- Jordan 標準形について（その 1. 広義固有空間による方法）.

定義：サイズ $n \geq 1$ で固有値 $\alpha \in k$ のジョルダン細胞 $J(\alpha;n)$ を以下で定義する.

$$J(\alpha;n)=\begin{pmatrix}\alpha & 1 & \cdots & O\\ 0 & \alpha & \ddots & \vdots\\ \vdots & O & \ddots & 1\\ 0 & \cdots & \cdots & \alpha\end{pmatrix}.$$

定理：$\forall A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}), \exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),\ P^{-1}AP = \bigoplus_{u=1}^{t} J(\beta_u;t_u)$.

注意：この講義では簡単のために $\mathbb{C}$ 上で議論するが，この仮定は本質的ではない.

注意：定理の右辺を A のジョルダン標準形（JNF）という．適切な意味での一意性（並び替えを除いて一意）もあるが，ここでは扱わない.

例：$n=2$ のとき，JNF は次のどれか（ここで $\alpha \neq \beta$).

$$\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}=J(\alpha;1)\oplus J(\alpha;1),\quad \begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}=J(\alpha;1)\oplus J(\beta;1),\quad \begin{pmatrix}\alpha & 1\\ 0 & \beta\end{pmatrix}=J(\alpha;2).$$

$n=3$ のとき，JNF は次のどれか（ここで α,β,γ は相異なる).

$$\begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 0 & \alpha & 0\\ 0 & 0 & \alpha\end{pmatrix}=J(\alpha;1)^{\oplus 3},\qquad \begin{pmatrix}\alpha & 1 & 0\\ 0 & \alpha & 0\\ 0 & 0 & \alpha\end{pmatrix}=J(\alpha;2)\oplus J(\beta;1),$$

$$\begin{pmatrix}\alpha & 1 & 0\\ 0 & \alpha & 1\\ 0 & 0 & \alpha\end{pmatrix}=J(\alpha;3),\qquad \begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 0 & \alpha & 0\\ 0 & 0 & \beta\end{pmatrix}=J(\alpha;1)^{\oplus 2}\oplus J(\beta;1),$$

$$\begin{pmatrix}\alpha & 1 & 0\\ 0 & \alpha & 0\\ 0 & 0 & \beta\end{pmatrix}=J(\alpha;2)\oplus J(\beta;1),\qquad \begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 0 & \beta & 0\\ 0 & 0 & \gamma\end{pmatrix}=J(\alpha;1)\oplus J(\beta;1)\oplus J(\gamma;1).$$

注意：JNF は制約が厳しく，n が小さいとき，JNF が何かは簡単に分かることが多い.

例：$A=\begin{pmatrix}4 & -2 & -3\\ -4 & 6 & 6\\ 4 & -4 & -4\end{pmatrix}$ のとき，$\varphi_A := \det(\lambda E_3 - A) = (\lambda-2)^3$（$A$ の特性多項式）なので，以下の命題から A の JNF は $J(2;1)^{\oplus 3}, J(2;2)\oplus J(2;1), J(2;3)$ のどれかと分かる.

命題：$A, B \in \mathrm{M}_n(k)$ と $P \in \mathrm{GL}_n(k)$ について，$B = P^{-1}AP$ ならば $\varphi_B = \varphi_A$.

証明：$\varphi_B = \det(\lambda E_3 - B) = \det(\lambda P^{-1}P - P^{-1}AP) = \det P^{-1}\det(\lambda E_3 - A)\det P = \varphi_A$.

例（続き）：$\dim\{\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{x}\} = 2$ である．以下から A の JNF は $J(2;2)\oplus J(2;1)$ と分かる.

命題：$B = P^{-1}AP$ ならば $V_{A,\alpha} \cong V_{B,\alpha}$．ここで $\alpha \in k$ について

$$V_{A,\alpha} := \{\boldsymbol{x} \in k^n \mid A\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}\},\quad V_{B,\alpha} := \{\boldsymbol{x} \in k^n \mid B\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}\}.$$

証明：以下は k 線形で $g \circ f = \mathrm{id}_{V_{A,\alpha}}, f \circ g = \mathrm{id}_{V_{B,\alpha}}$ が確認できる．

$$f : V_{A,\alpha} \to V_{B,\alpha}, \boldsymbol{x} \mapsto P^{-1}\boldsymbol{x}, \quad g : V_{B,\alpha} \to V_{A,\alpha}, \boldsymbol{x} \mapsto P\boldsymbol{x}.$$

注意：$n \geq 0$ を正整数の和で書くことを n の分割という．$n = 4$ だと

$$4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

の 5 通りある．これが 4×4 の複素行列の固有値が 1 種類の JNF が 5 通りあると言っている．

注意：n の分割の個数を分割数と言って $p(n)$ と書く．例えば $p(4) = 5$ だが，ラマヌジャンは $p(5n + 4) \equiv 0 \pmod 5$ を見出した．この話題は保型形式という数学の主要課題の 1 つと直接関係している．先の合同式は

$$\sum_{n \geq 0} p(5n + 4)q^n = 5 \prod_{n \geq 1} \frac{(1 - q^{5n})^5}{(1 - q^n)^6}$$

