- 有限次拡大（応用として，角の 3 等分の不可能性）.
- 有限体（応用として，フィボナッチ数列の周期）.

記法：体とは可換環 $R = (R, +, \cdot, 0, 1)$ であって，以下を満たすものであった：

$$0_R \neq 1_R \text{ かつ } \forall a \in R, a \neq 0_R \Rightarrow \exists b \in R, ab = 1_R = ba.$$

体の準同型とは（可換）環の準同型写像のことである.

命題：体 $\mathbb{F}, \mathbb{F}'$ の間の準同型 $\varphi : \mathbb{F} \to \mathbb{F}'$ は単射.

証明：$\mathrm{Ker}\,\varphi =: I$ は $\mathbb{F}$ のイデアルなので，$I = \{0\}, \mathbb{F}$．$0 \neq 1$ から $I \neq \mathbb{F}$ でなければならない.

注意：以上より，体では商を考えない．しばしば $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{F}'$（部分体 = 部分環で体になっている）を考え，$\varphi$ は省略する.

記法：体 $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{F}'$ と部分集合 $S \subseteq \mathbb{F}'$ について，$\mathbb{F}$ と S を含む $\mathbb{F}'$ の最小の部分体を $F(S)$ と書く．$S = \{s_1, s_2, \cdots\}$ のとき，$\mathbb{F}(S) = \mathbb{F}(s_1, s_2, \cdots)$ のように書くこともある.

例：$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{C} \ni \sqrt{2}$ で，$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ であることは簡単に分かる．同様に $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$ も分かる.

記法：拡大 $\tau : \mathbb{F} \to \mathbb{F}'$ について，$\mathbb{F}'$ は $f \cdot f' := \tau(f)f'$ によって $\mathbb{F}$ 線形空間の構造を持つ（ここで $f \in \mathbb{F}, f' \in \mathbb{F}'$）．$\mathbb{F}'$ が $\mathbb{F}$ 有限生成のとき，この拡大を有限次拡大といい，$\dim_{\mathbb{F}} \mathbb{F}' = [\mathbb{F}' : \mathbb{F}]_\tau$ を（拡大）次数という．以下，拡大は主に τ が包含写像の場合を扱う.

例：$[\mathbb{Q}(\sqrt{2}), \mathbb{Q}] = 2, [\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}), \mathbb{Q}] = 4, [\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}), \mathbb{Q}(\sqrt{2})] = 2.$

命題：体の拡大 $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{F}' \subseteq \mathbb{F}''$ において

(1) $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{F}''$ が有限次拡大 $\Leftrightarrow$ $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{F}'$ と $\mathbb{F}' \subseteq \mathbb{F}''$ が有限次拡大.
(2) (1) のとき $[\mathbb{F}'' : \mathbb{F}] = [\mathbb{F}'' : \mathbb{F}'][\mathbb{F}' : \mathbb{F}]$.

証明：(1) の $(\Rightarrow)$：明らか
(1) の $(\Leftarrow)$（と (2)）：$\mathbb{F}'$ の $\mathbb{F}$ 基底を $v_1, \cdots, v_m$ とし，$\mathbb{F}''$ の $\mathbb{F}'$ 基底を $w_1, \cdots, w_n$ とすると，$\{v_i w_j \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ が $\mathbb{F}''$ の $\mathbb{F}$ 基底であることが分かる.

応用：コンパスと定規による作図について，以下を示す.

(1) 一般に角の 3 等分は不可能.
(2) 立方体の体積の 2 倍の立方体は作図不可能.

証明：まず，コンパスと定規による作図の意味をはっきりさせておく.

- 最初に $(0, 0)$ と $(1, 0)$ が与えられている.
- 円を描くときの中心と半径，直線を書くときの 2 点はすでにあるものを使う.

