ロジャース=ラマヌジャン恒等式と表現論

2021/01/10 (Sun)

高校生と社会人のための現代数学・物理学入門講座

新春特別講義 ー ラマヌジャンと宇宙 ー

Shunsuke Tsuchioka（Tokyo Institute of Technology）

tshun@kurims.kyoto-u.ac.jp

1913年，ラマヌジャンがハーディーに宛てた手紙に次の公式がある：

ロジャーズ・ラマヌジャン連分数：
$$\cfrac{1}{1+\cfrac{e^{-2\pi}}{1+\cfrac{e^{-4\pi}}{1+\ddots}}} = \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) e^{2\pi/5}$$

ハーディー：(“**The Indian Mathematician Ramanujan**”, Amer.Math.Month.**44**,1937),

“They defeated me completely; I had never seen anything in the least like them before. A single look at them is enough to show that they could only be written down by a mathematician of the highest class. They must be true because, if they were not true, no one would have had the imagination to invent them.”

[拙訳]これらの公式に，完璧に打ち負かされてしまった．このようなものをいまだかつて見たことがない．ぱっと見ただけで，最高レベルの数学者によってのみ書き下されたものだと分かる．これらは真であるはずだ．何故なら人にはこのようなものを捏造するだけの想像力は備わっていないのだから．

映画だと「本物だとも想像力で書けるものか」「打ちのめされた初めて見たよ」

ロジャーズ・ラマヌジャン連分数: $$\cfrac{1}{1+\cfrac{e^{-2\pi}}{1+\cfrac{e^{-4\pi}}{1+\cfrac{}{\vdots}}}} = \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) e^{2\pi/5}$$

ハーディー: ("The Indian Mathematician Ramanujan", Amer.Math.Month.**44**,1937),

"They defeated me completely; I had never seen anything in the least like them before. A single look at them is enough to show that they could only be written down by a mathematician of the highest class. They must be true because, if they were not true, no one would have had the imagination to invent them."

[拙訳]これらの公式に，完璧に打ち負かされてしまった．このようなものをいまだかつて見たことがない．ぱっと見ただけで，最高レベルの数学者によってのみ書き下されたものだと分かる．これらは真であるはずだ．何故なら人にはこのようなものを捏造するだけの想像力は備わっていないのだから．

ロジャース・ラマヌジャン連分数は, 次の印象的な公式から導出される

$$1+\sum_{n\geq 1}\frac{q^{n^2}}{(1-q)\cdots(1-q^n)}=\frac{1}{(1-q)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^9)(1-q^{11})(1-q^{14})\cdots}$$

$$1+\sum_{n\geq 1}\frac{q^{n^2+n}}{(1-q)\cdots(1-q^n)}=\frac{1}{(1-q^2)(1-q^3)(1-q^7)(1-q^8)(1-q^{12})(1-q^{13})\cdots}$$

ポッホハマー記法 $(a;q)_n := (1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{n-1})$, $(a_1,\cdots,a_m;q)_n := (a_1;q)_n\cdots(a_m:q)_n$ を用いると

ロジャース・ラマヌジャン恒等式: $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{q^{n^2}}{(q;q)_n}=\frac{1}{(q,q^4;q^5)_\infty}, \quad \sum_{n\geq 0}\frac{q^{n^2+n}}{(q;q)_n}=\frac{1}{(q^2,q^3;q^5)_\infty}$

マクマホン:(“Combinatory Analysis”, Cambridge University Press,1915),
“This most remarkable theorem has been verified as far as the coefficient of x^{89} by actual expansion so that there is practically no reason to doubt its truth; but it has not yet been established”

1917年にラマヌジャンがロジャースの証明を図書館で再発見されたとされる(ハーディー, “Ramanujan”, CUP, 1940)が諸説あるようである.

(Sills,“An Invitation to the Rogers–Ramanujan Identities”, CRS Press,2018)

シューアとマクマホンは、ロジャース･ラマヌジャン恒等式が、次の初等的命題と同値であることに気づいた: 任意の自然数 n について,

① (A) を満たす n の分割は, (B) を満たす n の分割と同数存在する.

② (C) を満たす n の分割は, (D) を満たす n の分割と同数存在する.

(A): 隣り合ったパートの差は2以上 (B): 各パートは5で割ると1または4余る

(C): (A) かつパートに1を含まない (D): 各パートは5で割ると2または3余る

例: ϕ 1 2 = 1+1 3 = 2+1 = 1+1+1

4 = 3+1 = 2+2 = 2+1+1 = 1+1+1+1

5 = 4+1 = 3+2 = 3+1+1 = 2+2+1 = 2+1+1+1 = 1+1+1+1+1

6 = 5+1 = 4+2 = 4+1+1 = 3+3 = 3+2+1 = 3+1+1+1
= 2+2+2 = 2+2+1+1 = 2+1+1+1+1 = 1+1+1+1+1+1

7 = 6+1 = 5+2 = 5+1+1 = 4+3 = 4+2+1 = 4+1+1+1 = 3+3+1 = 3+2+2
= 3+2+1+1 = 3+1+1+1+1 = 2+2+2+1 = 2+2+1+1+1 = 2+1+1+1+1+1
= 1+1+1+1+1+1+1

定義: $\mathrm{Par} = \bigsqcup_{\ell \geq 0} \{\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_\ell) \in \mathbb{Z}^\ell \mid \lambda_1 \geq \cdots \lambda_\ell \geq 1\}$の元を(整数の)分割という.

記法: $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_\ell) \in \mathrm{Par}$ について

(1) 各 λ_i をパート, $\ell=\ell(\lambda)$を長さ, $|\lambda| := \lambda_1 + \ldots + \lambda_\ell$ をサイズと呼ぶ.

(2) $j \geqq 1$について, $\lambda_i = j$ となる $1 \leqq i \leqq \ell$ の個数(重複度)を $m_j(\lambda)$と書く.

例: この記法で (A) を満たす分割の集合 R , (C) を満たす分割の集合 R′ は

$$R = \{\lambda \in \mathrm{Par} \mid \forall j \geq 1, m_j(\lambda) + m_{j+1}(\lambda) \leq 1\} \qquad R' = R \cap \{\lambda \in \mathrm{Par} \mid m_1(\lambda) = 0\}$$
$$= \{\lambda \in \mathrm{Par} \mid 1 \leq \forall i \leq \ell - 1, \lambda_i - \lambda_{i+1} \geq 2\}$$

定義: 2つの分割の集合 C, D ⊆ Par が分割論的に同値(C～D)とは,

任意の $n \geqq 0$ について、$|C \cap \mathrm{Par}(n)| = |D \cap \mathrm{Par}(n)|$ が成り立つこと.

ここで $\mathrm{Par}(n) := \{ \lambda \in \mathrm{Par} \mid |\lambda| = n \}$ (つまり, n の分割の集合)である.

ロジャース・ラマヌジャン分割定理: $R \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T^{(5)}_{1,4}, \quad R' \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T^{(5)}_{2,3}$

ここで $T^{(N)}_{a,b,\cdots} := \{\lambda \in \mathrm{Par} \mid 1 \leq \forall i \leq \ell(\lambda), \lambda_i \equiv a, b, \cdots \pmod N\}$

この講義の目的:

（1） RR恒等式⇔RR分割定理のmotivated proof (アンドリュース・バクスター)

（2） オイラー分割定理 → RR分割定理 → カナデ・ラッセル予想 の順に進む

（3） RR恒等式と表現論（お話程度） $\Leftrightarrow \sum_{m,n\geq 0} \frac{q^{m^2+3mn+3n^2}}{(q;q)_m(q^3;q^3)_n} = \frac{1}{(q,q^3,q^6,q^8;q^9)_\infty}, \cdots$

<u>カナデ・ラッセル予想</u>: $K \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T^{(9)}_{1,3,6,8}, \quad K' \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T^{(9)}_{2,3,6,7}, \quad K'' \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T^{(9)}_{4,3,6,5}$

$K := \{\lambda \mid {}^{\lambda_i - \lambda_{i+2} \geq 3}_{\lambda_i - \lambda_{i+1} \leq 1 \Rightarrow \lambda_i + \lambda_{i+1} \in 3\mathbb{Z}}\}, K' := K \cap \{\lambda \mid m_1 = 0\}, K'' := K' \cap \{\lambda \mid m_2 = 0\}$

<u>オイラー恒等式</u>: $\sum_{n\geq 0} \frac{q^{n(n+1)/2}}{(q;q)_n} = (-q;q)_\infty = \frac{1}{(q;q^2)_\infty}$

$\Updownarrow$

<u>オイラー分割定理</u>: $(\{\lambda \mid \lambda_i > \lambda_{i+1}\} =:)\mathrm{Strict} \overset{\mathrm{PT}}{\sim} \mathrm{Odd}(:= T^{(2)}_1)$

<u>ロジャース・ラマヌジャン恒等式</u>: $\sum_{n\geq 0} \frac{q^{n^2}}{(q;q)_n} = \frac{1}{(q,q^4;q^5)_\infty}, \quad \sum_{n\geq 0} \frac{q^{n^2+n}}{(q;q)_n} = \frac{1}{(q^2,q^3;q^5)_\infty}$