という恒等式からも従う．これをラマヌジャンの Most Beautiful Identity と呼ぶ人も少なくない．

注意：ラマヌジャンはインドの無名な事務員だった．1913 年にハーディーに手紙を書いてケンブリッジに迎えられるのだが，その手紙に

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{e^{-2\pi}}{1 + \cfrac{e^{-4\pi}}{\vdots}}} = \left(\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right) e^{2\pi/5}.$$

という式があった（Rogers-Ramanujan 連分数）．これは n の分割で

- 隣り合う差が 2 以上なもの
- 5 で割って 1,4 余る数を用いたもの

の個数はそれぞれ等しい，といった主張から従う（Rogers-Ramanujan 分割定理）．後者は

$$\sum_{n \geq 0} \frac{q^{n^2}}{(1 - q) \cdots (1 - q^n)} = \prod_{n \geq 0} \frac{1}{(1 - q^{5n+1})(1 - q^{5n+4})}$$

とも同値で（Rogers-Ramanujan 恒等式），ハーディーは It would be difficult to find more beautiful formula than... と後に書いた．

注意：JNF の存在証明には

(1) 広義固有空間を用いる方法
(2) PID 上の有限生成加群の構造定理を用いる方法

のいずれかが標準的で，ここでは (1) を紹介する．いずれの方法も $\mathbb{C}[x]$ が PID である，という事実が役割を果たす．(1) は大まかに以下の 2 ステップからなる．

(A) 広義固有空間への分解（ここに前回の不変部分空間と直和を用いる）．
(B) 広義固有空間の解析．

定義：k を体，$A \in \mathrm{M}_n(k)$ について $I = \{f(x) \in k[x] \mid f(A) = O_n\}$ は $k[x]$ のイデアルで，$k[x]$ は PID だから $I = (\Phi(x))$ となる $\Phi(x)$ で最高次の係数が 1 のものがただ 1 つ存在する．これを A の最小多項式と言って，この講義では $\Phi_A(x)$ と書く．

記法：$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m \in k[x]$ について，

$$f(A) := a_0A^m + a_1X^{m-1} + \cdots + a_{m-1}A + a_mE_n \in \mathrm{M}_n(k).$$

注意：$I \neq \{0\}$．実際，A は k^{n^2} の元と思えるから，$E_n, A, \cdots, A^{n^2}$ は必ず非自明な線形関係式を持つ（そうでなければ $\dim k^{n^2} > n^2$ となってしまう）．なお $\varphi_A(A) = O$（ケーリー・ハミルトン定理）が成り立つので，実際は $E_n, A, \cdots, A^n$ が必ず非自明な線形関係を持つ．

注意：整域 R において，$(a) = (b) \Leftrightarrow \exists c \in R^\times, a = bc$ だった．今，$(k[x])^\times = k^\times$ である．

補題：k を体，$A \in \mathrm{M}_n(k)$ について $\Phi_A = \varphi_1 \cdots \varphi_s$ が $i \neq j$ ならば φ_i と φ_j は互いに素のとき，$W_i = \mathrm{Ker}(F_{\varphi_i(A)})$ について $k^n = \bigoplus_{i=1}^s W_i$．

証明：$\psi_i = \Phi_A/\varphi_i$ について，$\psi_1, \cdots, \psi_s$ の最大公約数は 1（ここに $k[x]$ が UFD を使った）．よって $\exists g_1 \in k[x], \cdots, \exists g_s \in k[x], \sum_{i=1}^s g_i\psi_i = 1$（ここに $k[x]$ が PID を使った）．

> $A_i := g_i(A)\psi_i(A) \in \mathrm{M}_n(k)$ とすると
>
> (1) $\forall v \in k^n, v = \sum_{i=1}^s A_iv$.
> (2) $\sum_{i=1}^s A_i = E_n$ かつ $A_iA_j = \delta_{ij}A_i$.
> (3) $W_i = \mathrm{Im}(F_{A_i})$.
>
> (2) の前半は明らか．これから (1) が従う．$i \neq j$ なら $g_i\psi_ig_j\psi_j$ は Φ_A で割り切れるので $A_iA_j = O$．よって $A_i = A_iE_n = A_i(\sum_{j=1}^s A_j) = A_i^2$．以上で (2) の後半が示された．
> (3) ($\supseteq$)：$\varphi_i\psi_i = \Phi_A$ より $w = A_iv = g_i(A)\phi_i(A)$ について，$\varphi_i(A)w = Ow = 0$．
> ($\subseteq$)：$w \in W_i$ について，$w = E_nw = \sum_{i=1}^s A_iw = A_iw$　($\because i \neq j$ なら $\varphi_i|\psi_j$ だから)．

補題の証明に戻る．(1) より $k^n = \sum_{i=1}^s \mathrm{Im}\,F_{A_i}$ だが, 右辺は $\bigoplus$ である．実際 $v = \sum_{i=1}^s v_i, v_i \in \mathrm{Im}\,F_{A_i}$ について，$A_iv = A_i\sum_{j=1}^s v_j = A_iv_i = v_i$ となって，v_i は v から一意に定まる．

