b=y^n,c=z^n$ として、強いabc予想を適用すると、$c<rad(abc)^2$ である。
今 $rad(abc)=rad((xyz)^n)=rad(xyz)\leqq xyz<z^3$ であるから、$c=z^n<(z^3)^2=z^6$ が導かれた。すなわち $3\leqq n<6$ でフェルマー予想を示せばよく、古くから知られている（$n=3$ はオイラー、$n=4$ はフェルマー）。

（注）強い abc予想からは、350年未解決だったフェルマー予想「$n\geqq 3$のとき、$x^n+y^n=z^n$ は自然数解 $x,y,z\geqq 1$ は存在しない」も導くことができる。

Caffe Strada! は、
ケン・リベットと
バリー・メイザーが
フェルマーの定理に
おおきな貢献をしたカフェ
といわれています。

UCBに行く機会があれば
立ち寄ってみてください。

ここまではネットに書いてある話です。今日は、「abc予想の多項式版」は
「微分d/dxの存在によって簡単」であることを説明します（教科書にはある）。

[多項式のabc予想] $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ を複素数多項式で、共通解をもたず、
$a(t)+b(t)=c(t)$ ならば、不等式 $\deg a, \deg b, \deg c < \deg \mathrm{rad}(abc)$ が成り立つ。
ここで $f(t) = c(t-\alpha_1)^{m_1}\cdots(t-\alpha_n)^{m_n}$ のとき $\mathrm{rad} f(t) = c(t-\alpha_1)\cdots(t-\alpha_n)$

ここまではネットに書いてある話です。今日は、「abc予想の多項式版」は「微分 *d/dx*の存在によって簡単」であることを説明します（教科書にはある）。

[多項式のabc予想] $a(t), b(t), c(t)$ を複素数多項式で、共通解をもたず、$a(t)+b(t)=c(t)$ ならば、不等式 $\deg a, \deg b, \deg c < \deg \mathrm{rad}(abc)$ が成り立つ。ここで $f(t)=c(t-\alpha_1)^{m_1}\cdots(t-\alpha_n)^{m_n}$ のとき $\mathrm{rad} f(t)=c(t-\alpha_1)\cdots(t-\alpha_n)$

（証明の要点）$f'/f=m_1/(t-\alpha_1)+\cdots+m_n/(t-\alpha_n)$ に注意する。

$$a=A_p(t-\alpha_1)^{s_1}\cdots(t-\alpha_k)^{s_k}, b=B_q(t-\beta_1)^{t_1}\cdots(t-\beta_\ell)^{t_\ell}, c=C_r(t-\gamma_1)^{u_1}\cdots(t-\gamma_m)^{u_m}$$

$$a+b=c \Rightarrow f+g=1 \Rightarrow 0=f'+g'=f\frac{f'}{f}+g\frac{g'}{g}$$ （ここで $f:=a/c, g:=b/c$）

$$\therefore \frac{b}{a}=-\frac{f'/f}{g'/g}=-\frac{a'/a-c'/c}{b'/b-c'/c}=-\left(\sum_{h=1}^{k}\frac{s_h}{t-\alpha_h}-\sum_{i=1}^{m}\frac{u_i}{t-\gamma_i}\right)\Big/\left(\sum_{j=1}^{\ell}\frac{t_j}{t-\beta_j}-\sum_{i=1}^{m}\frac{u_i}{t-\gamma_i}\right)$$

$N=\prod_{h=1}^{k}(t-\alpha_h)\prod_{j=1}^{\ell}(t-\beta_j)\prod_{i=1}^{m}(t-\gamma_i)$ とすると、$\deg \mathrm{rad}(abc)=\deg N$（∵共通解をもたない）

$\frac{b}{a}=-\frac{N(f'/f)}{N(g'/g)}$ と、$N(f'/f), N(g'/g)$ が高々 $\deg N-1$ 次であることから従う。■

$\mathbb{Z}$と$\mathbb{C}[x]$はよく似ている（余りのある割り算ができるetc）！

➡$\mathbb{C}[x]$では微分の存在によってabc予想は簡単に証明できる

➡1つの元のみからなる体$\mathbb{F}_1$があって（注：公理よりありません!）、実は$\mathbb{Z}$は$\mathbb{F}_1[x]$“みたいに”なってるんじゃないの?? （1元体、絶対数学）
他にもさまざまな傍証・観察があるようようです。

コワレフスカヤ： It is impossible to be a mathematician without being a poet in soul.

