- 準同型定理の応用として，様々な行列に関する命題が得られることを知る．
- 不変部分空間による直和と対角化の関係を知る．

補題：体 k 上の有限生成線形空間 V の部分空間 W について：

(1) W も有限生成.

(2) $\dim W \le \dim V$ で，$\dim W = \dim V \Leftrightarrow W = V$．また $\dim(V/W) = \dim V - \dim W$.

(3) $w_1, \cdots, w_t$ が W の基底で，$[v_1], \cdots, [v_s]$ が V/W の基底ならば，$w_1, \cdots, w_t, v_1, \cdots, v_s$ は V の基底.

注意：$\mathbb{Z} \supsetneq 2\mathbb{Z} \supsetneq 4\mathbb{Z} \supsetneq 8\mathbb{Z} \supsetneq \cdots$ は「1 次元」$\mathbb{Z}$ 加群の狭義減少列である（この講義では扱わない）.

証明：(1) $V = \langle v_1, \cdots, v_n \rangle$ とする．W が有限生成でないとすると，$0 \neq \exists w_1 \in W$ で $\langle w_1 \rangle \subsetneq W$ より，$\exists w_2 \in W \setminus \langle w_1 \rangle, \cdots$ と繰り返すと，これは無限に続けられて，任意の $r \geq 1$ について，$w_1, \cdots, w_r \in W \subseteq V$ は線形独立であることが確認できる．つまり $\forall r \geq 1, \dim V \geq r$.

(2) と (3) W の基底に $v_1, \cdots, v_s$ を付け加えて V の基底に延長すると，$\dim V = \dim W + s$ であり，$[v_1], \cdots, [v_s]$ が V/W の基底であることが確認できる.

(4) $w_1, \cdots, w_t, v_1, \cdots, v_s$ が $\dim V = t + s$ を生成しているから.

系：体 k 上の有限生成線形空間 V, W の間の線形写像 $f : V \to W$ について：

(1) f が単射 $\Rightarrow \dim V \le \dim W$ で，$\dim V = \dim W$ なら f は同型.

(2) f が全射 $\Rightarrow \dim V \ge \dim W$ で，$\dim V = \dim W$ なら f は同型.

証明：$V/\operatorname{Ker} f \xrightarrow{\sim} \operatorname{Im} f$ より，$\dim V = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$.

(1) f が単射 $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{0\}$（環のときと同様）から従う.

(2) f が全射 $\Leftrightarrow \operatorname{Im} f = W$ から従う.

定理（ランク標準形）：k を体とすると：

$$\forall A \in \mathrm{M}_{m,n}(k), \exists! r \geq 0, \exists P \in \mathrm{GL}_m(k), \exists Q \in \mathrm{GL}_n(k), PAQ = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

証明：A に対応する $F_A : k^n \to k^m, \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ において, 準同型定理より $\overline{F_A} : k^n/\operatorname{Ker} F_A \xrightarrow{\sim} \operatorname{Im} F_A$. $v_1, \cdots, v_r \in k^n$ を $[v_1], \cdots, [v_r]$ が $k^n/\operatorname{Ker} F_A$ の基底になるように取ると，$F_A(v_1) = \overline{F_A}([v_1]), \cdots, F_A(v_r) = \overline{F_A}([v_r])$ は $\operatorname{Im} F_A = \operatorname{Im} \overline{F_A}$ の基底である．これを k^m の基底に延長し，k^n の基底としては $\operatorname{Ker} F_A$ の基底（何でもよい）と $v_1, \cdots, v_r$ を並べたものを考える．これらの基底に関する F_A の表現行列は $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ になっている.

r の一意性について：$P'AQ' = \begin{pmatrix} E_{r'} & O \\ O & O \end{pmatrix}$ とすると，$\dim \operatorname{Im} F_A = r'$ となる.

系：$\operatorname{rank}(A) = \dim \operatorname{Im} F_A$.