系：$A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ が $\Phi_A = (x-\alpha_1)^{\mu_1}\cdots(x-\alpha_s)^{\mu_s}$　($i \neq j$ ならば $\forall k, \mu_k \geq 1$) のとき，$\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), P^{-1}AP = \bigoplus_{i=1}^s B_i$ かつ $\forall i, (B_i - \alpha_iE_{\ell_i})^{\mu_i} = O_{\ell_i}$（ここで ℓ_i は B_i のサイズ）

証明：W_i は F_A 不変である．

注意：以下 $A \in \mathrm{M}_n(k)$ がべき零のとき，A の共役が $\bigoplus_j J(0; m_j)$ の形にできることを示す．そのためには，べき零自己線形 $f : V \to V$（つまり $\exists m \geq 1, f^m = 0$）を考えると見通しがよい．

補題 A：自己線形 $f : V \to V$ について，$f^m = 0, f^{m-1} \neq 0$ のとき，$W_i = \mathrm{Ker}\, f^i$ について

$$V = W_m \supsetneq W_{m-1} \supsetneq \cdots \supsetneq W_1 \supsetneq W_0 = \{0\}.$$

証明：ある $1 \leq i \leq m$ について，$W_i = W_{i-1}$ とすると，$\forall v \in V, f^m(v) = f^i(f^{m-i}(v)) = 0$ より $f^{m-i}(v) \in W_i = W_{i-1}$．よって $f^{i-1}(f^{m-i}(v)) = 0$ で $f^{m-1} \neq 0$ に矛盾．

補題 B：単射線形 $g : W_1 \to W_2$ について，$w_1, \cdots, w_\ell \in W_1$ が線形独立ならば $g(w_1), \cdots, g(w_\ell) \in W_2$ も線形独立．

証明：容易．$\sum_i c_i g(w_i) = 0$ ならば $g(\sum_i c_i w_i) = 0$．g は単射なので $\sum_i c_i w_i = 0$．$w_1, \cdots, w_\ell$ は線形独立なので $\forall i, c_i = 0$．

補題 C：補題 A の続きで，$2 \leq i \leq m$ について，$W_i = U_i \oplus W_{i-1}$ と U_i を取ると，$f(U_i) \cap W_{i-2} = \{0\}$（特に $f|_{U_i}$ は単射である）．

証明：$u \in U_i$ かつ $f(u) \in W_{i-2}$ なら $f^{i-1}(u) = 0$. 故に $u \in W_{i-1} \cap U_i = \{0\}$.

toy model：補題 A の設定で $m = 3$ の場合を扱う：$V = W_3 \supsetneq W_2 \supsetneq W_1 \supsetneq W_1 \supsetneq W_0 = \{0\}$.

$W_3 = U_3 \oplus W_2$ となる U_3 を取って基底を $v_1, \cdots, v_{r_1}$ とする．補題 C より $f(U_3) \cap W_1 = \{0\}$ で，補題 B より $f(v_1), \cdots, f(v_{r_1}) \in W_2$ は線形独立だったから，$W_2 = U_2 \oplus W_1$ となるように $f(v_1), \cdots, f(v_{r_1})$ を延長して U_2 の基底 $f(v_1), \cdots, f(v_{r_1}), v_{r_1+1}, \cdots, v_{r_2}$ を得る．補題 C より $f(U_2) \cap W_0 = \{0\}$ で，$f^2(v_1), \cdots, f^2(v_{r_1}), f(v_{r_1+1}), \cdots, f(v_{r_2}) \in W_1$ は線形独立だったから，$W_1 = U_1 \oplus W_0 (= U_1)$ となるように延長して，U_1 の基底 $f^2(v_1), \cdots, f^2(v_{r_1}), f(v_{r_1+1}), \cdots, f(v_{r_2}), v_{r_2+1}, \cdots, v_{r_3}$ を得る．さて

- $1 \leq i \leq r_1$ について，$P_i = \langle f^2(v_i), f(v_i), v_i \rangle$ は f 不変で，表現行列は $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- $r_1 < i \leq r_2$ について，$Q_i = \langle f(v_i), v_i \rangle$ は f 不変で，表現行列は $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- $r_2 < i \leq r_3$ について，$R_i = \langle v_i \rangle$ は f 不変で，表現行列は (0).

つまり，このように取った V の基底について，f の表現行列は

$$J(0;3)^{\oplus r_1} \oplus J(0;2)^{\oplus (r_2 - r_1)} \oplus J(0;1)^{\oplus (r_3 - r_2)}$$

である．一般の場合も同様だが，記号が煩雑になるため講義の説明としてはここまでにしておく．

U_3：$\boxed{v_1, \cdots, v_{r_1}}$

U_2：$\boxed{f(v_1), \cdots, f(v_{r_1})}$ $\boxed{v_{r_1+1}, \cdots, v_{r_2}}$

U_1：$\boxed{f^2(v_1), \cdots, f^2(v_{r_1})}$ $\boxed{f(v_{r_1+1}), \cdots, f(v_{r_2})}$ $\boxed{v_{r_2+1}, \cdots, v_{r_3}}$