$\Updownarrow$

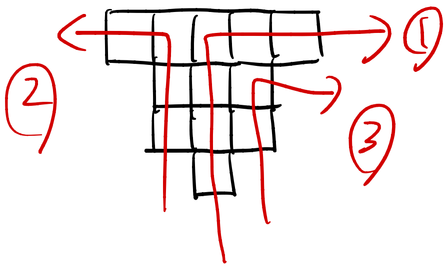
<u>ロジャース・ラマヌジャン分割定理</u>: $R \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T^{(5)}_{1,4}, \quad R' \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T^{(5)}_{2,3}$

$R := \{\lambda \mid \lambda_i - \lambda_{i+1} \geq 2\}, R' := R \cap \{\lambda \mid m_1 = 0\}, T^{(N)}_{a,b,\cdots} := \{\lambda \mid \lambda_i \equiv a, b, \cdots \pmod N\}$

オイラー分割定理 $(\{\lambda \mid \lambda_i > \lambda_{i+1}\} =:)\mathrm{Strict} \overset{\mathrm{PT}}{\sim} \mathrm{Odd}(:= T_1^{(2)})$ の証明

（方法1）Strict∩Par(n) と Odd∩Par(n) の間に全単射を構成する

シルベスター: $n=12 \quad \lambda=(5,3,3,1) \in \mathrm{Odd} \cap \mathrm{Par}(12)$



$\rightsquigarrow (6,4,2)$
$\cap$
Strict ∩ Par(12)

（方法2）母関数を用いる

定義: C ⊆ Par について $f_{\mathcal{C}}(q) := \sum_{\lambda \in \mathcal{C}} q^{|\lambda|} = \sum_{n \geq 0} |\mathrm{Par}(n) \cap \mathcal{C}| q^n (\in \mathbb{C}[[q]])$

例: $f_{\mathrm{Strict}}(q) = 1 + q + q^2 + 2q^3 + 2q^4 + 3q^5 + \cdots$

$\because \quad \mathrm{Par}(0) \cap \mathrm{Strict} = \{\emptyset\}, \quad \mathrm{Par}(1) \cap \mathrm{Strict} = \{(1)\}, \quad \mathrm{Par}(2) \cap \mathrm{Strict} = \{(2)\}$

$\mathrm{Par}(3) \cap \mathrm{Strict} = \{(3),(2,1)\}, \quad \mathrm{Par}(4) \cap \mathrm{Strict} = \{(4),(3,1)\}, \quad \mathrm{Par}(5) \cap \mathrm{Strict} = \{(5),(4,1),(3,2)\}$

命題: $f_{\mathrm{Strict}}(q) = (1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)(1+q^5)\cdots (= (-q;q)_\infty)$

“証明”: q^5 の係数は, $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot q^5 \cdot 1 \ldots$, $q \cdot 1 \cdot 1 \cdot q^4 \cdot 1 \ldots$, $1 \cdot 1 \cdot q^2 \cdot q^3 \cdot 1 \ldots$ の寄与によって係数が 3 である. これらを (5), (4,1), (3,2) ∈ Par(5)∩Strict に対応させる. この対応で q^n の係数は|Par(n)∩Strict|であることがわかる. ■

オイラー分割定理 $(\{\lambda \mid \lambda_i > \lambda_{i+1}\} =:)\mathrm{Strict} \overset{\mathrm{PT}}{\sim} \mathrm{Odd}(:= T_1^{(2)})$ の証明

命題: $f_{\mathrm{Odd}}(q) = (1+q+q^2+q^3+\cdots)(1+q^3+q^6+q^9+\cdots)(1+q^5+q^{10}+q^{15}+\cdots)\cdots$

"証明": q^5 の係数は, q^5・1・..., q^2・q^3・1..., 1・1・q^5・1... によって係数が 3 である. これらを (1,1,1,1,1), (3,1,1), (5) ∈ Par(5)∩Odd に対応させる. ■

（方法2）母関数を用いる

定義: C ⊆ Par について $f_{\mathcal{C}}(q) := \sum_{\lambda\in\mathcal{C}} q^{|\lambda|} = \sum_{n\geq 0} |\mathrm{Par}(n)\cap\mathcal{C}|q^n (\in \mathbb{C}[[q]])$

例: $f_{\mathrm{Strict}}(q) = 1 + q + q^2 + 2q^3 + 2q^4 + 3q^5 + \cdots$

$\because \quad \mathrm{Par}(0)\cap\mathrm{Strict} = \{\emptyset\}, \quad \mathrm{Par}(1)\cap\mathrm{Strict} = \{(1)\}, \quad \mathrm{Par}(2)\cap\mathrm{Strict} = \{(2)\}$

$\mathrm{Par}(3)\cap\mathrm{Strict} = \{(3),(2,1)\}, \quad \mathrm{Par}(4)\cap\mathrm{Strict} = \{(4),(3,1)\}, \quad \mathrm{Par}(5)\cap\mathrm{Strict} = \{(5),(4,1),(3,2)\}$

命題: $f_{\mathrm{Strict}}(q) = (1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)(1+q^5)\cdots(= (-q;q)_\infty)$

"証明": q^5 の係数は, 1・1・1・1・q^5・1..., q・1・1・q^4・1..., 1・1・q^2・q^3・1... の寄与によって係数が 3 である. これらを (5), (4,1), (3,2) ∈ Par(5)∩Strict に対応させる. この対応で q^n の係数は|Par(n)∩Strict|であることがわかる. ■

オイラー分割定理 $(\{\lambda \mid \lambda_i > \lambda_{i+1}\} =:)\mathrm{Strict} \overset{\mathrm{PT}}{\sim} \mathrm{Odd}(:= T_1^{(2)})$ の証明

命題: $f_{\mathrm{Odd}}(q) = (1+q+q^2+q^3+\cdots)(1+q^3+q^6+q^9+\cdots)(1+q^5+q^{10}+q^{15}+\cdots)\cdots$

"証明": q^5 の係数は, q^5・1・..., q^2・q^3・1..., 1・1・q^5・1... によって係数が 3 である. これらを (1,1,1,1,1), (3,1,1), (5) ∈ Par(5)∩Odd に対応させる. ■

$\mathcal{C} \overset{\mathrm{PT}}{\sim} \mathcal{D} \Leftrightarrow f_{\mathcal{C}}(q) = f_{\mathcal{D}}(q)$ in $\mathbb{C}[[q]]$ に注目して $f_{\mathrm{Odd}}(q) = f_{\mathrm{Strict}}(q)$ を以下示す:

$$
\begin{aligned}
f_{\mathrm{Odd}}(q) &= \frac{1}{1-q} \cdot \frac{1}{1-q^3} \cdot \frac{1}{1-q^5} \cdots \\
&= \frac{1}{1-q} \cdot \frac{1-q^2}{1-q^2} \cdot \frac{1}{1-q^3} \cdot \frac{1-q^4}{1-q^4} \cdot \frac{1}{1-q^5} \cdot \frac{1-q^6}{1-q^6} \cdots \\
&= (1+q)(1+q^2)(1+q^3)\cdots = f_{\mathrm{Strict}}(q)
\end{aligned}
$$

ただし最初の等号に以下の補題を用いた. もちろん正当化は必要とするが, 以上でオイラー分割定理が証明された. ■

補題: $\dfrac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots$ in $\mathbb{C}[[q]]$

証明: $(1-q)(1+q+q^2+q^3+\ldots) = 1$ in C[[q]] を確認する. ■

RR分割定理の証明に向けて，母関数の精密化を行う.

定義：C ⊆ Par について $F_{\mathcal{C}}(x,q) := \sum_{\lambda \in \mathcal{C}} x^{\ell(\lambda)} q^{|\lambda|} (\in \mathbb{C}[[x,q]])$

例：$F_{\text{Strict}}(q) = 1 + xq + xq^2 + xq^3 + x^2q^3 + xq^4 + x^2q^4 + xq^5 + 2x^2q^5 + \cdots$

注意：あたりまえだが $F_{\mathcal{C}}(1,q) = f_{\mathcal{C}}(q)$

命題：$F_{\text{Strict}}(x,q) = (1+xq)(1+xq^2)(1+xq^3)(1+xq^4)(1+xq^5)\cdots (= (-xq;q)_\infty)$

証明：x がないときと同様. ■

例：$f_{\text{Strict}}(q) = 1 + q + q^2 + 2q^3 + 2q^4 + 3q^5 + \cdots$

$\because \quad \text{Par}(0) \cap \text{Strict} = \{\emptyset\}, \quad \text{Par}(1) \cap \text{Strict} = \{(1)\}, \quad \text{Par}(2) \cap \text{Strict} = \{(2)\}$

$\text{Par}(3) \cap \text{Strict} = \{(3),(2,1)\}, \quad \text{Par}(4) \cap \text{Strict} = \{(4),(3,1)\}, \quad \text{Par}(5) \cap \text{Strict} = \{(5),(4,1),(3,2)\}$

命題：$f_{\text{Strict}}(q) = (1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)(1+q^5)\cdots (= (-q;q)_\infty)$

“証明”：q^5 の係数は，1･1･1･1･q^5･1…, q･1･1･q^4･1…, 1･1･q^2･q^3･1… の寄与によって係数が 3 である. これらを (5), (4,1), (3,2) ∈ Par(5)∩Strict に対応させる. この対応で q^n の係数は|Par(n)∩Strict|であることがわかる. ■

RR分割定理の証明に向けて，母関数の精密化を行う.

