実験数学

2023/10/14, 第46回科学技術セミナー

Shunsuke Tsuchioka（TokyoTech）

s.tsuchioka@c.titech.ac.jp

スライド: quantum.is.c.titech.ac.jp/20231014.pdf

予定: 1) 数学は理論か実験か？

2) ガウスは実験数学者でもあった。

3) 最近の事例（ラマヌジャンをめぐって）

4) ごく最近の事例

5) 再論 : 数学における理論と実験

天才数学者（AI素材.com）

2. ガウスは実験数学者でもあった（素数定理）

C.F.ガウス：「数学は科学の女王であり、数論は数学の女王である」

素数：*2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, ...*

100以下の素数は25個。双子素数が無限にあるかどうかは今でも未解決。

素数が無限にたくさんあることは、古代ギリシア時代から知られていた。

ガウスは15歳のとき、n 以下の素数の個数はおよそ $n / \log(n)$ であると予想した（1792年）。

「その揺らぎの背後に、この頻度が平均的には対数に反比例していることがすぐにわかった…」（ガウスが72歳のときの、エンケ宛の手紙より）

n	n以下の素数の個数	密度	1/log(n)
10^2	25	0.250	0.217
10^4	1229	0.123	0.109
10^6	78498	0.079	0.072
10^8	5761455	0.057	0.054
10^{10}	455052511	0.046	0.043
10^{12}	37607912018	0.038	0.036

R.P.ファインマン：（の2000年の月9ドラマ「やまとなでしこ」での翻案）：

「数学や物理というのは、神様のチェスを横から眺めて、そこに
　どんなルールがあるのか、どんな美しい法則があるのか探していくことだ」

高木貞治：「ガウスが進んだ道は即ち数学の進む道である。
その道は帰納的である。特殊から一般へ！それが標語である。<<SNIP>>
数学が演繹的であるというが、それは既成数学の修行にのみ通用するのである。自然科学に於ても一つの学説が出来てしまえば、その学説に基づいて演繹をする。しかし論理は当り前なのだから、演繹のみから新しい物は何も出て来ないのが当り前であろう。若しも学問が演繹のみにたよるならば、その学問は小さな環の上を永遠に周期的に廻転する外はないであろう。
我々は空虚なる一般論に捉われないで、
帰納の一途に精進すべきではあるまいか」（『近世数学史談』より）

参考（webで確認可能な指導教員の系図）：土岡（1982～） → 柏原正樹 → 佐藤幹夫 → 彌永昌吉 → 高木貞治（1875～1960） → ヒルベルト → リンデマン → クライン → プリュッカー → ゲーリング → ガウス（1777～1855）

谷山豊：「独創的な深みに達するには、腕力の強さは不可欠なのではあるまいか。綺麗事が好きで腕力の弱い、我国の多くの数学者にとっては正に、頂門の一針と云うべきであろう」

3. 最近の事例(ラマヌジャンをめぐって)

1913年、ラマヌジャンがハーディーに宛てた手紙に次の連分数がある:

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{e^{-2\pi}}{1+\cfrac{e^{-4\pi}}{1+\cfrac{}{\vdots}}}} = \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) e^{2\pi/5}$$

G.H.ハーディー
("The Indian Mathematician Ramanujan",1937),

映画『奇蹟がくれた数式』より

これらの公式に、完璧に打ち負かされてしまった。このようなものをいまだかつて見たことがない。ぱっと見ただけで、最高レベルの数学者によってのみ書き下されたものだと分かる。これらは真であるはずだ。何故なら人にはこのようなものを捏造するだけの想像力は備わっていないのだから。

ラマヌジャンの連分数を示すには、次(ロジャーズ・ラマヌジャン恒等式)を示せばよいことをハーディーらは知っていた: 任意の自然数 n について、

「隣り合ったパートの差が2以上の」n の分割は、

「各パートを5で割ると1または4余る」n の分割と同数存在する。

例:

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ = 1+1 $\boxed{3}$ = 2+1 = 1+1+1

$\boxed{4}$ = $\boxed{3+1}$ = 2+2 = 2+1+1 = 1+1+1+1

$\boxed{5}$ = $\boxed{4+1}$ = 3+2 = 3+1+1 = 2+2+1 = 2+1+1+1 = 1+1+1+1+1

$\boxed{6}$ = $\boxed{5+1}$ = $\boxed{4+2}$ = 4+1+1 = 3+3 = 3+2+1 = 3+1+1+1

= 2+2+2 = 2+2+1+1 = 2+1+1+1+1 = 1+1+1+1+1+1

$\boxed{7}$ = $\boxed{6+1}$ = $\boxed{5+2}$ = 5+1+1 = 4+3 = 4+2+1 = 4+1+1+1 = 3+3+1 = 3+2+2

