入学おめでとうございます。自分の研究内容に関して、ミニ講義を頼まれました。今朝、ある財団に提出した内容です。(2022/4/3, 土岡俊介)

入学おめでとうございます。この講演では、大学での数学がどんな感じになるか、一つの側面を説明してみたいと思います。

<u>言いたいこと</u>:

(1) 頭を使わなくてすむようにするために、頭を使うようになる。

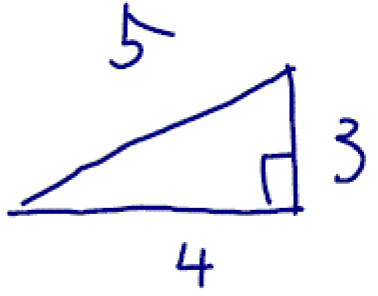
(2) 想像力が大切。

これらとコンピュータとの関係も述べてみます。

一応、数学の話をするので題材を。こんな受検風の問題を考えてみましょう。

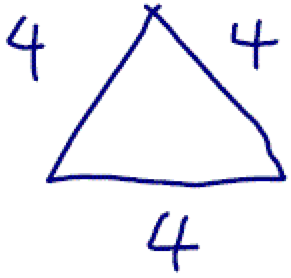
(Q) 3辺の長さの合計を決めたとき、面積最大の三角形は何か?

e.g.



$S=6$

(周長 $=12$)



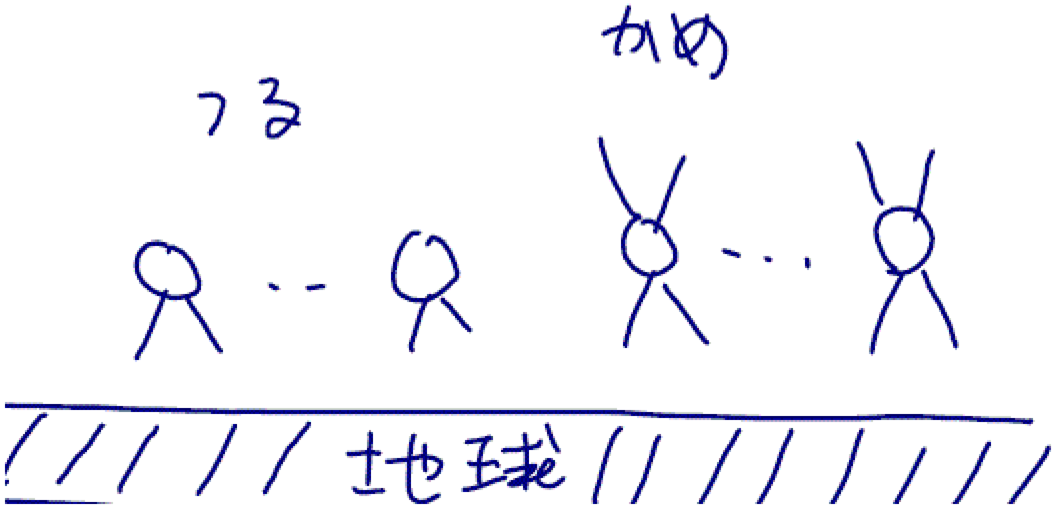
$$S=\frac{4\times 2\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}\fallingdotseq 6.9$$

この問題を、大学生ならどう解くのかを説明します。

鶴亀算とは?

（Q）頭が8、足が26あるとき、鶴と亀はそれぞれいくらいるか？

<u>小学生</u>：頭を使う = 毎回奇抜なことを考える。今回は亀を逆立ちさせる。



地面には $8\times2=16$ 足がある

よって かめは $\dfrac{26-16}{2}=5$

よって つるは $8-5=3$

旅人算、ニュートン算、…ごとに、毎回奇抜なことを考える。

<u>中学生</u>：x を使う。

$$x+y=8$$
$$2x+4y=26$$

解くと

$$(x,y)=(3,5)$$

鶴亀算は不要だった!