定義：C ⊆ Par について $F_{\mathcal{C}}(x,q) := \sum_{\lambda\in\mathcal{C}} x^{\ell(\lambda)} q^{|\lambda|} (\in \mathbb{C}[[x,q]])$

例： $F_{\mathrm{Strict}}(q) = 1 + xq + xq^2 + xq^3 + x^2q^3 + xq^4 + x^2q^4 + xq^5 + 2xq^5 + \cdots$

注意：あたりまえだが $F_{\mathcal{C}}(1,q) = f_{\mathcal{C}}(q)$

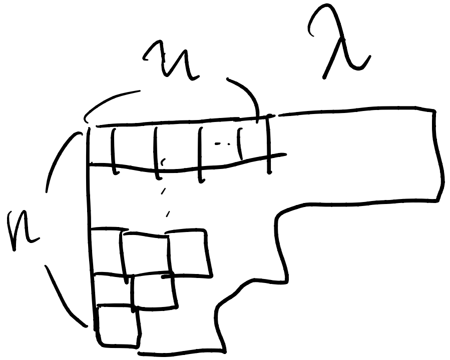
命題：$F_{\mathrm{Strict}}(x,q) = (1+xq)(1+xq^2)(1+xq^3)(1+xq^4)(1+xq^5)\cdots (= (-xq;q)_\infty)$

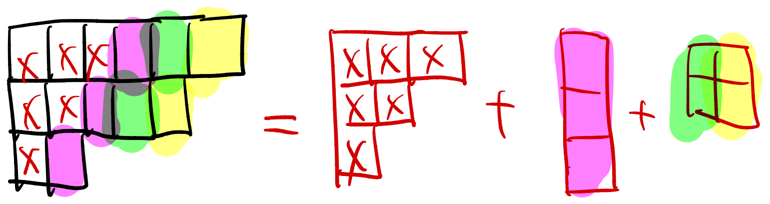
証明：x がないときと同様. ■

staircaseに注目すると，無限和表示が導出できる.

命題：$F_{\mathrm{Strict}}(x,q) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n q^{n(n+1)/2}}{(q;q)_n}$

証明：$\sum_{\substack{\lambda\in\mathrm{Strict}\\ \ell(\lambda)=n}} x^{\ell(\lambda)} q^{|\lambda|} = \frac{x^n q^{n(n+1)/2}}{(q;q)_n}$





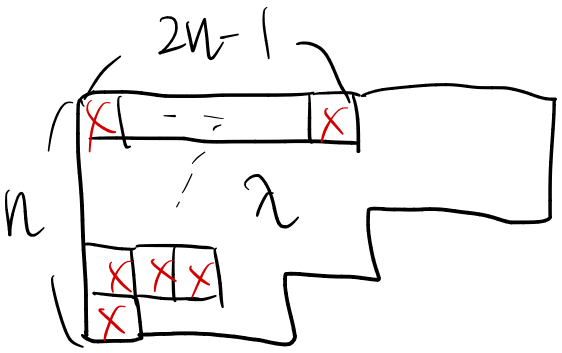
系： $(-x;q)_\infty = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n q^{n(n-1)/2}}{(q;q)_n}$

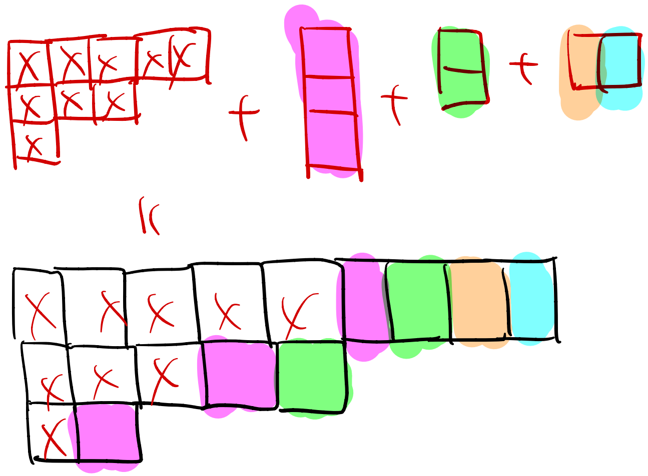
$\frac{1}{(q;q)_3} = (1+q+q^2+\cdots)(1+q^2+q^4+\cdots)(1+q^3+q^6+\cdots)$

RR分割定理の証明に向けて，母関数の精密化を行う.

命題：$F_R(x,q) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n q^{n^2}}{(q;q)_n}$

証明：$\sum_{\substack{\lambda\in R\\ \ell(\lambda)=n}} x^{\ell(\lambda)} q^{|\lambda|} = \frac{x^n q^{n^2}}{(q;q)_n}$





$\frac{1}{(q;q)_3} = (1+q+q^2+\cdots)(1+q^2+q^4+\cdots)(1+q^3+q^6+\cdots)$

staircaseに注目すると，無限和表示が導出できる.

命題：$F_{\mathrm{Strict}}(x,q) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n q^{n(n+1)/2}}{(q;q)_n}$

証明：$\sum_{\substack{\lambda\in \mathrm{Strict}\\ \ell(\lambda)=n}} x^{\ell(\lambda)} q^{|\lambda|} = \frac{x^n q^{n(n+1)/2}}{(q;q)_n}$

系：$(-x;q)_\infty = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n q^{n(n-1)/2}}{(q;q)_n}$

RR分割定理の証明に向けて，母関数の精密化を行う．

命題：$F_R(x,q) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n q^{n^2}}{(q;q)_n}$

証明：$\sum_{\substack{\lambda\in R \\ \ell(\lambda)=n}} x^{\ell(\lambda)} q^{|\lambda|} = \frac{x^n q^{n^2}}{(q;q)_n}$

系：$F_R(x,q) = F_R(xq,q) + xqF_R(xq^2,q)$

証明：一般の $F(x,q) = \sum_{n\geqq 0} A_n(q)x^n$ が，q差分方程式を満たすことは， x^n の係数を比較して $A_n(q) = q^n A_n(q) + q \cdot q^{2(n-1)} A_{n-1}(q)$ と同値（任意のnについて）．よって $A_n(q) = q^{n \cdot n}/(q;q)_n$ が，この漸化式を満たすことを確認すればよい．■

注意：かなり広いクラスの分割 $C \subseteq \mathrm{Par}$ について，$F_C(x,q)$ のq差分方程式を自動的に求めることができる（リンク分割イデアル（アンドリュース）または regularly linked set（Takigiku–T, arXiv:1910.12461）．よって，$F_K(x,q)$ の q差分方程式も，まったく頭を使わずに求めることができる．

後述する Motivated proof によって，$F_R(x,q)$ の q差分方程式の解を

$$F_R(x,q) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n} q^{n(5n+1)/2}(1-x^2q^{2(2n+1)})}{(q;q)_n (xq^{n+1};q)_\infty}$$

と推定することができる（やや誇張かもしれないが）．右辺を思いつくことができれば，本当に解になっていることは，（面倒だが）初等的に確認できる．

系：$F_R(1,q) = \frac{1}{(q;q)_\infty}\sum_{n\geq 0}(-1)^n q^{n(5n+1)/2}(1-q^{2(2n+1)}) = \frac{1}{(q;q)_\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{n(5n+1)/2}$

証明：最初の = は明らか．次のは，$n(5n+1)/2 + 2(2n+1) = (5n^2 + 9n + 4)/2 = (5n+4)(n+1)/2 = m(5m+1)/2$ から従う（ここで $m := -1-n$）．■

定理（ヤコビ三重積）：$(q^2, -zq, -z^{-1}q; q^2)_\infty = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} z^\ell q^{\ell^2}$ in $\mathbb{C}(z)[[q]]$

系：$\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{n(5n+1)/2} = (q^5, q^3, q^2; q^5)_\infty$

証明：q を $q^{5/2}$, z を $-q^{1/2}$ と特殊化する．■

$R \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T^{(5)}_{1,4}$ の証明：$f_R(q) = F_R(1,q) = \frac{(q^5,q^3,q^2;q^5)_\infty}{(q;q)_\infty} = \frac{1}{(q,q^4;q^5)_\infty} = f_{T^{(5)}_{1,4}}(q)$. ■

以下，Motivated proof の概要を述べる：

$$G_1(q) = \frac{1}{(q, q^4; q^5)_\infty} = 1 + q + q^2 + q^3 + 2q^4 + 2q^5 + 3q^6 + \cdots$$

$$G_2(q) = \frac{1}{(q^2, q^3; q^5)_\infty} = 1 + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + 2q^6 + \cdots$$

より $G_3(q) := (G_1(q) - G_2(q))/q = 1+q^3+q^4+q^5+q^6+q^7+2q^8+\dots$ は非負係数と推定され $G_4(q) := (G_2(q) - G_3(q))/q^2 = 1+q^4+q^5+q^6+q^7+q^8+q^9+2q^{10}+\dots$ もそうである.

観察：$G_{i+2}(q) := (G_i(q) - G_{i+1}(q))/q^i = 1 + q^{i+2} + (q^{i+3}$以上の高次項，非負係数)

が（well-definedで），任意の $i \geqq 1$ について，再帰的に成り立つ.