- 新たな点は，直線または円の交点とする．
- 有限回のステップで終わる．

作図 n ステップ目で得られている座標の数の集合を S_n とし（例えば $S_0 = \{0, 1\}$ である），$K_n = \mathbb{Q}(S_n)(\subseteq \mathbb{R})$ とする．以下は各自考えよ．

▌ 主張：$[K_n : K_{n-1}] = 1, 2$

(2) を示す．$\sqrt[3]{2} \in K_n$ となったとすると，$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \subseteq K_n$．一方で $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ なので $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 3$．連鎖律より $\dim_{\mathbb{Q}} K_n$ は 2 のべきかつ 3 の倍数となって，矛盾が生じた．

(1) を示すのも同様に, $\cos 30^\circ$ は作図可能だが, $\cos 10^\circ$ が作図不可能であることが（$[\mathbb{Q}(\cos 10^\circ) : \mathbb{Q}] = 3$ より）分かる．

定義：拡大 $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{F}'$ について

(1) $\theta \in \mathbb{F}'$ が $\mathbb{F}$ 代数的 $\Leftrightarrow \exists f \in \mathbb{F}[x], f(\theta) = 0$.
(2) 拡大が代数拡大 $\Leftrightarrow \forall \theta \in \mathbb{F}'$ は $\mathbb{F}$ 代数的.

例：$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ や $\overline{\mathbb{Q}} \subseteq \mathbb{C}$ は代数拡大ではないが，$\mathbb{Q} \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$ は有限次拡大でない代数拡大で，$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ は有限次拡大で代数拡大．ここで $\overline{\mathbb{Q}}$ は代数的数のなす（非自明だが）体である．

命題：拡大 $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{F}'$ が有限次拡大ならば代数拡大.

証明：$n = [\mathbb{F}' : \mathbb{F}]$ とする．$\theta \in \mathbb{F}'$ について，$\theta^0, \cdots, \theta^n$ は $\mathbb{F}$ 線形関係式をもつ.

記法：拡大 $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{F}'$ と $\theta \in \mathbb{F}'$ について,

$$I := \{f(x) \in \mathbb{F}[x] \mid f(\theta) = 0\}$$

は $\mathbb{F}[x]$ のイデアルである．「θ が $\mathbb{F}$ 代数的 $\Leftrightarrow \{0\} \subsetneq I$」だが，このとき I の生成元で最高次の係数が 1 のものを θ の $\mathbb{F}$ 最小多項式といって，この講義では $\mathrm{Irr}(\mathbb{F}; \theta)$ と書く．

命題：拡大 $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{F}'$ において，$\theta \in \mathbb{F}'$ は $\mathbb{F}$ 代数的で $f(x) = \mathrm{Irr}(\mathbb{F}; \theta)$ とすると，$f(x)$ は既約で

$$\mathbb{F}(\theta) = \mathbb{F}[\theta] \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}[x]/(f(x)).$$

証明:写像 $\mathbb{F}[x] \to \mathbb{F}(\theta), g(x) \mapsto g(\theta)$ は環準同型なので, $\mathbb{F}[x]/(f(x)) \hookrightarrow \mathbb{F}(\theta)$．よって $\mathbb{F}[x]/(f(x))$ は整域なので，$0 \neq f(x)$ は既約で，$\mathbb{F}[x]/(f(x))$ は体でもある．つまり $\mathbb{F}[x] \twoheadrightarrow \mathbb{F}[\theta] \subseteq \mathbb{F}(\theta)$ が $\mathbb{F}[x]/(f(x)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}[\theta] \subseteq \mathbb{F}(\theta)$ を誘導し，$\mathbb{F}[\theta]$ が体なので $\mathbb{F}[\theta] = \mathbb{F}(\theta)$.

系：命題の設定で，$\mathbb{F}(\theta)$ は $\mathbb{F}$ の有限次拡大で，$[\mathbb{F}(\theta) : \mathbb{F}] = \deg \mathrm{Irr}(\mathbb{F}; \theta)$.

系：体の拡大 $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{F}' \subseteq \mathbb{F}''$ において，$\mathbb{F} \subseteq \mathbb{F}''$ が代数拡大 $\Leftrightarrow \mathbb{F} \subseteq \mathbb{F}'$ と $\mathbb{F}' \subseteq \mathbb{F}''$ が代数拡大.

証明：$(\Rightarrow)$：明らか.

$(\Leftarrow)$：$\theta \in \mathbb{F}''$ は $\mathbb{F}'$ 代数的なので，$\mathrm{Irr}(\mathbb{F}';\theta) = x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m \in \mathbb{F}'[x]$ を取ると，

$$\mathbb{K} = \mathbb{F}(a_1, \cdots, a_m) = \mathbb{F}(a_1, \cdots, a_{m-1})(a_m) = \cdots$$

は $\mathbb{F}$ の有限次拡大．また $[\mathbb{K}(\theta) : \mathbb{K}] = m$ でもあるので，$\mathbb{K}(\theta)$ は $\mathbb{F}$ の有限次拡大．よって θ は $\mathbb{F}$ 代数的.