私の指導教員の柏原正樹さんの京都賞受賞（2018年。賞金は1億円!）のインタビュー（youtubeで視聴可能）より:

そのころ感心したのは「つるかめ算」とかいろいろな問題がありますね。文字を使ってｘという数を導入してやると非常に簡単に解けて、その問題ごとにどうやればいいかというのを工夫して考えなければいけないのが、何でもそれを使えば簡単に解けるというわけですね。あれは感激しました。

<u>頭を使わないとは?</u> :

(1) うまい言語を設定する（今の場合、日本語ではなくｘやｙ）

(2) いったんそれに翻訳してしまえば、後は間違えることさえ不可能なように計算で答えが出る。

これをライプニッツの夢と言います(c.f.「万能コンピュータ」(近代科学社))。
森重文さんは、代数の魅力に「記号が考えてくれる」をあげた。

三角形の問題に戻る。

三角形の3辺の長さを a.b.c として $a+b+c=2$ と仮定(周長=2)

面積Sは $S^2=(1-a)(1-b)(1-c)$ (ヘロンの公式。頭を使ったのか!?)

→ 翻訳

$g(a.b.c) := a+b+c-2=0$ の条件下

$f(a.b.c) := (1-a)(1-b)(1-c)$ の最大値を求めよ

気ばつなことは考えていない!

(一般的なこと)

「制約条件下で、目的関数を最大にせよ」という一般的な言語で記述される。

<u>頭を使わないとは?</u>:

(1) うまい言語を設定する(今の場合、日本語ではなく x や y)

(2) いったんそれに翻訳してしまえば、後は間違えることさえ不可能なように計算で答えが出る。

これをライプニッツの夢と言います(c.f.「万能コンピュータ」(近代科学社))。
森重文さんは、代数の魅力に「記号が考えてくれる」をあげた。

三角形の問題に戻る。

三角形の3辺の長さを a.b.c として $a+b+c=2$ と仮定(周長=2)

面積Sは $S^2=(1-a)(1-b)(1-c)$ (ヘロンの公式。頭を使ったのかな?)

↑

気ばつなことは考えていない!

→ 翻訳

$g(a.b.c):=a+b+c-2=0$ の条件下

$f(a.b.c):=(1-a)(1-b)(1-c)$ の最大値を求めよ

↓ (一般的なこと)

「制約条件下で、目的関数を最大にせよ」という一般的な言語で記述される。

受験で、y=f(x) の最大値を求める場合(つまり、制約がなく、1変数の場合)、微分して、増減表を書くのでした。これの、制約付き+多変数の場合を、微積で扱います。キーワード:偏微分、ヘッシアン、ラグランジュ未定乗数法

三角形の問題に戻る(続き)。∇はナブラ、「i.e.,」はすなわちと読みます。

$g(a,b,c) := a+b+c-2=0$ の条件下

$f(a,b,c) := (1-a)(1-b)(1-c)$ の最大値を求めよ

$\longrightarrow$ $g=0,\quad \nabla f = \lambda \cdot \nabla g$ を解く(λ: ラグランジュ未定乗数, 頭を使ったのね!?)

$$\left(\text{i.e., } g=0,\ \frac{\partial f}{\partial a}=\lambda\frac{\partial g}{\partial a},\ \frac{\partial f}{\partial b}=\lambda\frac{\partial g}{\partial b},\ \frac{\partial f}{\partial c}=\lambda\frac{\partial g}{\partial c}\right)$$

i.e., $a+b+c=2,\quad -(1-b)(1-c)=\lambda$

$-(1-a)(1-c)=\lambda$

$-(1-a)(1-b)=\lambda$

ライプニッツの夢を進めて、連立方程式を自動で解けないだろうか?