命題：行列積においては，片側逆の存在から，逆元の存在が従う：k を体，$A \in \mathrm{M}_n(k)$ について

(1) $\exists B \in \mathrm{M}_n(k), AB = E_n \Rightarrow BA = E_n$.
(2) $\exists B \in \mathrm{M}_n(k), BA = E_n \Rightarrow AB = E_n$.

証明：対応する $F_A, F_B : k^n \to k^n$ を考える．(1) は

$$\left(k^n \xrightarrow{F_B} k^n \xrightarrow{F_A} k^n\right) = \left(k^n \xrightarrow{\mathrm{id}_{k^n}} k^n\right)$$

と言っている．これから F_B は単射，F_A は全射が容易に分かる（以下の補題 (1),(2) を用いた）．よって F_A は同型なので（1page の補題 (2) を用いた），$F_A^{-1} = F_B$ なので $BA = E_n$．(2) も同様.

補題：写像 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ について

(1) $g \circ f$ が単射 $\Rightarrow$ f は単射.
(2) $g \circ f$ が全射 $\Rightarrow$ g は全射.
(3) $g \circ f$ が単射 $\Leftarrow$ f と g は単射.
(4) $g \circ f$ が全射 $\Leftarrow$ f と g は全射.

命題：k を体，$A \in \mathrm{M}_{m,n}(k), B \in \mathrm{M}_{n,\ell}(k)$ について

$$\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) - n \le \operatorname{rank}(AB) \le \min\{\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B)\}.$$

証明：最右辺は以下から明らか.

$$\operatorname{Im} F_B = F_B(k^\ell) \overset{F_A}{\twoheadrightarrow} F_A(F_B(k^\ell)) \subseteq F_A(k^n) = \operatorname{Im} F_A.$$

最左辺は，$\operatorname{rank}(A) - \operatorname{rank}(AB) \le n - \operatorname{rank}(B)$ を示せばよく，そのために $\exists$ の存在とその全射性を確認すればよい．普遍性を用いるために $\gamma \circ \beta \circ \alpha = 0$ を示したいが，それは図式の可換性（$\beta' \circ \alpha' = \beta \circ \alpha$）から明らか（$\gamma \circ \beta' = 0$ だから $\gamma \circ \beta \circ \alpha = (\gamma \circ \beta') \circ \alpha' = 0$）．$\gamma \circ \beta$ は全射なので（上の補題 (4) を用いた），$\overset{\exists}{\dashrightarrow}$ は全射（上の補題 (2) を用いた）.

$$\begin{tikzcd}
 & & & k^n/\operatorname{Im} F_B \arrow[ddr, dotted, bend left, "\exists"] & \\
k^\ell \arrow[rr, "F_B"] \arrow[dr] & & k^n \arrow[ur] \arrow[rr, "F_A"] \arrow[dr, "\beta"] & & k^m \\
 & \operatorname{Im} F_B \arrow[ur, hook, "\alpha"] \arrow[dr, "\alpha'"'] & & \operatorname{Im} F_A \arrow[ur, hook] \arrow[dr, "\gamma"] & \\
 & & \operatorname{Im} F_{AB} \arrow[ur, hook, "\beta'"'] & & \operatorname{Im} F_A/\operatorname{Im} F_{AB}
\end{tikzcd}$$

定義：k 線形空間 V の部分空間 $V_1, \cdots, V_r$ について

$$\sum_{i=1}^{r} V_i := \{\sum_{i=1}^{r} v_i \mid 1 \leq \forall i \leq r, v_i \in V_i\} \subseteq V$$

は部分空間だが，これが直和とは，以下が成り立つことと定義する．

$$\forall v \in \sum_{i=1}^{r} V_i, \exists! v_1 \in V_1, \cdots, \exists! v_r \in V_r, \sum_{i=1}^{r} v_i = v.$$

注意：$\bigcap_{i=1}^{r} V_i \subseteq V$ は部分空間だが，$\bigcup_{i=1}^{r} V_i$ は部分空間とは限らない．

命題：$\sum_{i=1}^{r} V_i$ は直和 $\Leftrightarrow 1 \leq \forall j \leq r, (\sum_{i \neq j, 1 \leq i \leq r} V_i) \cap V_j = \{0\}$.