注意：$G_1(q) = f_R(q)$, $G_2(q) = f_{R'}(q)$ を認めると，観察は容易に証明される．実際

$$R_i := \{\lambda \in R \mid m_1(\lambda) = \cdots = m_{i-1}(\lambda) = 0\}$$

について $G_i(q) = f_{R_i}(q)$ が帰納的にわかる.

弱い観察：$G_{i+2}(q) := (G_i(q) - G_{i+1}(q))/q^i = 1 + (q^{i+2}$以上の高次項)

が（well-definedで），任意の $i \geqq 1$ について，再帰的に成り立つ.

弱い観察を仮定して，$G_1(q) = f_R(q)$ を導出される（講義では扱いません）：

定義：$A_1(q) := 1$, $B_1(q) := 0$, $A_{n+1}(q) := A_n(q)+B_n(q)$, $B_{n+1}(q) := q^n A_n(q)$ for $n \geqq 1$.

命題：任意の $n \geqq 1$ について，$G_1(q) = A_n(q)G_n(q) + B_n(q)G_{n+1}(q)$.

証明：$n=1$ なら明らか．後は $q^n G_{n+2} + G_{n+1} = G_n$ から帰納的に従う．■

命題：$A_1(q), A_2(q), \ldots$ はあるべき級数に"収束"する（以後 $A_\infty(q)$ と書く）.

証明：漸化式 $A_{n+1} = A_n + q^{n-1}A_{n-1}$ から，A_{n+1} と A_n は q^{n-2} まで一致する．■

命題：$A_\infty(q) = G_1(q)$.

証明：$G_1 = A_n G_n + B_n G_{n+1} = A_n$（$1+q^n$以上）+（$q^{n-1}$以上）$= A_n+$（$q^{n-1}$以上）. ■

命題：$S_n := \{ \lambda \in R \mid \lambda_1 \leqq n \}$ とし $A'_n(q) := \sum_{\lambda \in S_{n-2}} q^{|\lambda|}$ とすると $A_n(q)=A'_n(q)$ for $n \geqq 2$.

証明：意味を考えると $S_{n-1} = S_{n-2} \cup \{ (n-1,\mu) \mid \mu \in S_{n-3} \}$（非交和）for $n \geqq 4$.

よって $A'_{n+1} = A'_n+q^{n-1}A'_{n-1}$ と A_n と A'_n は同じ漸化式を満たす．■

系：$G_1(q) = A_\infty(q) = A'_\infty(q) = f_R(q)$.

弱い観察の”動機付けられた証明”（青い部分がmotivateされるところ）:

ヤコビ三重積 $(q^2, -zq, -z^{-1}q; q^2)_\infty = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} z^\ell q^{\ell^2}$ において

(1) q を $q^{5/2}$, z を $-q^{1/2}$ と特殊化: $((q;q)_\infty \cdot G_1(q) =)(q^5, q^3, q^2; q^5)_\infty = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}}(-1)^\ell q^{5\ell(\ell+1)/2}$

(2) q を $q^{5/2}$, z を $-q^{3/2}$ と特殊化: $((q;q)_\infty \cdot G_2(q) =)(q^5, q^4, q; q^5)_\infty = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}}(-1)^\ell q^{5\ell(\ell+3)/2}$

つまり $G_1(q)$ と $G_2(q)$ は，$\Delta := (q;q)_\infty$ をかけると”すかすか”になる! $G_3(q)$は??

$$\Delta \cdot G_3(q) = 1 - q - q^2 + q^3 - q^6 + q^8 + q^{10} - q^{12} + q^{17} - q^{20} - q^{23} + q^{26} + \cdots$$

これと以下から $\Delta \cdot G_3(q) = \sum_{n\geqq 0} (-1)^n(1-q^{n+1})(1-q^{2(n+1)})q^{6n+5n(n-1)/2}$ と推測される.

$$1-q-q^2+q^3 = (1-q)(1-q^2), \quad q^6-q^8-q^{10}+q^{12} = q^6(1-q^2)(1-q^4), \quad q^{17}-q^{20}-q^{23}+q^{26} = q^{17}(1-q^3)(1-q^6)$$

$qG_3(q) = G_1(q) - G_2(q)$ だったから，推測を確認するには，以下を確認する:

$$q\sum_{n\geq 0}(-1)^n(1-q^{n+1})(1-q^{2(n+1)})q^{6n+5n(n-1)/2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n(q^{n(5n+1)/2} - q^{n(5n+3)/2})$$

弱い観察: $G_{i+2}(q) := (G_i(q) - G_{i+1}(q))/q^i = 1 + (q^{i+2}$以上の高次項)

が（well-definedで），任意の $i \geqq 1$ について，再帰的に成り立つ.

弱い観察の"動機付けられた証明"（青い部分がmotivateされるところ）：

同様に $\Delta\cdot G_4(q) = \sum_{n\geqq 0} (-1)^n(1-q^{n+1})(1-q^{n+2})(1-q^{2n+3})q^{8n+5n(n-1)/2}$ と推測される.

これも $q^2G_4(q) = G_2(q)-G_3(q)$ から確認することができる.

以上より $\Delta\cdot G_i(q) = \sum_{n\geqq 0} (-1)^n(1-q^{n+1})\dots(1-q^{n+i-2})(1-q^{2n+i-1})q^{in+5n(n-1)/2}$ と推測される.

つまり $G_1(q)$ と $G_2(q)$ は, $\Delta:=(q;q)_\infty$ をかけると"すかすか"になる! $G_3(q)$は??

$$\Delta\cdot G_3(q) = 1-q-q^2+q^3-q^6+q^8+q^{10}-q^{12}+q^{17}-q^{20}-q^{23}+q^{26}+\cdots$$

これと以下から $\Delta\cdot G_3(q) = \sum_{n\geqq 0} (-1)^n(1-q^{n+1})(1-q^{2(n+1)})q^{6n+5n(n-1)/2}$ と推測される.

$$1-q-q^2+q^3 = (1-q)(1-q^2),\quad q^6-q^8-q^{10}+q^{12} = q^6(1-q^2)(1-q^4),\quad q^{17}-q^{20}-q^{23}+q^{26} = q^{17}(1-q^3)(1-q^6)$$

$qG_3(q) = G_1(q)-G_2(q)$ だったから, 推測を確認するには, 以下を確認する：

$$q\sum_{n\geq 0}(-1)^n(1-q^{n+1})(1-q^{2(n+1)})q^{6n+5n(n-1)/2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n(q^{n(5n+1)/2}-q^{n(5n+3)/2})$$

弱い観察：$G_{i+2}(q) := (G_i(q) - G_{i+1}(q))/q^i = 1 + (q^{i+2}$以上の高次項)
が（well-definedで）, 任意の $i\geqq 1$ について, 再帰的に成り立つ.

弱い観察の"動機付けられた証明"（青い部分がmotivateされるところ）:

同様に $\Delta\cdot G_4(q) = \sum_{n\geqq 0} (-1)^n(1-q^{n+1})(1-q^{n+2})(1-q^{2n+3})q^{8n+5n(n-1)/2}$ と推測される.

これも $q^2G_4(q) = G_2(q)-G_3(q)$ から確認できる.

以上より $\Delta\cdot G_i(q) = \sum_{n\geqq 0} (-1)^n(1-q^{n+1})\dots(1-q^{n+i-2})(1-q^{2n+i-1})q^{2in+5n(n-1)/2}$ と推測される

これも $q^iG_{i+2}(q) = G_i(q)-G_{i+1}(q)$ から（大変な計算になるが）確認ができる.

弱い観察の証明: n=0 の項の寄与は $(q;q)_{i-1}/\Delta = 1/(q^i;q)_\infty = 1+$（$q^i$以上の項）.

$n\geqq 1$ の項の寄与は $q^{2in+5n(n-1)/2}$以上なので, q^i以上の項に吸収される. ■

以上で $(R=)R_1 \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T^{(5)}_{1,4}$ が示された. 同様に $(R'=)R_2 \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T^{(5)}_{2,3}$ も示される.

弱い観察: $G_{i+2}(q) := (G_i(q) - G_{i+1}(q))/q^i = 1 + (q^{i+2}$以上の高次項$)$

が（well-definedで）, 任意の $i\geqq 1$ について, 再帰的に成り立つ.

弱い観察の"動機付けられた証明"(青い部分がmotivateされるところ):

同様に $\Delta \cdot G_4(q) = \sum_{n\geqq 0} (-1)^n(1-q^{n+1})(1-q^{n+2})(1-q^{2n+3})q^{8n+5n(n-1)/2}$ と推測される.

これも $q^2G_4(q) = G_2(q)-G_3(q)$ から確認できる.

以上より $\Delta \cdot G_i(q) = \sum_{n\geqq 0} (-1)^n(1-q^{n+1})\ldots(1-q^{n+i-2})(1-q^{2n+i-1})q^{2in+5n(n-1)/2}$ と推測される

これも $q^iG_{i+2}(q) = G_i(q)-G_{i+1}(q)$ から(大変な計算になるが)確認ができる.

弱い観察の証明: $n=0$ の項の寄与は $(q;q)_{i-1}/\Delta = 1/(q^i;q)_\infty = 1+$($q^i$以上の項).