= 3+2+1+1 = 3+1+1+1+1 = 2+2+2+1 = 2+2+1+1+1 = 2+1+1+1+1+1

= 1+1+1+1+1+1+1

ラマヌジャンの連分数を示すには、次（ロジャーズ・ラマヌジャン恒等式）を示せばよいことをハーディーらは知っていた：任意の自然数 n について、

「隣り合ったパートの差が2以上の」n の分割は、

「各パートを5で割ると1または4余る」n の分割と同数存在する。

例：

$\boxed{1}$　　$\boxed{2} = 1+1$　　$\boxed{3} = 2+1 = 1+1+1$

$\boxed{4} = \boxed{3+1} = 2+2 = 2+1+1 = 1+1+1+1$

$\boxed{5} = \boxed{4+1} = 3+2 = 3+1+1 = 2+2+1 = 2+1+1+1 = 1+1+1+1+1$

$\boxed{6} = \boxed{5+1} = \boxed{4+2} = 4+1+1 = 3+3 = 3+2+1 = 3+1+1+1$

$= 2+2+2 = 2+2+1+1 = 2+1+1+1+1 = 1+1+1+1+1+1$

ロジャーズ・ラマヌジャン恒等式は、受験数学の見かけだが、実はとても難しい。ハーディーらは4年かけても証明できなかった。これを深く理解する過程で、（物理とは独立に）「頂点作用素」が発見された（1970年代）。

頂点作用素代数（VOA）は、現代数学が到達した基本的対称性である。

2014年、カナデとラッセルは、実験数学の手法を用いて次の予想を得た:

任意の自然数 n について、「隣りの隣りのパートの差が3以上で、隣り合ったパートの差が1以下ならばその和は3で割り切れる」n の分割は、「各パートを9で割ると 1 or 3 or 6 or 8 余る」n の分割と同数存在する。

例:

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ = 1+1 $\boxed{3}$ = $\boxed{2+1}$ = 1+1+1

$\boxed{4}$ = $\boxed{3+1}$ = 2+2 = 2+1+1 = 1+1+1+1

$\boxed{5}$ = $\boxed{4+1}$ = 3+2 = 3+1+1 = 2+2+1 = 2+1+1+1 = 1+1+1+1+1

$\boxed{6}$ = $\boxed{5+1}$ = $\boxed{4+2}$ = 4+1+1 = 3+3 = 3+2+1 = 3+1+1+1
= 2+2+2 = 2+2+1+1 = 2+1+1+1+1 = 1+1+1+1+1+1

$\boxed{7}$ = $\boxed{6+1}$ = $\boxed{5+2}$ = 5+1+1 = 4+3 = $\boxed{4+2+1}$ = 4+1+1+1 = 3+3+1
= 3+2+2 = 3+2+1+1 = 3+1+1+1+1 = 2+2+2+1 = 2+2+1+1+1
= 2+1+1+1+1+1 = 1+1+1+1+1+1+1

S.Kanade

参考:S.Kanade and M.C.Russell, IdentityFinder and some new identities of Rogers-Ramanujan type, Exp.Math.24 (2015)

M.Russell

2014年、カナデとラッセルは、実験数学の手法を用いて次の予想を得た：
任意の自然数 n について、「隣りの隣りのパートの差が3以上で、隣り合ったパートの差が1以下ならばその和は3で割り切れる」n の分割は、
「各パートを9で割ると 1 or 3 or 6 or 8 余る」n の分割と同数存在する。

例：

$\boxed{1}$　　$\boxed{2}$ = 1+1　　$\boxed{3}$ = $\boxed{2+1}$ = 1+1+1

$\boxed{4}$ = $\boxed{3+1}$ = 2+2 = 2+1+1 = 1+1+1+1

$\boxed{5}$ = $\boxed{4+1}$ = 3+2 = 3+1+1 = 2+2+1 = 2+1+1+1 = 1+1+1+1+1

カナデ・ラッセル予想は今でも未解決である。高校生でもわかる、ロジャーズ・ラマヌジャン恒等式のような命題が、見過ごされていて、さらに現代数学で解けないのは興味深い。なお「同数（＝）存在する」を「以上（≧）存在する」に弱めると、正しいことが知られている（講演者による）。