証明：$(\Rightarrow)$ $\exists j, 0 \neq \exists w \in (\sum_{i \neq j} V_i) \cap V_j$ とする．適当な $v_i \in V_i$ を用いて $w = \sum_{i \neq j} v_i$ だが，$\sum_{i \neq j} v_i - w = 0$ で矛盾が生じた．

$(\Leftarrow)$ $v = \sum_{i=1}^{r} v_i = \sum_{i=1}^{r} v'_i$ のとき，$\forall j, v_j - v'_j = \sum_{i \neq j} v'_i - v_i \in \{0\}$ より，$v_j = v'_j$.

系：さらに $\forall i, V_i$：有限生成，と仮定すると，次とも同値：

$$v_1^{(i)}, \cdots, v_{N_i}^{(i)} \text{ が } V_i \text{ の基底ならば } v_1^{(1)}, \cdots, v_{N_1}^{(1)}, \cdots, v_1^{(r)}, \cdots, v_{N_r}^{(r)} \text{ は } \textstyle\sum_{i=1}^{r} V_i \text{ の基底}$$

証明：$(\Rightarrow)$ $v_1^{(1)}, \cdots, v_{N_1}^{(1)}, \cdots, v_1^{(r)}, \cdots, v_{N_r}^{(r)}$ が $\sum_{i=1}^{r} V_i$ を生成することは明らか．$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{N_i} c_j^{(i)} v_j^{(i)} = 0$ とすると，$\forall i, \sum_j c_j^{(i)} v_j^{(i)} = 0$ から $\forall i, \forall j, c_j^{(i)} = 0$.

$(\Leftarrow)$ $\exists j, (\sum_{i \neq j} V_i) \cap V_j \ni w \neq 0$ とし，$w = \sum_{\ell=1}^{N_j} c_\ell^{(j)} v_\ell^{(j)} = \sum_{i \neq j} \sum_{\ell=1}^{N_i} c_\ell^{(i)} v_\ell^{(i)}$ と書く．「$\forall \ell, c_\ell^{(j)} = 0$」ではなく，「$\forall i \neq j, \forall \ell, c_\ell^{(i)} = 0$」でもない．一方，「中辺」$-$「右辺」$= 0$ なので矛盾が生じた．

注意：$V_1 + V_2$ が直和 $\Leftrightarrow V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

命題：k 線形空間 V の部分空間 V_1, V_2 が有限生成のとき

$$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 \cap V_2) + \dim(V_1 + V_2).$$

証明：$V_1 \cap V_2$ の基底 $u_1, \cdots, u_r$ を延長して，V_1 の基底 $u_1, \cdots, u_r, v_1, \cdots, v_s$ と V_2 の基底 $w_1, \cdots, w_t$ を得たとする．以下を示せばよい．

> 主張：$u_1, \cdots, u_r, v_1, \cdots, v_s, w_1, \cdots, w_t$ は $V_1 + V_2$ の基底である．
> 証明：生成することは明らか．$\sum_{i=1}^{r} c_i u_i + \sum_{j=1}^{s} d_j v_j + \sum_{\ell=1}^{t} e_\ell w_\ell = 0$ とすると，$\sum_{\ell=1}^{t} e_\ell w_\ell \in V_1 \cap V_2$ より，$\forall \ell, e_\ell = 0$. よって $\forall i, c_i = 0$ かつ $\forall j, d_j = 0$.