受験では、連立方程式は「頭を使って」解いていました。線形代数の講義で連立1次方程式の頭を使わない解法を学びます(掃き出し法。ガウス消去法)

掃き出し法の例(鶴亀算の場合):

e.g. $\begin{aligned} x+y&=8 \\ 2x+4y&=26 \end{aligned} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 26 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{1行}-\text{2行}\times 2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 10 \end{array}\right)$ $y=5,\ x=3$

詳しくは線形代数の講義で扱いますが、

(1) 系統的に変数を消去し、

(2) 元の連立方程式と等価な、順々に解ける連立方程式に変えます。

(3) それを順々に解いています。

ライプニッツの夢を進めて、連立方程式を自動で解けないだろうか?

受験では、連立方程式は「頭を使って」解いていました。線形代数の講義で連立1次方程式の頭を使わない解法を学びます(掃き出し法。ガウス消去法)

掃き出し法の例(鶴亀算の場合):

e.g. $x+y=8$, $2x+4y=26$ $\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 26 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{1行}-\text{2行}\times 2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 10 \end{array}\right)$ $y=5,\ x=3$

詳しくは線形代数の講義で扱いますが、

(1) 系統的に変数を消去し、

(2) 元の連立方程式と等価な、順々に解ける連立方程式に変えます。

(3) それを順々に解いています。

2次以上の連立方程式では、グレブナー基底を使って同じことができます。

数理計算の離散構造で扱うかも!?

例

$$f_1(x,y)=x^2+y^2-1$$
$$f_2(x,y)=xy-1$$

$\xrightarrow{\text{グレブナー基底}}$

$$g_1(x,y)=y^3+x-y$$
$$g_2(x,y)=y^4-y^2+1$$
$$g_3(x,y)=x^2+y^2-1$$
$$g_4(x,y)=xy-1$$

$f_1=f_2=0 \iff g_1=g_2=g_3=0$=g4

逆に解く $g_2=0$ より

$y=\pm\sqrt{\dfrac{1\pm\sqrt{-3}}{2}}$ これと $g_1=0$

からxが求まる。$g_3=g_4=0$もcheckする

三角形の問題に戻る(続き)。

改めて冒頭の例に戻る

$g_1 = a+b+c-2$

$g_2 = \lambda + (1-b)(1-c)$

$g_3 = \lambda + (1-a)(1-b)$

$g_4 = \lambda + (1-a)(1-c)$

$a>b>c>\lambda$ のlexで Buchberger $\longrightarrow$ (1秒 実演します)

$g_5 = b^2-b-2\lambda$

$g_6 = c^2-c-2\lambda$

$g_7 = -b\lambda-2c\lambda+2\lambda$

$g_8 = 3c\lambda-2\lambda$

$g_9 = -3\lambda^2-\frac{\lambda}{3}$

を加える(一例)

① $g_9=0$ を解く(λが求まる)

② $g_6=g_8=0$ を解く(cが求まる)

③ $g_5=g_7=g_2=0$ を解く(bが求まる)

④ $g_1=g_3=g_4=0$ を解く(aが求まる)

g1 = g2 = g3 = g4 = 0 を解きたい。グレブナー基底を求めると、g1 = g2 = g3 = g4 = g5 = g6 = g7 = g8 = g9 = 0 が元と等価で順に解ける方程式になっている。ちなみにグレブナー基底を求めるには、多項式の足し算と引き算とかけ算が出来れば十分である。

(a, b, c, λ)
$\|$
$(1, 1, 0, 0)$
$(1, 0, 1, 0)$
$(0, 1, 1, 0)$
$\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{9}\right)$

三角形の問題の解答(全体像)。

三角形の3辺の長さをa.b.cとしてa+b+c=2と仮定(周長=2)

面積Sは$S^2=(1-a)(1-b)(1-c)$ (ヘロンの公式。頭を使ったのか!?)

気がつかなことは考えていない!

(一般的なこと)

翻訳

→ $g(a,b,c):=a+b+c-2=0$ の条件下

$f(a,b,c):=(1-a)(1-b)(1-c)$ の最大値を求めよ

→ $g=0$, $\nabla f=\lambda\cdot\nabla g$ を解く (λ:ラグランジュ未定乗数, 頭を使ったのか!?)