注意：代数拡大 $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{F}'$ が分離的とは，任意の $\theta \in \mathbb{F}'$ について，$\mathrm{Irr}(\mathbb{F};\theta)$ が「重根を持たない」ことである．しかし重根についてきちんと論じるのは，一般の設定では意外と面倒なため，この講義では主に「$\overline{\mathbb{Q}}$ の部分体の間の拡大」または「有限体の間の拡大」を考えることにする（このとき自動的に拡大は分離的になる）.

記法：体 $\mathbb{F}$ は可換環なので，ただ 1 つの環準同型 $\mathbb{Z} \to \mathbb{F}$ が存在する．よって $\mathbb{Z}/\operatorname{Ker} \hookrightarrow \mathbb{F}$ で，左辺は整域でなければならないので $\operatorname{Ker} = (0)$ または $\operatorname{Ker} = (p)$（ここで p は素数）．それぞれに応じて，$\mathbb{F}$ は標数 0 または p と言って，$\operatorname{char}\mathbb{F} = 0$ または $\operatorname{char}\mathbb{F} = p$ のように書く.

例：$\operatorname{char}\mathbb{R} = 0$ で，素数 p について $\operatorname{char}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = p$.

記法：$\operatorname{char}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ を（体であることを強調する際には）$\mathbb{F}_p$ と書く.

命題：有限体 $\mathbb{F}$ の $\operatorname{char}\mathbb{F}$ は素数で（p とする），$|F|$ は p のべき.

証明：$\mathbb{F}$ は標数に応じて $\mathbb{Q}$ または $\mathbb{F}_p$（と同型な部分体）を含む．$\mathbb{F}$ はこれらの素体上の線形空間の構造を持つ.

注意：商体（可換環のイデアルによる商環とは異なる概念）について述べる．R が整域ならば，

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$$

は $R \times (R \setminus \{0\})$ 上の同値関係となる．(a, b) の同値類を $\dfrac{a}{b}$ と書くことことにすると，$\mathrm{Frac}(R) := (R \times (R \setminus \{0\}))/\sim$ には

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \quad \frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

で 2 項演算が定義でき，$\left(\mathrm{Frac}(R), +, \cdot, \dfrac{0}{1}, \dfrac{1}{1}\right)$ は体になることが確認できる.

例：$\mathrm{Frac}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$, $\mathrm{Frac}(\mathbb{Z}[x]) = \mathrm{Frac}(\mathbb{Q}[x]) = \mathbb{Q}(x)$（1 変数有理関数体）

注意：構成法 Frac より，整域は体の部分環と同じ概念であることが分かる．実際

$$\iota : R \hookrightarrow \mathrm{Frac}(R), r \mapsto \frac{r}{1}$$

は単射環準同型である.

注意：$\mathrm{Frac}(R)$ は以下の普遍性を持つことが確認できる.

任意の可換環 S と任意の環準同型 $f : R \to S$ について

$$\forall r \in R \setminus \{0\}, f(r) \in S^\times$$

ならば，$\bar{f} \circ \iota = f$ となる環準同型 $\bar{f} : \mathrm{Frac}(R) \to S$ がただ 1 つ存在する．ここで $\iota : R \hookrightarrow \mathrm{Frac}(R)$ は，前の注意にある単射環準同型である．

注意：以上より，$\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q} \xrightarrow{f,g} R$ は，任意の可換環 R と環準同型 $\mathbb{Q} \xrightarrow{f,g} R$ について，$f \circ \iota = g \circ \iota \Rightarrow f = g$ を導く．これは $\mathbb{Z} \overset{\iota}{\hookrightarrow} \mathbb{Q}$ が環の圏で「全射のようなもの」（エピ射という）だと言っている．

注意：$\mathrm{Frac}(R)$ は，「R が UFD ならば $R[x]$ も UFD」の証明にも使われる（$K := \mathrm{Frac}(R)$ について，$K[x]$ は PID なので UFD であることを用いる）．