$n\geqq 1$ の項の寄与は $q^{2in+5n(n-1)/2}$以上なので, q^i以上の項に吸収される. ■

以上で $(R=)R_1 \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T^{(5)}_{1,4}$ が示された. 同様に $(R'=)R_2 \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T^{(5)}_{2,3}$ も示される.

命題: 任意の $i\geqq 1$ について $F_R(q^{i-1},q) = f_{R_i}(q)$

ここで $R_i := \{\lambda \in R \mid m_1(\lambda) = \cdots = m_{i-1}(\lambda) = 0\}$

証明: 横が $i-1$ の長方形を引っこ抜く. ■

系1: $f_{R_i}(q) = G_i(q)$ だったから, $F_R(x,q)$ は以下と推測できる(!?):

$$F_R(x,q) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n} q^{n(5n+1)/2}(1-x^2q^{2(2n+1)})}{(q;q)_n(xq^{n+1};q)_\infty}$$

系2： $f_{R_i}(q)=\sum_{n\geq 0}\frac{q^{n(n+i-1)}}{(q;q)_\infty}$

証明： $F_R(x,q)=\sum_{n\geq 0}\frac{x^n q^{n^2}}{(q;q)_n}$ だった. ■

系：RR恒等式が成立する： $\sum_{n\geq 0}\frac{q^{n^2}}{(q;q)_n}=\frac{1}{(q,q^4;q^5)_\infty},\quad \sum_{n\geq 0}\frac{q^{n^2+n}}{(q;q)_n}=\frac{1}{(q^2,q^3;q^5)_\infty}$

文献：G.Andrews-R.Baxter, A motivated proof of the Rogers-Ramanujan identitites, Amer.Math.Monthly **96** (1989). 401-409.

ハーディー（“Ramanujan”, CUP, 1940）

None of these proofs can be called both “simple” and “straightforward,” since the simplest are essentially verifications; *and* ***no doubt it would be unreasonable to expect a really easy proof.***

ハーディー（他編,“Collected Papers of Srinivasa Ramanujan”,CUP,1927）

It would be difficult to find more beautiful formulae than the ‘Rogers-Ramanujan’ identities…

ヤコビ三重積の証明:

命題: $F_{\text{Strict}}(x,q) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n q^{n(n+1)/2}}{(q;q)_n}$

系: $(-x;q)_\infty = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n q^{n(n-1)/2}}{(q;q)_n}$

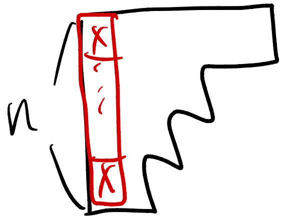
ヤコビ三重積の証明:

命題: $F_{\text{Strict}}(x,q)=\sum_{n\geq 0}\frac{x^n q^{n(n+1)/2}}{(q;q)_n}$

系A: $(-x;q)_\infty=\sum_{n\geq 0}\frac{x^n q^{n(n-1)/2}}{(q;q)_n}$

まったく同様に

命題: $F_{\text{Par}}(x,q)=\sum_{n\geq 0}\frac{x^n q^n}{(q;q)_n}$



系B: $\frac{1}{(x;q)_\infty}=\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{(q;q)_n}$

$$(q^2,-zq;q^2)_\infty=(q^2;q^2)_\infty\sum_{n\geq 0}\frac{(zq)^n q^{n(n-1)}}{(q^2;q^2)_n}=\sum_{n\geq 0}z^n q^{n^2}(q^{2(n+1)};q^2)_\infty=\sum_{n\in\mathbb{Z}}z^n q^{n^2}(q^{2(n+1)};q^2)_\infty$$

最左の = は系Aによる．最右の = は重要なトリックである．系Aも系Bも，ある意味自明なので，この手のトリック（環をC(z)[[q]]からC(z)((q))に変更している）を行わずに，意味のある「無限和＝無限積」は導出できないと思われる．

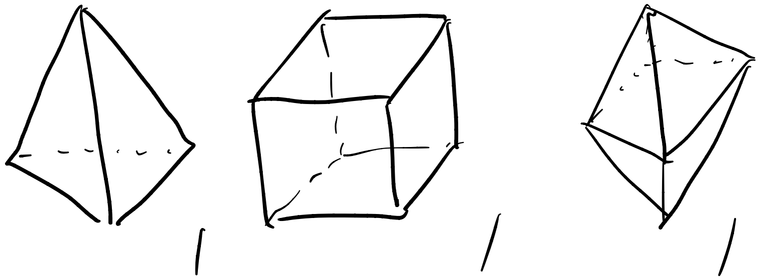
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}z^n q^{n^2}(q^{2(n+1)};q^2)_\infty=\sum_{n\in\mathbb{Z},m\geq 0}z^n q^{n^2}\frac{(-1)^m q^{2(n+1)m}q^{m(m-1)}}{(q^2;q^2)_m}=\sum_{n\in\mathbb{Z},m\geq 0}\frac{(-1)^m z^n q^{(m+n)^2+m}}{(q^2;q^2)_m}$$

m+n=ℓ と変数変換すると，最右は $\sum_{\ell\in\mathbb{Z},m\geq 0}z^\ell q^{\ell^2}\frac{(-qz^{-1})^m}{(q^2;q^2)_m}=\left(\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}z^\ell q^{\ell^2}\right)\frac{1}{(-z^{-1}q;q^2)_\infty}.$ ■

文献: G.Andrews, A simple proof of Jacobi’s triple product identity, Proc.AMS.(1965)

表現論(Representation Theory)を専門にしています。
数論が整数を研究するのだとしたら，対称性を研究する分野だといえる.

(例)正多面体(Platonic Solids)

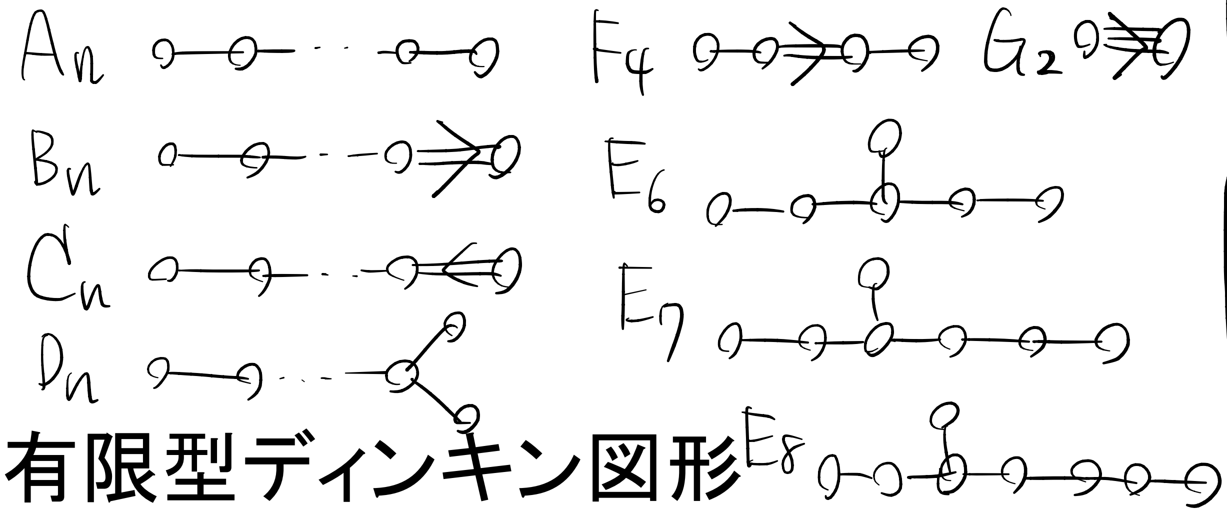


正十二面体

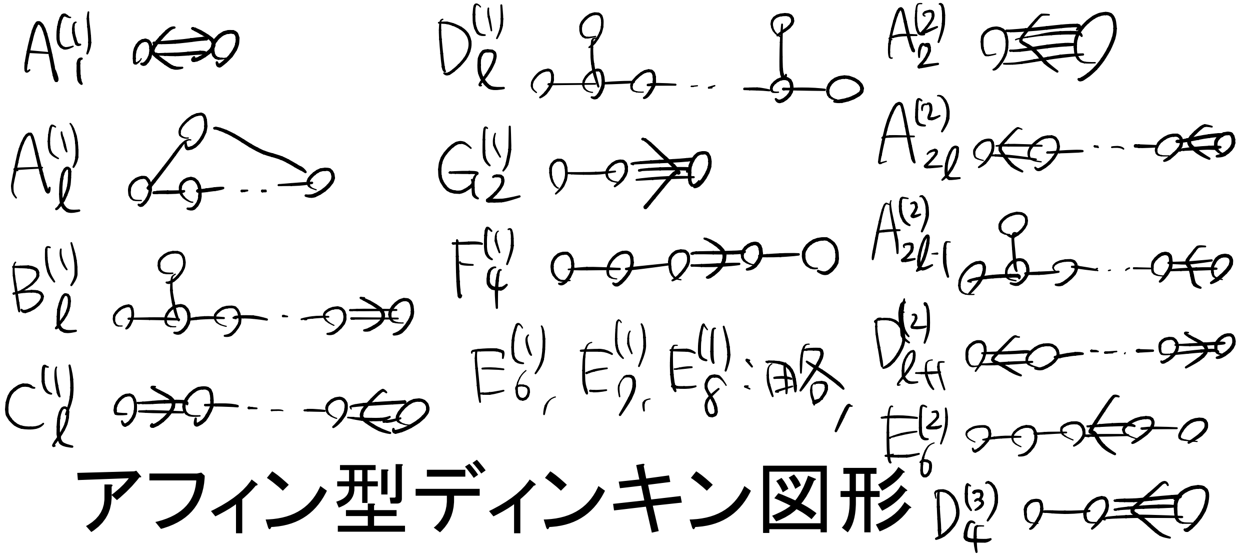
正二十面体

16世紀、ケプラーは当時知られていた5つの太陽系の惑星の運動を，正多面体を用いて理解しようとした.