ワイエルシュトラス （コワレフスカヤの師匠）：
A mathematician who is not somewhat of a poet, will never be a perfect mathematician.

クロネッカー：われわれの真の天職は詩人なのだ。ただ、自由につくりだしたものをあとで厳密に証明しなければならない（注：出典を知りたいです）

➡リーマン予想の解決に絶対数学が不可欠であるいう意見があります。

$\mathbb{Z}$と$\mathbb{C}[x]$はよく似ている（余りのある割り算ができるetc）！

多様体＝局所的に$\mathbb{R}^n$

＝微分積分を”張り合わせる”

「7次元球面」は”本質的に”
28個あることが証明できる。

スキーム（概型）＝局所的に可換環

現代数学がたどりついた空間概念

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gsp}}((X,\mathcal{O}_X),\boxed{\mathrm{Spec}(A)})$$

環の空間

$$\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}}(A,\boxed{\Gamma(X,\mathcal{O}_X)})$$

空間の環

ところで、望月さんの楽天ブログがおもしろい!（本人かどうか未確認）

>です。望月先生が、日陰の人の中にまぶしさ
>を感じるのは、どのような時（人）ですか。

2017.10.19
「本ブログの読者の方とのメールのやりとり」より

ところで、望月さんの楽天ブログがおもしろい!（本人かどうか未確認）

>です。望月先生が、日陰の人の中にまぶしさ 2017.10.19
>を感じるのは、どのような時（人）ですか。「本ブログの読者の方とのメールのやりとり」より

アインシュタインがエミー・ネーターを回想した文章が思い浮かびました：

but there is, fortunately, a minority composed of those who recognize early in their lives that the most beautiful and satisfying experiences open to humankind are not derived from the outside, but are bound up with the development of the individual's own feeling, thinking and acting. The genuine artists, investigators and thinkers have always been persons of this kind. However inconspicuously the life of these individuals runs its course, none the less the fruits of their endeavors are the most valuable contributions which one generation can make to its successors.

（訳）ごく少数の人々は、幸運なことに、もっとも美しく満ち足りる体験は、外部からではなく、個人の感情、思考、行動の進展と不可分であることに人生の早い時期に気づく。真の芸術家、研究者、思想家は常にそうであった。どんなに質素な人生になったとしても彼ら/彼女らの努力は、次の世代に引き継がれるもっとも価値のある貢献になる。

ところで、望月さんの楽天ブログがおもしろい! (本人かどうか未確認)

>です。望月先生が、日陰の人の中にまぶしさ 2017.10.19
>を感じるのは、どのような時（人）ですか。「本ブログの読者の方とのメールのやりとり」より

アインシュタインがエミー・ネーターを回想した文章が思い浮かびました:

こころから打ち込めるものが見つかったら幸せだと思います。

(c.f.) 加藤和也さん(シカゴ大)の話

ところで、望月さんの楽天ブログがおもしろい! (本人かどうか未確認)

>です。望月先生が、日陰の人の中にまぶしさ 2017.10.19
>を感じるのは、どのような時（人）ですか。「本ブログの読者の方とのメールのやりとり」より

アインシュタインがエミー・ネーターを回想した文章が思い浮かびました:

こころから打ち込めるものが見つかったら幸せだと思います。

(c.f.) 加藤和也さん(シカゴ大)の話

ファインマンの言葉:「The Quotable Feynmann」より(翻訳本あり)

Work as hard and as much as you want on the things you like to do the best.
Try to keep the other grades from going to zero if you can.

(訳)ベストを尽くしてやりたいと思えることを、やりたいだけやってみよう。
でもできることなら、落第しないくらいには他の科目も手を抜かないようにね。

ところで、望月さんの楽天ブログがおもしろい! (本人かどうか未確認)

>です。望月先生が、日陰の人の中にまぶしさ 2017.10.19
>を感じるのは、どのような時（人）ですか。「本ブログの読者の方とのメールのやりとり」より

アインシュタインがエミー・ネーターを回想した文章が思い浮かびました:

こころから打ち込めるものが見つかったら幸せだと思います。

(c.f.) 加藤和也さん(シカゴ大)の話

ファインマンの言葉:「The Quotable Feynmann」より(翻訳本あり)

Work as hard and as much as you want on the things you like to do the best.
Try to keep the other grades from going to zero if you can.

(訳)ベストを尽くしてやりたいと思えることを、やりたいだけやってみよう。
でもできることなら、落第しないくらいには他の科目も手を抜かないようにね。

とりあえず、単位はちゃんととりましょう。