命題：任意の素数 $p \geq 2$ と素数 $n \geq 1$ について，位数 p^n の体が存在する．

証明：$\mathbb{F}_p[x]$ の n 次既約モニック多項式の個数を a_n とし，$a_n > 0$ を言えばよい．これは

$$a_n = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) p^d \tag{1}$$

から従う．ここで

$$\mu(d) = \begin{cases} 0 & d \text{ が平方因子を持つ} \\ (-1)^r & d = p_1 \cdots p_r \text{（各 } p_i \text{ は相異なる素数）} \end{cases}.$$

事実（メビウス反転公式）：$(x_d)_{d \geq 1}$ について，$\displaystyle\sum_{d|n} x_d = y_n$ なら $\displaystyle x_n = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) y_d$.

(1) **の証明**：形式的べき級数環 $\mathbb{C}[[u]]$ において

$$\prod_{d \geq 1} \left(\frac{1}{1-u^d}\right)^{a_d} = \sum_{k \geq 0} p^k u^k = \frac{1}{1-pu}$$

が成立する（左の等号に $\mathbb{F}_p[x]$ が UFD であることを用いた）．よって

$$-\sum_{d \geq 1} a_d \log(1-u^d) = -\log(1-pu).$$

$-\log(1-u) = u + \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u^3}{3} + \cdots$ より u^n の係数を比較すると，$\displaystyle\sum_{d|n} d a_d = p^n$.

注意：普通，任意の体 $\mathbb{F}$ について，それを含む代数閉包 $\overline{\mathbb{F}}$ の存在（シュタイニッツの定理）を示し，$\mathbb{F}_{p^m} = \{u \in \overline{\mathbb{F}_p} \mid u^{p^m} = u\}$ を示す．しかしこの講義では $\overline{\mathbb{F}}$ の構成（選択公理を用いる）やその「一意性」を示さないため，初等的な有限体の存在証明を行った．$\overline{\mathbb{F}}$ に触れないことは，重根の議論を避けたこととも関係している（参考：分離拡大）．

命題：p が素数で $n \geq 1$ とする．体 $\mathbb{F}, \mathbb{F}'$ が $|\mathbb{F}| = |\mathbb{F}'| = p^n$ ならば $\mathbb{F} \cong \mathbb{F}'$.

証明：$\mathbb{F}^\times \cong C_{p^n-1}$ だったことを思い出す（有限アーベル群の構造定理を仮定して証明した）．よって $\forall x \in \mathbb{F}^\times, x^{p^n-1} = 1$ なので $\forall x \in \mathbb{F}^\times, x^{p^n} = x$. $\mathbb{F}^\times$ の原始根 x_0 を選び，$f(x) = \mathrm{Irr}(\mathbb{F}_p; x_0)$ と

する．$f(x)|x^{p^n}-x$ である．$\mathbb{F}=\mathbb{F}_p[x_0]\cong\mathbb{F}_p[x]/(f(x))$ で，$\forall y\in\mathbb{F}', y^{p^n}-y=0$ でもあるので，$\exists y_0\in\mathbb{F}', f(y_0)=0$. $\mathbb{F}'\supseteq\mathbb{F}_p[y_0]\cong\mathbb{F}_p[x]/(f(x))$ なので，$\mathbb{F}'=\mathbb{F}_p[y_0]\cong\mathbb{F}_p[x]/(f(x))\cong\mathbb{F}$.

記法：位数 p^n の有限体を $\mathbb{F}_{p^n}$ とか $\mathrm{GF}(p,n)$ のように書く．これは同型を除いて一意的だが，上の命題で自然な同型を選ぶことはできない（と思う）.

応用（フィボナッチ数列の周期）：$a_0=0, a_1=1, a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$（$n\geq 2$）で定まる数列 $(a_n)_{n\geq 0}$ を（この講義では）フィボナッチ数列という．一般項の公式

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

は，素数 $p\neq 2,5$ について $\mathbb{F}_p$ または $\mathbb{F}_{p^2}$ で意味を持つ.

事実：素数 $p\neq 2,5$ について，x^2-5 が $\mathbb{F}_p[x]$ で既約 $\Leftrightarrow p\equiv\pm 2 \pmod 5$.