リー理論(Lie Theory)＝ 現代版正多面体論(modernized Platonic Solids)



有限型ディンキン図形



アフィン型ディンキン図形

映画 : “神の御心でなかったら方程式など何の意味もない”

“私はすべてにおいてその対極の考え方ですが --- たぶん彼は正しい

それこそ我々が純粋数学の根拠とするものでは?”

例 : ボソン・フェルミオン対応 $A^{(1)}_1$型ワイル・カッツ指標公式 ⇄ ヤコビ三重積

対称性 数学

「影」としての現象が

「氷山」の存在を想起させる

表現論 ← → 整数の分割

現象の理解・証明

一般化・類似物

リー理論 ロジャース・ラマヌジャン恒等式

(アフィン・リー環 頂点作用素代数)

リー理論の重要な研究対象に，カッツ・ムーディー・リー環がある．

教科書：V.Kac, Infinite dimensional Lie Algebras, CUP, 1990

谷崎俊之，リー代数と量子群，共立出版

脇本実，無限次元リー環，岩波書店

神保道夫，量子群とヤン・バクスター方程式，シュプリンガー・フェアラーク東京

M.Kashiwara, Bases cristallines des groups quantiques, フランス数学会

ワイル・カッツ指標公式：$\mathrm{ch}\, L(\lambda) = \dfrac{\sum_{w\in W}(-1)^{\ell(w)} e^{w(\lambda+\rho)-\rho}}{\prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-e^{-\alpha})^{\dim \mathfrak{g}_\alpha}}$

マクドナルド恒等式（（アフィン型で）λ=0の場合）：$\displaystyle\sum_{w\in W}(-1)^{\ell(w)} e^{w\rho-\rho} = \prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-e^{-\alpha})^{\dim \mathfrak{g}_\alpha}$

例：$A^{(1)}_1$ の場合：u=-zq, v=-z^{-1}q と特殊化したものが（講義中の）ヤコビ三重積．

$$\prod_{n\geq 1}(1-u^{n-1}v^n)(1-u^n v^{n-1})(1-u^n v^n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} u^{m(m-1)/2} v^{m(m+1)/2}$$

例：$A^{(2)}_2$ の場合：適当に特殊化したものがワトソン五重積（1929年）．

$$\prod_{n\geq 1}(1-u^{4n}v^{2n-1})(1-u^{2n-1}v^n)(1-u^{2n}v^n)(1-u^{4n-4}v^{2n-1})(1-u^{2n-1}v^{n-1}) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} u^{m(3m+2)}v^{m(3m-1)/2} - u^{m(3m+2)}v^{(m+1)(3m+2)/2}$$

1980年年代初頭，レポウスキーとウィルソンは，$A^{(1)}{}_1$型加群 $L(2\Lambda_0+\Lambda_1)$, $L(3\Lambda_0)$（レベル3標準加群）を用いた，RR恒等式の証明に成功した.

文献: J.Lepowsky-R.Wilson, The structure of standard modules, I: Universal algebras and the Rogers-Ramanujan identities, Invent.Math.,77, 199-290 (1984)他

これは「頂点作用素構成」という $A^{(1)}{}_1$型加群 $L(\Lambda_0)$ の実現法をさらに発展させたものである（J.Lepowsky-R.Wilson, Construction of the affine Lie algebra $A^{(1)}{}_1$, Comm.Math.Phys.62 (1978), 43-53). 頂点作用素構成は，Frenkel-Kac や Segal によって，当時 dual resonance model と呼ばれていた弦理論の考察からもえられている. レポウスキーとウィルソンは，RR恒等式の無限積と，レベル3標準加群の指標の類似を追究する中で頂点作用素に到達し，ガーラントにその後弦理論に類似の公式が登場することを指摘されている. RR恒等式が，アフィン・リー環の表現論にインスピレーションを与えた，といってよいだろう.

Andrews-Gordon恒等式

$A^{(1)}_1$型加群 $L((2k-i)\Lambda_0+(i-1)\Lambda_1)$ に同じ理論を適用して，以下がえられる．

定理：任意の k≧2 と 1≦i≦k について

(1) $\{\lambda \in \mathrm{Par} \mid m_1(\lambda) < i \text{ and } \forall j, \lambda_j - \lambda_{j+k-1} \geq 2\} \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T^{(2k+1)}_{\{1,\cdots,2k\}\setminus\{i,2k+1-i\}}$

(2) $$\sum_{n_1,\cdots,n_{k-1}\geq 0} \frac{q^{N_1^2+\cdots+N_{k-1}^2+N_i+\cdots+N_{k-1}}}{(q;q)_{n_1}\cdots(q;q)_{n_{k-1}}} = \frac{(q^i,q^{2k+1-i},q^{2k+1};q^{2k+1})_\infty}{(q;q)_\infty} \text{ where } N_j := n_j+\cdots+n_{k-1}$$

注意：k=2, i=2,1 が，RR分割定理やRR恒等式になっている．この定理自体はゴードン（1961年）やアンドリュース（1974年）が，アフィン・リー環と関係なくえていた．頂点作用素による証明はMeurman-Primc (Adv.Math.1987)による．偶数レベルでも，類似物がある（Andrews-Gordon-Bressoud恒等式）．

Big Picture：**アフィン・ディンキン図形を選び，頂点に非負整数を書き込むごとに，”ロジャース・ラマヌジャンのような”分割定理や恒等式が存在する．** 詳しくは述べないが，無限積はワイル・カッツ指標公式から計算されるものである．

$A^{(2)}_2$型Andrews-Gordon恒等式に向けて

S.Capparelli は，博士論文（ラトガーズ大, 1992）において $A^{(2)}_2$型レベル3標準加群 $L(\Lambda_0+2\Lambda_1)$ と $L(3\Lambda_0)$ を頂点作用素を用いて構造解析し，以下を予想した.

<u>定理</u>: $C_a := R \cap \{\lambda \mid m_a(\lambda) = 0 \text{ and } \forall j, \lambda_j - \lambda_{j+1} \leq 3 \Rightarrow \lambda_j + \lambda_{j+1} \in 3\mathbb{Z}\}$（a=1,2）について

$$C_a \overset{\text{PT}}{\sim} (\text{Strict} \cap \{\lambda \mid \forall j, \lambda_j \not\equiv \pm a \pmod 6)\}$$

<u>注意</u>: これは頂点作用素の考察から初めて予想された分割定理である.

アンドリュースがq級数で証明した他，CapparelliやTamba-Xieが頂点作用素で証明している. 無限和もいくつか形が知られている（以下はTakigiku-Tによる）.

<u>例</u>:
$$f_{C_a}(q) = \sum_{i,j,k\geq 0} \frac{q^{5i(i-1)/2+5j(j-1)/2+6k(k-1)+3ij+6ik+6jk+(3-a)i+(2+a)j+6k}}{(q^2;q^2)_i(q^2;q^2)_j(q^3;q^3)_k} = (-q^3,-q^6,-q^{3-a},-q^{3+a};q^6)_\infty$$

<u>Big Picture</u>: アフィン・ディンキン図形を選び，頂点に非負整数を書き込むごとに，”ロジャース・ラマヌジャンのような”分割定理や恒等式が存在する. 詳しくは述べないが，無限積はワイル・カッツ指標公式から計算されるものである.

$A^{(2)}_2$型Andrews-Gordon恒等式に向けて

D.Nandi は，博士論文（ラトガーズ大, 2014）において $A^{(2)}_2$型レベル4標準加群 $L(2\Lambda_1)$, $L(2\Lambda_0+\Lambda_1)$, $L(4\Lambda_0)$ を頂点作用素で構造解析し，分割定理を予想した.

$$\mathcal{N}_1 \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T^{(14)}_{2,3,4,10,11,12}, \quad \mathcal{N}_2 \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T^{(14)}_{1,4,6,8,10,13}, \quad \mathcal{N}_3 \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T^{(14)}_{2,5,6,8,9,12}$$

これは[Takigiku-T, arXiv:1910.12461]で証明された．複雑なので $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{N}_3$ の定義はここでは述べない．無限和表示もえられている.

例：
$$f_{\mathcal{N}_1}(q) = \sum_{i,j\geq 0} (-1)^j \frac{q^{i(i+1)/2+j^2+2ij}}{(q;q)_i (q^2;q^2)_j} = \frac{1}{(q^2,q^3,q^4,q^{10},q^{11},q^{12};q^{14})_\infty}$$

$A^{(2)}_2$ でレベル5以上で知られていることはあまりない．M.Hirschhorn（1979年）

$$\{\lambda = (a_1 \leq a_2 \leq \cdots) \mid a_1 \geq 2, a_2 \geq a_1, a_3 - a_2 \geq 2, a_4 \geq a_3\} \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T^{(16)}_{2,3,4,5,11,12,13,14}$$

のは無限積がリー理論から予言されるものだが（レベル5の1つ），差条件が場所に依存するため，Big Pictureが予言する"RRのような分割"ではないと思われる．レベル5,7に無限積が一致するこの種の分割定理が知られている.