注意：$V_1 \hookrightarrow (V_1 + V_2) \twoheadrightarrow (V_1 + V_2)/V_2$ という合成を φ とすると，φ は全射で，$\operatorname{Ker} \varphi = V_1 \cap V_2$. よって準同型定理より

$$V_1/(V_1 \cap V_2) \xrightarrow{\sim} (V_1 + V_2)/V_2.$$

これから $\dim V_1 - \dim(V_1 \cap V_2) = \dim(V_1 + V_2) - \dim V_2$ と導出してもよい．

記法：$\sum_{i=1}^r V_i$ が直和のとき，$\bigoplus_{i=1}^r V_i$ とも書く．

定義：k 線形空間 V の自己線形 $f: V \to V$ について，部分空間 $W \subseteq V$ が f 不変 $\Leftrightarrow f(W) \subseteq W$.

注意：V が有限生成のとき，W の基底 $u_1, \cdots, u_t$ を延長して $v_1, \cdots, v_s$ が得られたとすると，この基底に関する f の表現行列は，以下の形をしている．

$$\begin{pmatrix} f|_W \text{ の基底 } u_1, \cdots, u_t \text{ に関する表現行列} & * \\ O & \bar{f} \text{ の基底 } [v_1], \cdots, [v_s] \text{ に関する表現行列} \end{pmatrix}.$$

ここで $\bar{f}: V/W \to V/W$ は（商加群の普遍性によって）$\bar{f}([u]) = [f(u)]$ と定まる自己線形．

注意：同様に，$W_1, \cdots, W_r \subseteq V$ が f 不変で $\bigoplus_{i=1}^r W_i = V$ なら，f の表現行列を

$$\begin{pmatrix} f|_{W_1} \text{ の表現行列} & \cdots & O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \cdots & f|_{W_r} \text{ の表現行列} \end{pmatrix}$$

と出来る．特に $W_i = \{v \in V \mid f(v) = \alpha_i v\}$ となるとき，f の表現行列は以下である．

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 E_{\dim W_1} & \cdots & O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \cdots & \alpha_r E_{\dim W_r} \end{pmatrix}$$

命題：体 k 上の有限生成線形空間 V の自己線形 $f: V \to V$ が対角化可能 $\Leftrightarrow \exists \alpha_1 \in k, \cdots, \exists \alpha_r \in k, V = \bigoplus_{i=1}^r W_i$. ここで $i \neq j \Rightarrow \alpha_i \neq \alpha_j$ で，$W_i := \{v \in V \mid f(v) = \alpha_i v\}$.

証明：$(\Leftarrow)$：すぐ前で注意した．

$(\Rightarrow)$：$1 \leq \forall i \leq r, 1 \leq \forall j \leq N_i, f(v_j^{(i)}) = \alpha_i v_j^{(i)}$ となる V の基底が取れたとすると，$v_1^{(i)}, \cdots, v_{N_i}^{(i)} \in W_i$ は線形独立である．以下の補題より，

$$\dim \bigoplus_{i=1}^r W_i = \sum_{i=1}^r \dim W_i \geq \sum_{i=1}^r N_i = \dim V$$

なので $\bigoplus_{i=1}^r W_i = V$.

補題：$\sum_{i=1}^r W_i = \bigoplus_{i=1}^r W_i$.

証明：$0 = v := \sum_{i=1}^r w_i$ のとき（ここで $w_i \in W_i$），$\forall i, w_i = 0$ を言う．$f(v) = \sum_{i=1}^r \alpha_i w_i$, $f^2(v) = \sum_{i=1}^r \alpha_i^2 w_i$ と続けることで

$$0 = \begin{pmatrix} v \\ f(v) \\ \vdots \\ f^{r-1}(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_r \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^{r-1} & \cdots & \alpha_r^{r-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_r \end{pmatrix}.$$

ここに現れる正方行列の $\det = \pm \prod_{1 \leq i < j \leq r} (\alpha_i - \alpha_j) \neq 0$ より，$\forall i, w_i = 0$.

例：$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とすると，$F_A: k^2 \to k^2, \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ は対角化不可能な自己線形写像．