証明：平方剰余の相互法則

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$$

から従う．ここで $p\neq q$ は奇素数で，

$$\left(\frac{p}{q}\right)=\begin{cases}1 & \exists x\in\mathbb{F}_q, x^2=p\\ -1 & \text{それ以外}\end{cases}.$$

系：素数 p について

(1) $p\equiv\pm 1 \pmod 5$ ならば $\forall n\geq 0, a_{n+p-1}=a_n$.
(2) $p\equiv\pm 2 \pmod 5$ ならば $\forall n\geq 0, a_{n+p^2-1}=a_n$.

補題：体 $\mathbb{F}$ の標数が素数 p のとき，$\sigma_{\mathbb{F}}:\mathbb{F}\to\mathbb{F}, x\mapsto x^p$ は準同型（フロベニウス射）.

証明：$\sigma_{\mathbb{F}}(a+b)=\sigma_{\mathbb{F}}(a)+\sigma_{\mathbb{F}}(b)$ のみ非自明で，これは $0<\forall i<p, \binom{p}{i}\in p\mathbb{Z}$ から従う.

定義：拡大 $\mathbb{F}\subseteq\mathbb{F}'$ について，

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{F}'/\mathbb{F}):=\{f:\mathbb{F}'\xrightarrow{\sim}\mathbb{F}' \mid f|_{\mathbb{F}}=\mathrm{id}_{\mathbb{F}}\}$$

は群（ここで / は慣習的に使われるもので，商とは関係がない）.

定理：素数 $p\geq 2$ と $n\geq 1$ について，$C_n\cong\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p), [x]\mapsto\sigma^x_{\mathbb{F}_{p^n}}$（群同型）.

証明：$\sigma_{\mathbb{F}_{p^n}}$ は単射なので全単射（つまり $\sigma_{\mathbb{F}_{p^n}}\in\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p)$）．また $\mathbb{F}_{p^n}^\times\cong C_{p^n-1}$ だったから，$\sigma_{\mathbb{F}_{p^n}}$ の位数は n である．よって $|\mathrm{Gal}|\geq n$. さらに $\mathbb{F}_p[x]/(f(x))\cong\mathbb{F}_{p^n}=\mathbb{F}_p(\theta)$ とすると，$\tau\in\mathrm{Gal}$ について $f(\tau(\theta))=0$ かつ $\tau\neq\tau'$ ならば $\tau(\theta)\neq\tau'(\theta)$ なので $|\mathrm{Gal}|\leq n$.

記法：拡大 $\mathbb{F}\subseteq\mathbb{F}'$ と部分群 $G\subseteq\mathrm{Gal}(\mathbb{F}'/\mathbb{F})$ について

$$\mathbb{F}'^G:=\{x\in\mathbb{F}' \mid \forall\tau\in G, \tau(x)=x\}$$

は $\mathbb{F}$ の拡大体（で $\mathbb{F}'$ の部分体）.

定義：有限次拡大 $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{F}'$ がガロア拡大 $\Leftrightarrow {\mathbb{F}'}^{\mathrm{Gal}(\mathbb{F}'/\mathbb{F})} = \mathbb{F}$.

系：素数 $p \geq 2$ と $n \geq 1$ について，拡大 $\mathbb{F}_p \subseteq \mathbb{F}_{p^n}$ はガロア拡大.

注意：ガロア理論の基本定理とは，ガロア拡大 $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{F}'$ について，中間体 $\mathbb{F} \subseteq M \subseteq \mathbb{F}'$ と $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}'/\mathbb{F})$ の部分群とを 1 対 1 対応つけるものである.

応用（フィボナッチ数列の周期の精密化）：素数 $p \equiv \pm 2 \pmod 5$ について, $\forall n \geq 0, a_{n+2(p+1)} = a_n$.

証明：このとき $\mathbb{F}_{p^2} \cong \mathbb{F}_p[x]/(x^2 - x - 1)$ で $\sigma_{\mathbb{F}_{p^2}}$ は $x^2 - x - 1 = 0$ の解を入れかえる．つまり解を $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_{p^2}$ とすると，$\alpha^p = \beta, \beta^p = \alpha$ なので $\alpha^{p+1} = \beta^{p+1} = -1$.

注意：フィボナッチ数列の mod n での周期は pisano period と呼ばれ，様々な研究がある.