参考：S.Tsuchioka, A vertex operator reformulation of the Kanade–Russell conjecture modulo 9, arXiv:2211.12351（プレプリント。現在投稿中・審査中）

4. ごく最近の事例

(1) ラマヌジャン・マシン： $$\frac{8}{\pi^2}=1-\cfrac{2\times 1^4-1^3}{7-\cfrac{2\times 2^4-2^3}{19-\cfrac{2\times 3^4-3^3}{37-\cfrac{2\times 4^4-4^3}{\cdots}}}}$$ などの未解決問題（出版時）

を発見 [G.Raayoni, et.al., Generating conjectures on fundamental constants with the Ramanujan machine, Nature 590, 67–73 (2021)]。

S.ラマヌジャン：「神の御心を表現しない方程式には、何の意味もない」

D.ザイルバーガー：「ラマヌジャン・マシンは、数学が再び科学になる（そして再び楽しくなる！）前兆である」

(2) ニューラル・ネットワーク（電脳直観？）

DeepMind社と数学者（G.Williamson）の協同で、「Kazhdan–Lusztig多項式のinvariance予想」を導くような、精密化を定式化 [A.Davies, et.al., Advancing mathematics by guiding human intuition with AI, Nature 600, 70–74 (2021)]。

5. 数学における理論と実験

J・フォン・ノイマン：「数学におけるいくつかの最高のインスピレーションは、
それが考えうる限り最も純粋数学に属する分野であっても、
自然科学から派生していることを否定できません。<<SNIP>>
経験的な起源から遠く離れて「抽象的」な近親交配が長く続けば続くほど、
数学という学問分野は堕落する危険性があるのです。
何事も始まるとき、その様式は古典的です。
それがバロック様式になってくると、危険信号が点灯されるのです」
（1946年、シカゴ大学での講演「数学者」）」

計算機によって、理論的考察では見逃され、ガウスも計算できなかった領域での「現象（神様のチェス）」が発掘され、新しい鉱脈が見つかるかもしれない

$\boxed{\text{物理}} \xrightarrow{\text{直観}} \boxed{\text{数学}}$ $\boxed{\text{計算機}}$

古典・量子力学（実験）　微積分・作用素環（理論）
場の理論（未定義＝理論?）　ミラー対称性（証明＝実験?）

また、四色問題のように、完全な証明が計算機にしか達成されない(と考えられる定理)については、

数学 —直観?→ 計算機

証明のアイデア(理論?)　　膨大な細部を検証(実験?)

数学が計算機をインスパイヤーしているように、見えるかもしれない。
計算機は自然科学と同様に、数学に「経験的な発想を直接的に再注入する」(ノイマン)だろう。数学は歴史ある学問だが、まだまだ進展しそうである。■

計算機によって、理論的考察では見逃され、ガウスも計算できなかった領域での「現象(神様のチェス)」が発掘され、新しい鉱脈が見つかるかもしれない

物理 —直観→ 数学 ←直観?— 計算機

古典・量子力学(実験)　　微積分・作用素環(理論)
場の理論(未定義＝理論?)　　ミラー対称性(証明＝実験?)

(おまけ)2. ガウスは実験数学者でもあった(算術幾何平均) a 「足して2で割ったような」という平均(算術平均)があるなら、 b 「掛けて平方根を取ったような」という平均(幾何平均)もある。

$$a \to (a+b)/2, \quad b \to \sqrt{ab}$$

1	→	1.2071067811865488	→	1.198156948094634	→	1.198140234793877	→	1.198140234735592
$\sqrt{2}$		1.189207115002721		1.19812352149312		1.198140234677307		1.198140234735592

ガウスは、1 と ルート2 から始めた、算術平均と幾何平均の繰り返しの極限 1.1981402347355922074... が、$\frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ の逆数と小数第11位まで一致することを発見し、「新しい解析の分野を確実に切り開く」と記した(1799年5月30日の日記)。これは楕円モジュラー関数論の端緒となった。

ガウスの日記には、数値積分で 4.81048... といった値を得た後、「この log は 1.5708 = π/2 ? 」「これは甚だ奇妙である」(1797年)といった記述が見られる。

この手の推論は、今では Inverse Symbolic Calculator である程度可能である。