(i.e., $g=0$, $\frac{\partial f}{\partial a}=\lambda\frac{\partial g}{\partial a}$, $\frac{\partial f}{\partial b}=\lambda\frac{\partial g}{\partial b}$, $\frac{\partial f}{\partial c}=\lambda\frac{\partial g}{\partial c}$)

i.e., $a+b+c=2$, $-(1-b)(1-c)=\lambda$

$-(1-a)(1-c)=\lambda$

$-(1-a)(1-b)=\lambda$

式が4つあって

変数が4つある

ココ

→ 解くと

(a,b,c,λ)

$=$

$(1,1,0,0)$

$(1,0,1,0)$

$(0,1,1,0)$

$\boxed{\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{9}\right)}$

頭を使うとこれが答えと分かる

頭を使わずにどう解くことが出来るのか、が今日のテーマです。

このように、体系的な学習によって、どんどん「鶴亀算は不要」になっていく。
今日は扱いませんでしたが、本当の受験の問題や数学オリンピックの問題もいくつかを「頭を使わずに」解くことが出来ます（c.f. 東ロボ君）

ニュートン: *If I have seen further it is by standing on the shoulders of Giants.*
（私がかなたを見渡せたのだとしたら、それは巨人の肩にのっていたからだ）

最後に、ライプニッツの夢と、あなたが持っているスマートフォンとの関係を。
人工知能へのアプローチには主に4つある。

(1) 記号主義: ライプニッツの夢はこれの代表例。
(2) コネクショニズム: ニューラルネットワークなど。
(3) 進化主義: 遺伝的アルゴリズムなど。
(4) 確率論的推論: ベイズ推定など。

この他に 類推: 頻度の少ない（あるいは全く無い）事象にも適用可能。

ライプニッツの夢の簡単な歴史：

(1) ライプニッツが普遍言語を構想（約300年前）

(2) フレーゲが述語論理（数学を記述出来そうな言語の候補）を発明

(例) フェルマーの最終定理（略式）

$$\forall x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3 \wedge x^n + y^n = z^n \Rightarrow xyz = 0$$

(3) ヒルベルトのプログラム： 数学の形式化

Wir müssen wissen – wir werden wissen.

（我々は知らなければならない。我々は知るだろう）

(4) ゲーデルの不完全性定理

これによって、ナイーブな意味でのライプニッツの夢は望めないことになった。

(5) チューリングによる別証明（1936年）

チューリングマシンは元々、ナイーブなライプニッツの夢が不可能であることを誰にでも分かるようにするための思考実験と思うことができる。

ライプニッツの夢の簡単な歴史:

(1) ライプニッツが普遍言語を構想(約300年前)
<<中略>>
(5) チューリングによる別証明(1936年)
チューリングマシンは元々、ナイーブなライプニッツの夢が不可能であることを誰にでも分かるようにするための思考実験と思うことができる。

しかし、今も特定目的の人工知能研究は盛んである。
(例)Alpha Go、DeepL、自動高速株取引(HFT)など
その意味で、ライプニッツの夢は終わったわけではないと思います。

大学で学ぶこと・研究されていることの多くは、過去の誰かが「そうなったらいいな」と想像・構想したことです。形を変え、脈々と想像力が人々を伝搬しています。世の中を便利にしているもののいくつかは、それが形になったものだと思います。

アインシュタイン: *Imagination is more important than knowledge. For knowledge is limited to all we now know and understand, while imagination embraces the entire world, and all there ever will be to know and understand.*

みなさんの想像力を刺激する素敵な出会いをお祈りします!

しかし、今も特定目的の人工知能研究は盛んである。
（例）Alpha Go、DeepL、自動高速株取引（HFT）など
その意味で、ライプニッツの夢は終わったわけではないと思います。

大学で学ぶこと・研究されていることの多くは、過去の誰かが「そうなったらいいな」と想像・構想したことです。形を変え、脈々と想像力が人々を伝搬しています。世の中を便利にしているもののいくつかは、それが形になったものだと思います。