$A^{(2)}_2$型Andrews-Gordon恒等式に向けて

[Takigiku-T, arXiv:2006.02630]で，レベル5,7に無限積が一致する”RRのような”恒等式を証明している（いくつかは東工大のTSUBAME3によって予想された）.

例：
$$\sum_{i,j,k\geq 0}(-1)^k\frac{q^{i(i+1)/2+j^2+k^2+2ij+2ik+4jk+j}}{(q;q)_i(q^2;q^2)_j(q^2;q^2)_k}=\frac{1}{(q^2,q^3,q^4,q^5,q^{11},q^{12},q^{13},q^{14};q^{16})_\infty}$$

レベル6に無限積が一致する恒等式には，McLaughlin-Sills（2008年）による
$$\sum_{n\geq 0}\frac{q^{n^2+n}(-1;q^3)_n}{(-1;q)_n(q;q)_{2n}}=\frac{1}{(q^2,q^3,q^4,q^5,q^6,q^{12},q^{13},q^{14},q^{15},q^{16};q^{18})_\infty}$$

などがある（レベルℓ標準加群は1+[ℓ/2]個存在する）．最近，カナデ・ラッセル（arXiv:2010.01008）は，これらを含むような，任意のレベルで無限積が一致するような恒等式をえている．ただし，これらが“RRのような”恒等式かは議論の余地がある．また“RRのような”分割の条件や頂点作用素との関係も分かっていない．$A^{(2)}_2$型の“Andrews-Gordon恒等式”はワトソン5重積に関係しレベルmod 6で形が違うと想像される（6 = twistedコクセター数）.

$A^{(2)}_{奇数}$型でレベル2の場合

$A^{(2)}_5$型でレベル2の場合，Big Pictureの予言は，Göllnitz-Gordon分割定理として知られているもの（1960年代）と考えられる．1つ書くと

RR型分割定理：$\{\lambda \in \mathrm{Par} \mid \forall i, \lambda_i - \lambda_{i+1} \geq 2 \ \ (\geq \text{ is } > \text{ if } \lambda_i \in 2\mathbb{Z})\} \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T^{(8)}_{1,4,7}$

RR型恒等式：$\displaystyle\sum_{i,j\geq 0} \frac{q^{i(3i-1)/2+4j^2+4ij}}{(q;q)_i(q^4;q^4)_j} = \frac{1}{(q,q^4,q^7;q^8)_\infty}$ （Kurșungöz, JCTA, 2019年）

頂点作用素との関係は，カナデ（Ramanujan J. 2018年）による．

$A^{(2)}_7$型でレベル2の場合，Big Pictureの予言はRR分割定理と考えられ，頂点作用素との関係は，Misra-Bos（Commun.Alg. 1994年）による．

$A^{(2)}_9$型でレベル2の場合，カナデ・ラッセル（Electron. J. Combin. 2019年）は，分割定理と恒等式を予想し，Bringmann et.al.（Crelle, 2020年）やRosengren（arXiv:1912.03689）で証明された．頂点作用素との関係は不明．1つ書くと

$A^{(2)}_{奇数}$型でレベル2の場合

RR型分割定理: $\left\{\lambda \in \mathrm{Par} \,\middle|\, {m_1(\lambda)=0 \text{ and } \forall j\geq 0, m_{2j+1}(\lambda)\leq 1 \text{ and } \forall i, \lambda_i-\lambda_{i+1}\neq 1 \atop \forall i, \lambda_i-\lambda_{i+2}\geq 4 \text{ if } \lambda_{i+1}\in 2\mathbb{Z} \text{ and } (\lambda_{i+1}=\lambda_{i+2} \text{ or } \lambda_i=\lambda_{i+1})}\right\} \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T^{(12)}_{1,4,6,8,11}$

RR型恒等式: $$\sum_{i,j,k,\geq 0}(-1)^k\frac{q^{(i+2j+3k)(i+2j+3k-1)/2+3k^2+i+6j+6k}}{(q;q)_i(q^4;q^4)_j(q^6;q^6)_k}=\frac{1}{(q,q^4,q^6,q^8,q^{11};q^{12})_\infty}$$

$A^{(2)}_{11}$型でレベル2の場合，無限積は$A^{(2)}_{2}$型レベル4になっている．しかし，Nandi の分割と，$A^{(2)}_{11}$加群の頂点作用素を通じた関係は不明である．

$A^{(2)}_{13}$型でレベル2の場合，[Takigiku-T, arXiv:2006.02630]で無限積が一致する"RRのような"恒等式を予想している．1つ書くと

予想: $$\sum_{i,j,k,\geq 0}(-1)^j\frac{q^{i(i+1)/2+j(j+2)+4k(2k+1)+2ij+4ik+4jk}}{(q;q)_i(q^2;q^2)_j(q^4;q^4)_k}=\frac{1}{(q,q^4,q^6,q^8,q^{10},q^{12},q^{15};q^{16})_\infty}$$

$A^{(2)}_{9}$型でレベル2の場合，カナデ･ラッセル（Electron. J. Combin. 2019年）は，分割定理と恒等式を予想し，Bringmann et.al.（Crelle, 2020年）やRosengren（arXiv:1912.03689）で証明された．頂点作用素との関係は不明．1つ書くと

カナデ・ラッセル予想

$D^{(3)}_4$型レベル3のBig Pictureの予言と考えられるが，頂点作用素との関係は不明である．証明には$D^{(3)}_4$型マクドナルド恒等式が用いられると想像される．

$$\Leftrightarrow \sum_{m,n\geq 0} \frac{q^{m^2+3mn+3n^2}}{(q;q)_m(q^3;q^3)_n} = \frac{1}{(q,q^3,q^6,q^8;q^9)_\infty}, \cdots$$

カナデ・ラッセル予想：$K \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T^{(9)}_{1,3,6,8}, \quad K' \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T^{(9)}_{2,3,6,7}, \quad K'' \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T^{(9)}_{4,3,6,5}$

$$K := \{\lambda \mid {}^{\lambda_i - \lambda_{i+2} \geq 3}_{\lambda_i - \lambda_{i+1} \leq 1 \Rightarrow \lambda_i + \lambda_{i+1} \in 3\mathbb{Z}}\}, K' := K \cap \{\lambda \mid m_1 = 0\}, K'' := K' \cap \{\lambda \mid m_2 = 0\}$$

オイラー恒等式：$\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{q^{n(n+1)/2}}{(q;q)_n} = (-q;q)_\infty = \frac{1}{(q;q^2)_\infty}$

$\Updownarrow$

オイラー分割定理：$(\{\lambda \mid \lambda_i > \lambda_{i+1}\} =:)\mathrm{Strict} \overset{\mathrm{PT}}{\sim} \mathrm{Odd}(:= T^{(2)}_1)$

ロジャース・ラマヌジャン恒等式：$\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{q^{n^2}}{(q;q)_n} = \frac{1}{(q,q^4;q^5)_\infty}, \quad \sum_{n\geq 0} \frac{q^{n^2+n}}{(q;q)_n} = \frac{1}{(q^2,q^3;q^5)_\infty}$

$\Updownarrow$

ロジャース・ラマヌジャン分割定理：$R \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T^{(5)}_{1,4}, \quad R' \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T^{(5)}_{2,3}$

$$R := \{\lambda \mid \lambda_i - \lambda_{i+1} \geq 2\}, R' := R \cap \{\lambda \mid m_1 = 0\}, T^{(N)}_{a,b,\cdots} := \{\lambda \mid \lambda_i \equiv a, b, \cdots \pmod N\}$$

リー理論とのその他の関係

アフィン・リー環とRR型恒等式の関係の仕方には，他の方法も知られている．

文献: B. Feigin and A. Stoyanovsky, Quasi-particles models for the representations of Lie algebras and geometry of flag manifold (hep-th/9308079）

では，$A^{(1)}_1$型レベル1標準加群の "principal部分空間" を用いた証明が与えられている．これも頂点作用素の理論を用いるが，「隣り合った差が2以上」という差条件がまず導出できて，無限次元旗多様体を用いて無限積の導出を行っているようである．

続いてCapparelli-Lepowsky-Milas, The Rogers-Ramanujan recursion and intertwining operators, Commun.Contemp.Math.(2003)では，RR恒等式を導出する際に（講義で）用いた q差分方程式 $F_R(x,q) = F_R(xq,q) + xqF_R(xq^2,q)$ が，principal部分空間の短完全系列で理解できることを示している．このような "Motivated proof の圏論化"（または理解）は，今も盛んに研究されている．

リー理論とのその他の関係

アフィン・リー環とRR型恒等式の関係の仕方には，他の方法も知られている．

文献: J. Stembridge, Hall-Littlewood functions, plane partitions and the Rogers-Ramanujan identities, Trans.AMS 319 (1990) 469-498

では，Hall-Littlewood多項式を用いたRR恒等式の証明が与えられている．

これはO.Warnaarらの研究を経て，最近の大きな結果 Griffin-Ono-Warnaar, A framework of Rogers-Ramanujan identities and their arithmetic properties, Duke.Math.(2016) へと発展しているようである．

この講義では述べなかったが，RR恒等式は，q超幾何級数のベイリー補題を用いて証明することができる．Andrews-Schilling-Warnaar, An A_2 Bailey lemma and Rogers-Ramanujan-type identities, J.Amer.Math.Soc.(1999) では，$A^{(1)}_2$型でBig Pictureが予言すると考えられるRR型恒等式のための "ベイリー補題" を示している．最近は，この結果と円柱分割の関係が知られるようになった．

（最近の）ブックガイド

教科書だと H.-C. Chan, An invitation to q-Series – From Jacobi's Triple Product Identity to Ramanujan's "Most Beautiful Identity", World Scientific, (2011) や

A. Sills, An invitation to the Rogers-Ramanujan identities, CRC Press (2018).

K. Ono and A.D. Aczel, My search for Ramanujan: How I Learned to Count, Springer, (2016) はケン・オノさんの自伝である．同書「28章, A Miracle」より：

Each time I looked at a positive event in my life, there was Ramanujan.

そういえば，物理学者のフリーマン・ダイソンはこんなことを言っています：

Whenever I am angry or depressed, I pull down [his] collected papers from the shelf and take a quite stroll in Ramanujan's garden. I recommend this therapy to all of you who suffer from headaches or jangled nerves. And Ramanujan's papers are not only a good therapy for headaches. They also are full of beautiful ideas which may help you to do more interesting mathematics.（出典は，上にあるH.-C. Chanの教科書を参照してください）

最後にハーディー（"Ramanujan", CUP, 1940）による有名なラマヌジャン評を：

It has not the simplicity and the inevitableness of the very greatest work; it would be greater if it were less strange. One gift it shows which no one can deny, profound and invincible originality. He would probably have been a greater mathematician if he could have been caught and tamed a little in his youth; he would have discovered more that was new, and that, no doubt, of greater importance. On the other hand he would have been less of a Ramanujan, and more of a European professor, and the loss might have been greater than the gain...

1894年にロジャースが発見したRR恒等式は，ラマヌジャンによって再発見され，1970年代にはアフィン・リー環の表現論に頂点作用素の理論を導入する動機（の1つ）となった．頂点作用素は，モンスター群やムーンシャインの理解にも本質的であった．RR恒等式を深く理解するための研究は今でも続いており，これからもインスピレーションを与えてくれそうである．

Thank you!

In [3]:

```
R.<q>=ZZ[[]]
```

In [16]:

```
R
```

Out[16]: Power Series Ring in q over Integer Ring

In [11]:

```
((1+q+q^2+q^3+q^4+q^5+q^6+q^7+q^8+q^9)*(1+q^3+q^6+q^9+q^(12))*(1+q^5+q^(10)+q^(15))*(1+q^7)).O(20)
```

Out[11]: 1 + q + q^2 + 2*q^3 + 2*q^4 + 3*q^5 + 4*q^6 + 5*q^7 + 5*q^8 + 6*q^9 + 8*q^10 + 8*q^11 + 10*q^12 + 11*q^13 + 11*q^14 + 12*q^15 + 13*q^16 + 14*q^17 + 14*q^18 + 15*q^19 + O(q^20)

In [14]:

```
res=1
for i in range (1,20):
    res *= (1+q^i)
```

In [22]:

```
res.O(20)
```

Out[22]: 1 + q + q^2 + 2*q^3 + 2*q^4 + 3*q^5 + 4*q^6 + 5*q^7 + 6*q^8 + 8*q^9 + 10*q^10 + 12*q^11 + 15*q^12 + 18*q^13 + 22*q^14 + 27*q^15 + 32*q^16 + 38*q^17 + 46*q^18 + 54*q^19 + O(q^20)

In [18]:

```
res2=1
for i in range (1,20):
    temp=0
    for j in range (0,30):
        temp += q^((2*i-1)*j)
    res2 *= temp
```

In [21]:

```
res2.O(20)
```

Out[21]: 1 + q + q^2 + 2*q^3 + 2*q^4 + 3*q^5 + 4*q^6 + 5*q^7 + 6*q^8 + 8*q^9 + 10*q^10 + 12*q^11 + 15*q^12 + 18*q^13 + 22*q^14 + 27*q^15 + 32*q^16 + 38*q^17 + 46*q^18 + 54*q^19 + O(q^20)

In [8]:

```
R1.<z>=ZZ[[]]
R2.<q>=R1[[]]
```

In [22]:
```
R1
```

Out[22]: Power Series Ring in z over Integer Ring

In [23]:
```
R2
```

Out[23]: Power Series Ring in q over Power Series Ring in z over Integer Ring

In [14]:
```
res3=1
for i in range (1,30):
    res3 *= (1-q^(2*i))*(1+z*q^(2*i-1))*(1+z^(-1)*q^(2*i-1))
    res3 = res3.O(30)
```

In [15]:
```
res3
```

Out[15]: 1 + (z^-1 + z)*q + (z^-2 + z^2)*q^4 + (z^-3 + z^3)*q^9 + (z^-4 + z^4)*q^16 + (z^-5 + z^5)*q^25 + O(q^30)

In [22]:
```
R3.<q>=ZZ[[]]
R3.set_default_prec(200)
f1 = 1/(prod([1-q^(5*i+1) for i in range (50)])*prod([1-q^(5*i+4) for i in range (50)]))
f2 = 1/(prod([1-q^(5*i+2) for i in range (50)])*prod([1-q^(5*i+3) for i in range (50)]))
delta = prod([1-q^i for i in range (1,200)])
```

In [23]:
```
f1.O(20)
```

Out[23]: 1 + q + q^2 + q^3 + 2*q^4 + 2*q^5 + 3*q^6 + 3*q^7 + 4*q^8 + 5*q^9 + 6*q^10 + 7*q^11 + 9*q^12 + 10*q^13 + 12*q^14 + 14*q^15 + 17*q^16 + 19*q^17 + 23*q^18 + 26*q^19 + O(q^20)

In [24]:
```
f2.O(20)
```

Out[24]: 1 + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + 2*q^6 + 2*q^7 + 3*q^8 + 3*q^9 + 4*q^10 + 4*q^11 + 6*q^12 + 6*q^13 + 8*q^14 + 9*q^15 + 11*q^16 + 12*q^17 + 15*q^18 + 16*q^19 + O(q^20)

In [0]:

```

```

In [25]:

```
delta.O(20)
```

Out[25]: 1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^12 - q^15 + O(q^20)

In [26]:

```
f1*delta
```

Out[26]: 1 - q^2 - q^3 + q^9 + q^11 - q^21 - q^24 + q^38 + q^42 - q^60 - q^65 + q^87 + q^93 - q^119 - q^126 + q^156 + q^164 - q^198 + O(q^200)

In [27]:

```
f2*delta
```

Out[27]: 1 - q - q^4 + q^7 + q^13 - q^18 - q^27 + q^34 + q^46 - q^55 - q^70 + q^81 + q^99 - q^112 - q^133 + q^148 + q^172 - q^189 + O(q^200)

In [28]:

```
f3=(f1-f2)/q
```

In [29]:

```
f3.O(20)
```

Out[29]: 1 + q^3 + q^4 + q^5 + q^6 + q^7 + 2*q^8 + 2*q^9 + 3*q^10 + 3*q^11 + 4*q^12 + 4*q^13 + 5*q^14 + 6*q^15 + 7*q^16 + 8*q^17 + 10*q^18 + 1
1*q^19 + O(q^20)

In [30]:

```
f3*delta
```

Out[30]: 1 - q - q^2 + q^3 - q^6 + q^8 + q^10 - q^12 + q^17 - q^20 - q^23 + q^26 - q^33 + q^37 + q^41 - q^45 + q^54 - q^59 - q^64 + q^69 - q^8
0 + q^86 + q^92 - q^98 + q^111 - q^118 - q^125 + q^132 - q^147 + q^155 + q^163 - q^171 + q^188 - q^197 + O(q^199)

In [31]:

```
f4=(f2-f3)/q^2
```

In [32]:

```
f4.O(20)
```

Out[32]: 1 + q^4 + q^5 + q^6 + q^7 + q^8 + q^9 + 2*q^10 + 2*q^11 + 3*q^12 + 3*q^13 + 4*q^14 + 4*q^15 + 5*q^16 + 5*q^17 + 7*q^18 + 7*q^19 + O(q
^20)

In [33]:

```

```

```
f4*delta
```

Out[33]:

```
1 - q - q^2 + q^4 + q^5 - q^6 - q^8 + q^10 + q^11 - q^15 - q^16 + q^18 + q^21 - q^24 - q^25 + q^31 + q^32 - q^35 - q^39 + q^43 + q^44
- q^52 - q^53 + q^57 + q^62 - q^67 - q^68 + q^78 + q^79 - q^84 - q^90 + q^96 + q^97 - q^109 - q^110 + q^116 + q^123 - q^130 - q^131 +
q^145 + q^146 - q^153 - q^161 + q^169 + q^170 - q^186 - q^187 + q^195 + O(q^197)
```

In [0]: